

מערכות בקרה 1 (044191) חורף תשע"ו רשימות חלקיות להרצאות

לתשומת לב הסטודנטים:

קובץ הרצאות זה נועד ללוות ולהשלים את ההרצאות בקורס אך לא להחליפן.
בכל מקרה, החומר המועבר בכיתה הוא המחייב.

פרוט נושאי הלימוד ומשכם**הפרקים המסומנים באפור אינם נכללים בקובץ זה**

- א. 1. מבוא - 1 שעה
- ב. מידול מערכות דינמיות - 5 ש' 2. תיאור מתמטי של מערכות לק"ב – חזרה (1 ש') 3. לינאריזציה של משוואות מצב (2 ש') 4. פיתוח מודל מעקרונות פיסיקליים: דוגמאות (2 ש')
- ג. ניתוח מערכות משוב - 13 ש' 5. מבוא למערכות משוב (1 ש') 6. יציבות בחוג סגור ופיתוח, קריטריון Routh-Hurwitz (חזרה) (1 ש') 7. מאפייני התגובה הזמנית ותגובת התדר (1 ש') 8. מערכות מסדר שני, ומושג התגובה הדומיננטית (1 ש') 9. קריטריון נייקויסט ליציבות בחוג סגור (3 ש') 10. עודף פאזה ועודף הגבר (1 ש') 11. מיקום קטבי החוג הסגור - דיאגרמת Root-Locus (3 ש') 12. שגיאת המצב המתמיד, טיפוס המערכת, דחיית הפרעות (2 ש')
- ד. תכן בסיסי של מערכות בקרה - 10 ש' 13. תהליך התכן ודרישות התכן (1 ש') 14. בקרי PID (1 ש') 15. תכן בעזרת Root-Locus (3 ש') 16. תכן בתחום התדר (4 ש') 17. מבנים נוספים של מערכות בקרה: מסנן מקדים, בקר במשוב, סגירת חוגים עוקבת, Feedforward, (1 ש')
18. נושאים נוספים (במידה ויתיר הזמן): חזאי סמית למערכות עם השהייה \ מגבלות תכן בתחום התדר.
- ה. מבוא לתורת המערכות במרחב המצב - 7 ש' 19. קונטרולביליות, אובזרווביליות ומינימליות (3 ש') 20. טרנספורמציות דמיון וצורות קנוניות (3 ש') 21. משוב מצב ומשחזרי מצב – מבוא (1 ש')
- ו. מבוא לבקרה ספרתית - 3 ש' 22. מערכות דגומות, השפעת הדגימה; תכן בקר ספרתי ע"י קירוב בקר רציף

הרצאות חסרות

הרצאה 1 : מבוא

הרצאה 2 : תיאור מתמטי של מערכות לק"ב – חזרה (1 ש')

הרצאה 3 : לינאריזציה של משוואות מצב

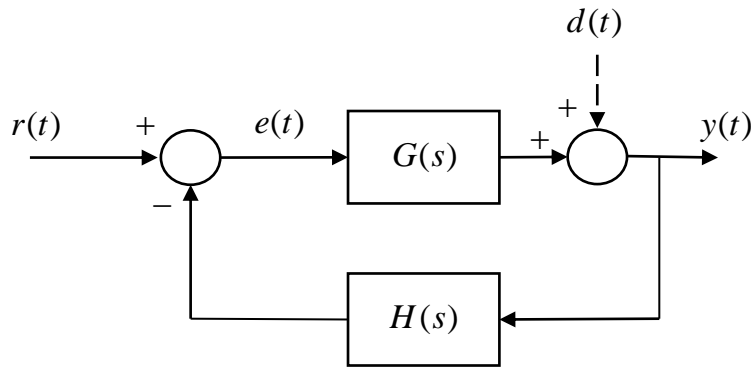
הרצאה 4 : פיתוח מודל מעקרונות פיסיקליים : דוגמאות

פרק ג: ניתוח מערכות משוב

הרצאה 5: מבוא למערכות משוב

בהרצאה זו נדגים מספר יתרונות של השימוש במשוב שלילי במערכות בקרה ועקיבה. לצורך זה נעזר במערכת סטטית פשוטה (הגבר טהור, ללא דינמיקה).

