פרק 10

משוואות הפרש ומערכות בזמן בדיד

מערכת בזמן בדיד היא מערכת אשר אותות הכניסה וכן התגובה שלה הם אותות בדידים. נסמן את משתנה הזמן באותות כאלו ב-t או, כאשר נרצה להדגיש כי מדובר בזמן בדיד, נשתמש באחת המאותיות המקובלות למשתנים בדידים: i, k, l, m, n. משתנה נוסף המקובל בספרות כמשתנה בדיד הוא j, אך אנו שומרים אות זו עבור $\sqrt{-1}$.

בפרק זה נדון בייצוג המרכזי עבור מערכות לינאריות וקבועות בזמן---משוואות הפרש. בפרק 11 נראה כי, כמו בזמן רציף, מערכות לינאריות ניתן לייצג כמערכות גרעין, ואם הן קבועות בזמן---כמערכות קונוולוציה.

משוואות הפרש מהוות מודל דינמי למערכות בזמן בדיד - ממערכות המתקבלות כקירוב (על ידי דגימה למשל) של מערכות בזמן רציף, ועד למערכות המממשות אלגוריתמים מסוגים שונים. בקורס זה נתייחס למשוואות כמתארות מערכת, כלומר מקבלות אות כניסה ומייצרות אות מוצא.

נתחיל בהגדרת משוואות הפרש לינאריות, נתאר את פתרונותיהן, ונבדוק מתי תכונות כלליות של מערכות מתקיימות במערכת המתוארת על ידי משוואות הפרש לינאריות.

אלגוריתם איטרטיבי כללי ניתן לתיאור על ידי המשוואה הבאה:

$$y(t) = f(t; y(t-1), \ldots, y(t-N); x(t), x(t-1), \ldots, x(t-M)) \tag{10.0.1}$$

כאשר f היא פונקציה המגדירה את הדינמיקה של המערכת, $x(t)$ הוא אות נתון---מבחינתינו הכניסה למערכת---ו- $y(t)$ היא התגובה. אנו נתרכז במקרה הלינארי---ומשלב זה נדון רק במשוואות הפרש לינאריות. מסיבה זו נשמיט את ה"לינאריות" ונקרא למשוואות "משוואות הפרש", או בקיצור מ.ה.

10.1 משוואות הפרש לינאריות ופתרונן

נעסוק במשוואות הפרש לינאריות בצורה הכללית הבאה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{10.1.1}$$

כאשר $x(t)$ הוא אות נתון---מבחינתינו הכניסה למערכת---ו-$y(t)$ היא התגובה. אנו נניח תמיד כי $a_N \neq 0$ וכן $b_M \neq 0$, כיוון שאחרת ניתן להגדיר את הסכום עם איבר אחד פחות. בנוסף, נניח כי $a_0 = 1$: הסיבה

לכך תידון בהמשך. למעשה ההנחה האחרונה היא כי $a_0 \neq 0$, כיוון שתחת תנאי זה ניתן תמיד לחלק את כל המקדמים ב-a_0 ולקבל משוואה שקולה המקיימת $a_0 = 1$.

משפט 10.1.1 בהינתן אות $x(t)$ עבור $t \geq t_0 - M$ וכן תנאי התחלה

$$\{y(t_0-1), y(t_0-2), \dots, y(t_0-N)\}$$

למשוואת ההפרש (10.1.1) יש פיתרון יחיד $\{y(t) : t \geq t_0\}$.

הוכחה: ישירות על ידי הצבה. נניח ש-$a_0 = 1$ ונרשום את המשוואה מחדש בצורה

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m). \tag{10.1.2}$$

כך ניתן לחשב בצורה איטרטיבית את ערכי $y(t)$ עבור $t \geq t_0$. **מ.ש.ל.**

נשים לב כי ההוכחה נותנת לנו דרך לחשב את הפתרון של מ.ה לכל כניסה נתונה: כמובן שחישוב זה לא יתן נוסחה סגורה עבור הפתרון, אך ניתן כך לחשב את ערכי הפתרון לכל זמן סופי.