מערכת המשוב הבסיסית שבה נתעניין הינה כמצויר:



כזכור:

$r(t)$ כניסת הייחוס \ הפיקוד

$G(s)$ התמסורת הקדמית

$y(t)$ יציאת המערכת

$H(s)$ תמסורת המשוב

$e(t)$ אות השגיאה

תמסורת החוג $L(s) = G(s)H(s)$

$d(t)$ הפרעה חיצונית

$$T(s) \triangleq \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

תמסורת המערכת (תמסורת החוג הסגור):

$$S(s) \triangleq \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

פונקציית הרגישות:

אנו עוסקים בפרט **במערכות עקיבה**, שבהן המטרה להשיג עקיבה טובה של היציאה אחר אות הייחוס, כלומר:

$$y(t) \approx r(t)$$

לצורך זה נדרש $H(s) \approx 1$, לפחות בתחום התדרים הנמוכים. מערכת משוב שבה $H(s) = 1$ נקראת

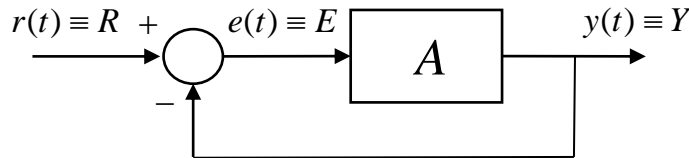
מערכת משוב יחידה. עקיבה טובה תתבטא בשגיאה קטנה: $e(t) \approx 0$

תכונות המערכת שבהן נתעניין כוללות:

- יציבות
- תגובה דינאמית: מהירות התגובה (רוחב סרט), ריסון.
- דיוק העקיבה במצב המתמיד
- רגישות להפרעות חיצוניות (d).
- רגישות לשינוי פרמטרים

נדגים עתה את יתרונות המשוב לגבי שלוש התכונות האחרונות בעזרת המערכת הפשוטה ביותר – מערכת סטטית, ללא דינאמיקה.

א. דיוק העקיבה. נתבונן במערכת סטטית עם משוב יחידה:



$$T \triangleq \frac{Y}{R} = \frac{A}{1+A}$$

תמסורת (הגבר) המערכת:

נזכור שעקיבה אידיאלית פירושה $T = 1$.

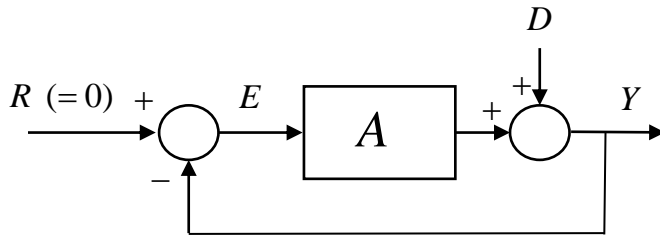
ואכן, עבור $A \gg 1$ נקבל $T \approx 1$.

ב. רגישות לשינוי פרמטרי המערכת

עבור $A = 100$, נקבל תמסורת: $T = 0.99$.

- בכמה ישתנה T אם A יגדל או יקטן פי 10?

ג. דחיית הפרעות. נבדוק את ההשפעה של הפרעה קבועה בגודל D על היציאה.



עקב עקרון הסופרפוזיציה ניתן להניח לצורך זה כי $R = 0$. נקבל לפיכך:

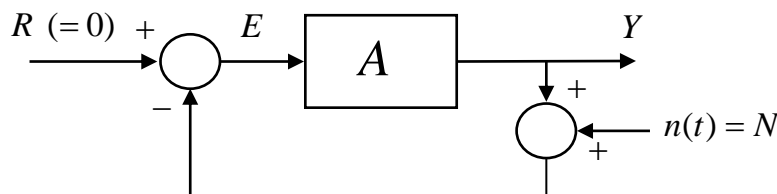
$$Y = \frac{1}{1+A} D$$

נשים לב כי ללא משוב מתקבל $Y = D$. לפיכך: במערכת המשוב, השפעת ההפרעה על היציאה מופחתת פי $(A+1)$.