טענה 10.1.2 אם y_1 פותר את (10.1.1) עבור כניסה x_1 ותנאי התחלה

$$\{y_1(t_0-1), y_1(t_0-2), \dots, y_1(t_0-N)\},$$

ו- y_2 פותר את (10.1.1) עבור כניסה x_2 ותנאי התחלה

$$\{y_2(t_0-1), y_2(t_0-2), \dots, y_2(t_0-N)\},$$

אזי $\alpha y_1 + \beta y_2$ פותרים את (10.1.1) עבור כניסה $\alpha x_1 + \beta x_2$ ותנאי התחלה

$$\{\alpha y_1(t_0-1) + \beta y_2(t_0-1), \alpha y_1(t_0-2) + \beta y_2(t_0-2), \dots, \alpha y_1(t_0-N) + \beta y_2(t_0-N)\}.$$

הוכחה: נציב ב-(10.1.1) ונקבל שהמשוואה מתקיימת. כמו כן מתקיימים תנאי ההתחלה. לפי משפט 10.1.1 למשוואה יש פתרון יחיד, ולכן נובע כי אכן זהו הפתרון. **מ.ש.ל.**

נשים לב כי הכניסה כוללת את תנאי ההתחלה של אות הכניסה: כלומר, אנו זקוקים לאות הכניסה החל מזמן $t_0 - M$ אם ברצונינו לחשב את התגובה החל מזמן t_0.

מ.ה מגדירה מערכת במובן הבא: עבור אות כניסה x המ.ה ביחד עם תנאי התחלה מגדירים תגובה או מוצא y. זהו הרעיון בבסיס המושג של "מערכת:" זהו תאור של קשר בין כניסה ותגובה. בהמשך נראה כיצד להתייחס לתנאי ההתחלה.

לפני שנדון במ.ה כמייצגות מערכות, נדון בשיטות חישוב הפתרון למ.ה. את ההוכחות ניתן בפרק מאוחר יותר הדן בהתמרת Z. השיטה הראשונה שנדון בה היא חישוב פתרון פרטי ופתרון הומוגני.

הגדרה 10.1.3 פתרון הומוגני של (10.1.1) הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$ (כלומר $x(t) = 0$ לכל t).

הפתרון ההומוגני הכללי של (10.1.1) הוא פתרון הומוגני בעל N פרמטרים חפשיים, כך שבחירתם מאפשרת התאמת הפתרון לכל תנאי התחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_h.

פתרון פרטי של (10.1.1) הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x, ללא התחשבות בתנאי ההתחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_p.

טענה 10.1.4 ניתן למצוא פתרון למ.ה (10.1.1) כך:

1. נמצא פתרון פרטי y_p,
2. נחשב את הפתרון ההומוגני הכללי y_h,
3. נחשב את ערכי הפרמטרים החופשיים של $y_h + y_p$ כך שיתאימו לתנאי ההתחלה הנתונים.

הוכחה: נובע מטענה 10.1.2. מ.ש.ל.

השיטה השניה לבניית פתרון היא על ידי חלוקה לפתרון בתנאי התחלה אפס, ולפתרון בכניסה אפס. נזכר בהגדרה 2.1.5 של פתרון בכניסה אפס y_{ZIR} של (10.1.1), וכן של פתרון בתנאי התחלה אפס y_{ZSR}.

טענה 10.1.5 $y \doteq y_{ZIR} + y_{ZSR}$ הוא פתרון למ.ה (10.1.1).

הוכחה: נובע מטענה 10.1.2. מ.ש.ל.

נשים לב כי אם y_1 ו- y_2 פותרים את המ.ה עם כניסה זהה (אך תנאי התחלה שונים) אזי $y_1 - y_2$ הוא פתרון הומוגני. כמו כן, צירוף ליניארי של פתרונות הומוגניים הוא פתרון הומוגני.

הגדרה 10.1.6 נסמן השהיה בעזרת אופרטור ההזזה בזמן σ, כך שאת המ.ה (10.1.1) נרשום בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sigma^{-n} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \sigma^{-m} x(t). \tag{10.1.3}$$

הפולינום האפייני של (החלק ההומוגני) של המ.ה הוא הפולינום המתקבל מהחלפת D במשתנה, למשל λ ונרמול על ידי כפל ב-λ^N כלומר

$$\lambda^N \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{-n} = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{N-n}. \tag{10.1.4}$$

שרשי הפולינום האפייני הם הערכים של λ כך שהביטוי (10.1.4) שווה לאפס.

דוגמה 10.1.7 נחשב את הפולינום האפייני של המשוואה ההומוגנית

$$y(n) + \frac{3}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = 0. \tag{10.1.5}$$

כיוון ש-$N = 2$, הפולינום האפייני הוא

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} \tag{10.1.6}$$

והמשוואה האפיינית היא

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0. \tag{10.1.7}$$

שרשי המשוואה האפיינית הם $\lambda = -1, \lambda = -1/2$.

את הפתרון ההומוגני ניתן למצוא בצורה שיטתית.

משפט 10.1.8 נסמן ב-$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ את השרשים של הפולינום האפייני של המ.ה. אזי הפתרון ההומוגני הכללי הוא

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i f_i(t) \tag{10.1.8}$$

כאשר A_i הם קבועים והפונקציות $f_i(t)$ הן פונקציות עצמיות של המשוואה ההומוגנית, ונתונות כלהלן.
אם λ_i הוא שורש בריבוי יחיד של הפולינום האפייני אזי $f_i(t) = \lambda_i^t$.
נניח כי λ_i הוא שורש בריבוי $k+1$, כלומר $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+k}$ ושורש זה שונה מכל השרשים האחרים. אזי $f_{i+j}(t) = t^j \lambda_i^t$ עבור $0 \le j \le k$.

את המשפט נוכיח, כאמור, לאחר שנלמד על התמרות Z. בשלב זה נסתפק בהמחשה. אות מהצורה $y(t) = \lambda^t$ הוא פתרון הומוגני של (10.1.3) אם מתקיים

$$0 = \sum_{n=0}^{N} a_n D^n y(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n D^n \lambda^t = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{t-n} = \lambda^{t-N} \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{N-n}.$$

הביטוי האחרון מתאפס לכל t בדיוק כאשר λ הוא שורש של הפולינום האפייני.

אנו רואים כי פתרונות מ.ה דומים מאד לפתרון מ.ד.ר. הדמיון ממשיך גם כאשר אנו משתמשים במ.ה לתאור של מערכת כניסה-יציאה.

10.2 מערכות ומשוואות הפרש לינאריות

ראינו כי פתרון מ.ה תלוי גם בכניסה וגם בתנאי התחלה. בשלב זה ברצונינו להתרכז בהשפעת הכניסה. דרך אחת לעשות זאת היא על ידי בחירת תנאי התחלה אפס, כלומר התייחסות לפתרון y_{ZSR} בלבד. לדרך זו יש חסרון: אנו נאלצים לבחור זמן קבוע בו מוגדרים תנאי ההתחלה. נתגבר על כך כפי שעשינו עבור מ.ד.ר. נזכר בהגדרות 2.2.11 של אות חד צדדי ימני ואות חד צדדי שמאלי.

הגדרה 10.2.1 נאמר שמערכת המתוארת על ידי מ.ה היא במנוחה התחלתית *(Initially At Rest)* אם תגובת המערכת לאות ימני המתאפס עבור $s < t_x$ היא אפס עד תחילת הכניסה, כלומר היא מקיימת $y(s) = 0$ עבור $s < t_x$.

10.2.1 תכונות וסיווג של מערכות מ.ה.

אנו מתייחסים למערכת המתוארת על ידי מ.ה כמערכת מיפוי כניסה יציאה (מערכת IOM---הגדרה 2.2.1). על פי ההגדרה 2.2.3, מ.ה מתארת מערכת דינמית בזמן בדיד. לפי הגדרה 2.2.5 זוהי מערכת SISO, ולפי הגדרה 2.2.6 זוהי מערכת בעלת זכרון (פרט למקרה המנוון בו $N = M = 0$). המערכת היא סיבתית (הגדרה 2.2.8) משום שניתן לרשום את המשוואה (10.1.1) בצורה

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{10.2.1}$$

(כיוון שהנחנו $a_0 = 1$). כלומר, הערך של התגובה ברגע t תלוי רק בערכים של הכניסה בעבר ובהווה, וכן בערכי התגובה בעבר.