השפעות שליליות של המשוב:

בצד תכונותיו החיוביות, קיימות גם תופעות שליליות אפשריות שיש להימנע מהן על ידי תכנון נכון. ביניהן:

א. רגישות לרעשי מדידה: השימוש בחיישן למדידת היציאה $y(t)$ כרוך בתוספת של רעש מדידה $n(t)$, אשר מתווסף לאות המשוב כמוראה בציור.



ערך היציאה המתקבל עקב רעש בעל ערך N הינו

$$Y = -\frac{A}{1+A} N$$

ניתן לראות כי להקטנת השפעת הרעש נדרש הגבר A נמוך. דרישה זו הינה בסתירה לצורך בהגבר גבוה לקבלת התכונות הרצויות שנידונו קודם.

למרבה המזל, במערכת מעשית רעשי המדידה הינם משמעותיים בעיקר בתדרים גבוהים. במערכת כזו, שבה ההגבר הסטטי A מוחלף בתמסורת $G(s)$ (הכוללת את תמסורת המערכת המבוקרת ותמסורת הבקר הדינאמי), ניתן להשיג בתכנון נכון:

- הגבר $|G(j\omega)|$ גבוה בתדרים "נמוכים" (תחום רוחב הסרט של המערכת), לקבלת עקיבה טובה וכו'.
- הגבר $|G(j\omega)|$ נמוך בתדרים שמעבר לרוחב הסרט של המערכת, לצורך הנחתת הרעשים בתדרים אלה.

ב. ערעור היציבות של המערכת : שימוש נכון במשוב שלילי יכול לייצב מערכת לא יציבה. אך שימוש "מוגזם" במשוב (הגבר גבוה מדי בתדרים גבוהים) עלול לערער יציבות, גם אם המערכת המבוקרת ("בחוג פתוח") היא יציבה. על כך – בהמשך הקורס.

הרצאה 6: יציבות בחוג פתוח וסגור – תכונות בסיסיות

נתבונן במערכת לק"ב, המתוארת ע"י המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + \dots + b_m u(t)$$

עם פונקציית תמסורת מתאימה:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

נניח כי המערכת הינה נאותה ממש ($m < n$).

א. אפסים וקטבים

נניח ראשית שאין גורמים משותפים שניתנים לצמצום בין המונה והמכנה. אזי:

- $a(s)$ נקרא הפולינום האופייני (או פשוט פולינום המכנה) של המערכת.
- השורשים $\{p_1, \dots, p_n\}$ של $a(s)$ הם קטבי המערכת,
- והשורשים $\{z_1, \dots, z_m\}$ של $b(s)$ הם אפסי המערכת.

במקרה הכללי, עשויים להיות גורמים משותפים בין המונה למכנה, הניתנים לצמצום. המקרה זה:

- פונקציית התמסורת הנגזרת ישירות מהמשוואה הדיפרנציאלית, ללא צמצומים, תיקרא פונקציית התמסורת הנומינלית.
- הפולינום האופייני של המערכת הוא $a(s)$, המכנה של פונקציית התמסורת הנומינלית.
- האפסים והקטבים ה"אמיתיים" (לפי הגדרות פונקציות מרוכבות) של פונקציית התמסורת הם שורשי פולינום המונה ומכנה (בהתאמה), לאחר צמצום כל הגורמים המשותפים ביניהם. סימונם $\{p_1, \dots, p_n\}$ ו- $\{z_1, \dots, z_m\}$, בהתאמה.
- עם זאת, נוח להתייחס לכל שורשי הפולינומים $b(s)$ ו- $a(s)$ (לפני צמצום) בתור האפסים והקטבים של התמסורת הנומינלית, או פשוט אפסי וקטבי המערכת. סימונם $\{p_1, \dots, p_n\}$ ו- $\{z_1, \dots, z_m\}$ בהתאמה.

- דוגמא: $H(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s-1)}$ (.....)