ניתן כמובן להגדיר משוואת הפרש לינארית שאינה סיבתית. זאת למשל על ידי ביטול הדרישה ש-$a_0 \neq 0$, או לחילופין על ידי שינוי הגבול התחתון של הסכום בצד ימין של (10.1.1) כך שיתחיל ב-$m < 0$. ראה גם סעיף 12.5.1 המתאר ייצוג שונה של משוואות הפרש.

טענה 10.2.2 מ.ה הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת לינארית.

הוכחה: נשים לב כי סכום אותות ימניים הוא אות ימני. מהגדרת מערכת במנוחה התחלתית, תנאי ההתחלה הם אפס עבור זמן מוקדם מספיק. לכן הלינאריות נובעת מטענה 10.1.2. **מ.ש.ל.**

המערכת המתוארת על ידי (10.1.1) (כולל תנאי התחלה!) היא מערכת אפינית (הגדרה 2.2.14): אם נקבע תנאי התחלה ונחשב תגובה לשני אותות כניסה, כאשר תנאי ההתחלה הם זהים, אזי ההפרש יקיים את (10.1.1) עבור תנאי התחלה אפס---וזו כידוע מערכת לינארית.

טענה 10.2.3 מ.ה הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת קבועה בזמן.

הוכחה: נזכר בהגדרה 2.2.15. נקבע s ונשים לב כי אם x הוא אות ימני אזי גם $\sigma^s x$ הוא אות ימני. נסמן ב-$y = \Phi x$. קל לראות כי $\sigma^s y$ פותר את (10.1.1) עבור כניסה $\sigma^s x$. **מ.ש.ל.**

10.3 תגובה להלם של משוואות הפרש לינאריות

תגובה להלם היא בסיס לחישוב וניתוח התנהגות של מערכות, גם בזמן בדיד.

הגדרה 10.3.1 פונקצית הלם בזמן בדיד היא פונקצית הדלתה של קרונקר *Kronecker delta function* אשר תסומן ב-δ. הגדרתה היא

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{10.3.1}$$

בניגוד לפונקציית דלתה בזמן רציף, פונקצית הדלתה של קרונקר היא פונקציה רגילה לכל דבר.

עבור דוגמה 10.1.7 ניתן לחשב תגובה להלם בצורה הבאה. המשוואה שעלינו לפתור היא

$$y(n) + \frac{3}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = \delta(n). \tag{10.3.2}$$

דרושים שני תנאי התחלה, שכן $N = 2$, והם כמובן

$$y(-1) = y(-2) = 0. \tag{10.3.3}$$

נחשב בצורה ישירה

$$y(0) = -\frac{3}{2}y(-1) - \frac{1}{2}y(-2) + \delta(0) \tag{10.3.4}$$

$$= 0 + 0 + 1 = 1. \tag{10.3.5}$$

$$y(1) = -\frac{3}{2}y(0) - \frac{1}{2}y(-1) \tag{10.3.6}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot 1 - 0 = -\frac{3}{2} \tag{10.3.7}$$

$$y(2) = -\frac{3}{2}y(1) - \frac{1}{2}y(0) \tag{10.3.8}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{5}{4}\ . \tag{10.3.9}$$

עבור $n \geq 1$ צד ימין של המשוואה מתאפס (כיוון שפונקצית הדלתה שווה אפס), כלומר אנו זקוקים לפתרון הומוגני. אולם חישבנו כבר ומצאנו כי שרשי הפולינום האפייני הם $(-1, -1/2)$. לכן, עבור $n \geq 1$ נציב בפתרון ההומוגני הכללי ונשווה לתוצאות החישוב הישיר:

$$y(n) = A_1(-1)^n + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \tag{10.3.10}$$

$$y(1) = -A_1 - \frac{1}{2}A_2 = -\frac{3}{2} \tag{10.3.11}$$

$$y(2) = A_1 + \frac{1}{4}A_2 = \frac{5}{4}. \tag{10.3.12}$$

נשים לב כי השוויון האחרון בכל משוואה מתקיים רק עבור $n > 0$, אחרת הפתרון איננו הומוגני. מחיבור שתי המשוואות האחרונות נקבל $(-1/4)A_2 = -1/4$ ולכן $A_2 = 1$. נציב במשוואה עבור $y(1)$ ונקבל $A_1 = 1$.
לסיכום מצאנו כי

$$h(n) = \begin{cases} (-1)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{10.3.13}$$

10.3.1 חישוב תגובת הלם

נרשום את מ.ה בצורה הבאה:

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m). \tag{10.3.14}$$

1. חישוב תגובת ההלם על ידי שימוש בלינאריות וקביעות בזמן.

   (א) נחשב תחילה את תגובת ההלם $h_0(t)$ של המערכת

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + x(t). \tag{10.3.15}$$

האות h_0 הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית עבור $t > 0$. לכן

(ב) נמצא את הפתרון ההומוגני למשוואה. לפתרון זה N מקדמים. על מנת למצוא אותם אנו זקוקים ל-N משוואות. לכן

(ג) נחשב, כמו בדוגמה, מתוך המשוואה את

$$y(N-1), y(N-2), \ldots, y(0), \tag{10.3.16}$$

בהתחשב בעובדה שתנאי ההתחלה הם $y(n) = 0$ עבור $n < 0$.

(ד) כעת נמצא את הפתרון ההומוגני למשוואה, ונתאים את הפרמטרים לערכים שחישבנו עבור

$$y(N-1), y(N-2), \ldots, y(0), \tag{10.3.17}$$

מצאנו אם כך את $h_0(n)$.

(ה) כעת נשתמש בלינאריות ובקביעות בזמן, ונקבל

$$h(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m h_0(n-m). \tag{10.3.18}$$

2. חישוב ישיר (איזון הלמים).

(א) מקרה ראשון: $N \geq M$. במצב זה

i. נחשב את

$$y(N-1), y(N-2), \ldots, y(0), \tag{10.3.19}$$

ii. נחשב את הפתרון ההומוגני הכללי, ונתאים את הפרמטרים לערכים שחישבנו עבור

$$y(N-1), y(N-2), \ldots, y(0), \tag{10.3.20}$$

מצאנו כך את $h(n)$.

(ב) מקרה שני: $N < M$. במקרה זה עלינו לחשב את

$$y(M-1), y(M-2), \ldots, y(M-N), \tag{10.3.21}$$

וכעת נמשיך באותה דרך: נחשב פתרון הומוגני ונתאים פרמטרים. נשים לב שהנוסחה שמצאנו במקרה זה היא עבור $n \geq M-N$, ואילו לערכים של $h(n),\ 0 \leq n \leq M-N-1$ עלינו להשתמש בתוצאת החישוב המפורש.

בפרק 12 נלמד שיטה נוספת ויעילה לחשב את תגובת ההלם---דרך התמרת Z.

10.4 תגובה של מ.ה לכניסה אקספוננציאלית ותגובת תדר

האות α^t הוא אות עצמי של משוואת הפרש עבור α מרוכב, במובן שהוא מהווה פתרון פרטי. נבדוק על ידי הצבה ב-(10.1.1) כי הכניסה $x(t) = \alpha^t$ והתגובה $y(t) = H(\alpha)\alpha^t$ פותרים את משוואת ההפרשים עבור קבוע מרוכב $H(\alpha)$ כלשהוא.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{n=0}^{N} a_n H(\alpha)\alpha^{t-n} \tag{10.4.1}$$

$$= \alpha^t H(\alpha) \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^{-n} \tag{10.4.2}$$

$$\sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) = \sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{t-m} \tag{10.4.3}$$

$$= \alpha^t \sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{-m}. \tag{10.4.4}$$

שיוויון יתקיים (לכל α) אם ורק אם

$$H(\alpha) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^{-n}}. \tag{10.4.5}$$

כמו בזמן רציף וכפי שנראה בהמשך, $H(\alpha)$ הוא פונקצית התמסורת. במקרה הפרטי ש-$|\alpha| = 1$ נרשום $\alpha = e^{j\Omega}$ הכניסה היא $x(t) = e^{jt\Omega}$ שהיא כניסה מחזורית אם ורק אם $\Omega = k\pi/m$ עבור שלמים כלשהם k, m. התגובה לכניסה כזו היא $y(t) = H(e^{j\Omega})e^{jt\Omega}$. הפונקציה $H(e^{j\Omega})$ היא תגובת התדר.