ב. יציבות-הורביץ

כזכור:

- המערכת יציבה אסימפטוטית (= יציאה דועכת לאפס מכל תנאי התחלה) אם ורק אם כל n שרשי הפולינום $a(s)$ הינם בעלי חלק ממשי שלילי ממש: $\text{Re}(p_i) < 0, i = 1, \dots, n$.
- המערכת יציבה BIBO (כניסה חסומה גוררת יציאה חסומה) אם כל הקטבים $\{p_1, \dots, p_n\}$ של התמסורת המצומצמת הינם בעלי חלק ממשי שלילי ממש: $\text{Re}(p_i) < 0, i = 1, \dots, n'$.
- מכאן: יציבות אסימפטוטית היא דרישה חזקה יותר, וגוררת יציבות BIBO.

מעשה והלאה, מערכת לק"ב תיקרא יציבה אם היא יציבה אסימפטוטית (ולכן גם BIBO).
נדגיש כי מערכת עם קוטב (או ערך אופייני) על הציר המדומה איננה יציבה לפי הגדרה זו.

פולינום יציב-הורביץ: פולינום $a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ נקרא יציב במובן הורביץ (או "יציב-הורביץ") אם כל שורשיו $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ בעלי חלק ממשי שלילי ממש (כלומר, נמצאים בחצי המישור השמאלי הפתוח): $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$.

עבור פולינום מסדר נמוך ($n = 1, 2$) ניתן לקבוע יציבות-הורביץ ישירות מתוך סימני המקדמים:

- $n = 1$: הפולינום $a(s) = s + a_1$ יציב-הורביץ אם ורק אם $a_1 > 0$ (אם=).
 - $n = 2$: הפולינום $a(s) = s^2 + a_1 s + a_2$ יציב-הורביץ אם $a_1 > 0, a_2 > 0$.
- (קל לוודא זאת מתוך הפתרון המפורש של המשוואה הריבועית).

עבור פולינום מסדר 3 ומעלה, חיוביות כל המקדמים ($a_i > 0$) הינה עדיין תנאי הכרחי ליציבות הורביץ, אך איננה מספיקה לכך. נפרט:

- האם התנאי מספיק? התשובה שלילית.
נשלול זאת על ידי דוגמה נגדית. למשל:

$$a(s) = s^3 + s^2 + s + 1 = (s + 1)(s^2 + 1)$$

$$a(s) = s^3 + s^2 + s + 2 = (s + 1.35)(s^2 - 0.35s + 1.48)$$

- האם התנאי הכרחי? אכן כן. נראה זאת:

טענה: אם הפולינום יציב הורביץ, אזי $a_i > 0$ לכל $i = 1, \dots, n$.

הוכחה (סקיצה): מהגדרת יציבות-הורביץ, $a(s) = \prod_{i=1}^n (s + \lambda_i)$ כאשר $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$. ניתן לראות כי מתקבלת מכפלה של גורמים מסדר ראשון (לשורשים ממשיים) או שני (לזוגות שורשים

מרוכבים) עם מקדמים חיוביים ממש. לאחר ביצוע הכפל וקיבוץ מקדמי הפולינום ניתן לוודא כי המקדמים המתקבלים הם a_i הם אכן חיוביים ממש.

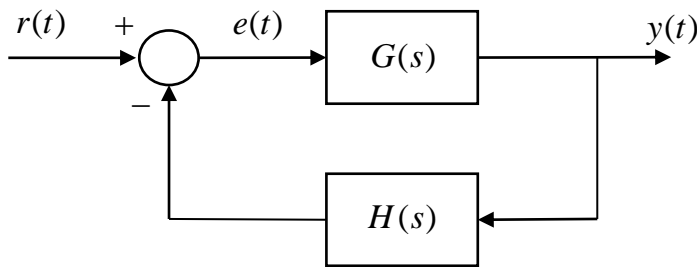
מהתכונה האחרונה (הכרחיות) מתקבלת האבחנה הבאה:

אם קיים מקדם $a_i \leq 0$, אזי הפולינום אינו יציב הורביץ.

דוגמאות לכך: $a(s) = s^3 + s^2 - s + 1$, $a(s) = s^5 + 17s^4 + 8s^2 + s + 3$

קריטריון רוט-הורביץ (Routh-Hurwitz, R-H) ליציבות: קריטריון זה (הערוך כזכור בצורת טבלה) מספק תנאי מספיק והכרחי ליציבות-הורביץ של פולינום מסדר כלשהו. תזכורת לגבי אופן חישוב הטבלה והשימוש בקריטריון תתבצע בתרגול \ תרגילי הבית.

ג. יציבות מערכת משוב: המשוואה האופיינית



עבור מערכת המשוב הבסיסית שבציור, נבחן ראשית את יציבות פונקציית התמסורת של החוג הסגור:

$$T(s) \triangleq \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

לבדיקת יציבות, ניתן לבטא פונקציית תמסורת זו כמנת פולינומים, ולבדוק את יציבות פולינום המכנה.

דוגמא: $G(s) = \frac{1}{s+2}$; $H(s) = \frac{2s+1}{s+1}$

$$T(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+2} \frac{2s+1}{s+1}} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 3}$$

קטבי התמסורת שהתקבלה הם $p_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm j\frac{\sqrt{13}}{2}$. פולינום המכנה הוא יציב-הורביץ, ולכן התמסורת $T(s)$ הינה יציבה.

נשים לב כי לצורך חישוב הקטבים (או פולינום המכנה) ניתן להתמקד במכנה של $T(s)$, ולרשום

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

משוואת זו נקראת המשוואה האופיינית של מערכת המשוב.

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{2s+1}{(s+2)(s+1)} = 0 \quad \text{המשך הדוגמא. המשוואה האופיינית:}$$

$$(s+2)(s+1) + (2s+1) = s^2 + 5s + 3 = 0 \quad \text{על ידי הכפלה במכנה נקבל:}$$

קיבלנו כצפוי את פולינום המכנה של התמסורת של $T(s)$.

נבדוק גם את פונקציית התמסורת $T(s)$:

$$T(s) \triangleq \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \dots = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 2}$$

אנו רואים כי הפולינום האופייני של החוג הסגור מופיע כצפוי במכנה של $T(s)$.

את המשוואה האופיינית ניתן לבטא גם באופן מפורש כמשוואה פולינומית. נניח כי תת-המערכות G

ו- H נתונות באמצעות פונקציות התמסורת הנומינאליות:

$$G(s) = \frac{b_G(s)}{a_G(s)} \quad H(s) = \frac{b_H(s)}{a_H(s)},$$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{b_G(s) b_H(s)}{a_G(s) a_H(s)} = 0 \quad \text{המשוואה האופיינית הינה:}$$

לאחר הכפלה בפולינום המונה נקבל:

$$\underline{a_{cl}(s) \triangleq a_G(s)a_H(s) + b_G(s)b_H(s) = 0}$$

- יש לשים לב שבחשבונות אלו נמנענו מצמצום כלשהו של קטבים ואפסים בין ובתוך תת-המערכות

G ו- H .

הפולינום $a_{cl}(s)$ הוא הפולינום האופייני של החוג הסגור, ושורשיו (פתרונות המשוואה האופיינית)

הם הקטבים הנומינאליים של מערכת המשוב, או "קטבי החוג הסגור". סימונם $\{p_1^c, \dots, p_n^c\}$,

כאשר $n = n_G + n_H$.

- יציבות פנימית:** בדיון לעיל התמקדנו ביציבות פונקציית התמסורת $T(s)$ בין הכניסה r ליציאה y . אולם במערכת משוב יש לנו עניין בהגדרה רחבה יותר של יציבות המערכת. בפרט, נדרוש:
- יציבות אסימפטוטית כוללת: דעיכה לאפס של כל האותות הפנימיים במערכת $(y(t), e(t))$ וכו' (בתגובה לתנאי התחלה (וכניסה 0)).
 - יציבות BIBO כוללת: יציבות של פונקציית התמסורת בין כל נקודת כניסה אפשרית למערכת (למשל כניסת ההפרעה $d(t)$ או רעש המדידה $n(t)$) לכל אות פנימי במערכת.
- מערכת משוב המקיימת תכונות אלה נקראת **יציבה פנימית**. במרבית הקורס נתייחס למערכת כזו פשוט כמערכת משוב יציבה.

בדיקת יציבות פנימית: למרבה המזל, על מנת לבדוק יציבות פנימית של מערכת המשוב אין צורך לבדוק בנפרד כל פונקציית תמסורת אפשרית במערכת זו. זאת כיוון שבכולן מופיע במכנה הגורם $1 + G(s)H(s)$, והקטבים מתקבלים מתוך המשוואה האופיינית המשותפת $1 + G(s)H(s) = 0$.

את התוצאה הבסיסית הבאה נביא ללא הוכחה (ההוכחה והגדרה מדויקת יותר של יציבות פנימית מופיעים כמובן בספרות).

משפט: מערכת המשוב הינה יציבה פנימית אם ורק אם הפולינום האופייני

$$a_{cl}(s) \triangleq a_G(s)a_H(s) + b_G(s)b_H(s)$$

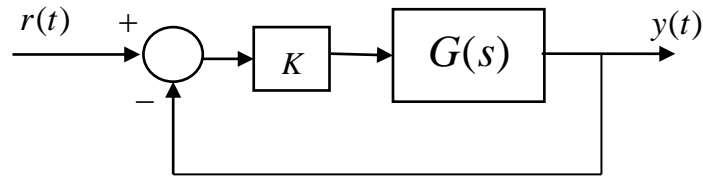
הינו יציב-הורביץ.

הערות:

- תוצאה מיידית מהמשפט היא כי אם קיים צמצום בין אפס וקוטב "לא יציבים" (בחצי המישור הימני) בין פונקציות התמסורת $G(s)$ ו- $H(s)$, אזי מערכת המשוב אינה יציבה פנימית. דוגמא והסבר:
- מסיבות דומות, אין לאפשר צמצום פנימי של אפס וקוטב לא יציבים בתמסורת $G(s)$ או $H(s)$. תרגיל: האם מערכת המשוב עם $H(s) = 0.5$, $G(s) = \frac{s-1}{s-1}$ היא יציבה אסימפטוטית? השוו למערכת שבה $G(s) = 1$.

ד. דוגמאות לבדיקת יציבות עם פרמטר הגבר (יושלים בכתה)

במערכת משוב טיפוסית, הבקר כולל פרמטר הגבר K אשר ניתן לכיוונון. נבדוק עתה את השפעת הגבר זה על יציבות של מספר מערכות משוב פשוטות. נתייחס למערכת משוב יחידה כמצויר:



(1) מערכת מסדר ראשון: $G(s) = \frac{1}{s+a}$, כאשר $a > 0$ גודל נתון.

האם מערכת המשוב יציבה? עבור אילו ערכי K ?

(2) מערכת מסדר שני עם קוטב בראשית ("אינטגרטור"): $G(s) = \frac{1}{s(s+a)}$

(2) מערכת מסדר שלישי: $G(s) = \frac{1}{s(s^2 + as + b)}$, $a, b > 0$

הרצאה 7: מאפייני התגובה הזמנית ותגובת התדר

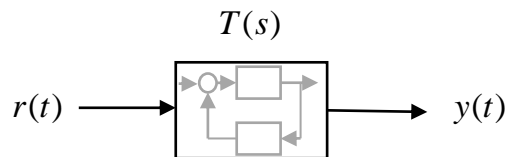
על מנת להעריך את איכותה וביצועיה של מערכת בקרה, נדרשים מדדים סטנדרטיים המתייחסים להיבטים שונים של ביצועים אלה. בהרצאות הבאות נתאר מספר מדדים מקובלים לכך.

ניתן לתאר את ביצועי המערכת במספר היבטים. חלוקה מקובלת היא לשתי הקטגוריות הבאות:
א. ביצועי המצב המתמיד: לאחר דעיכת תופעות המעבר.
ב. התגובה הדינאמית: מהירות התגובה ואופייה, בתגובה לשינוי בכניסה או לתנאי התחלה.

התגובה הדינאמית מאופיינת אף היא בעזרת שני כלים עיקריים:

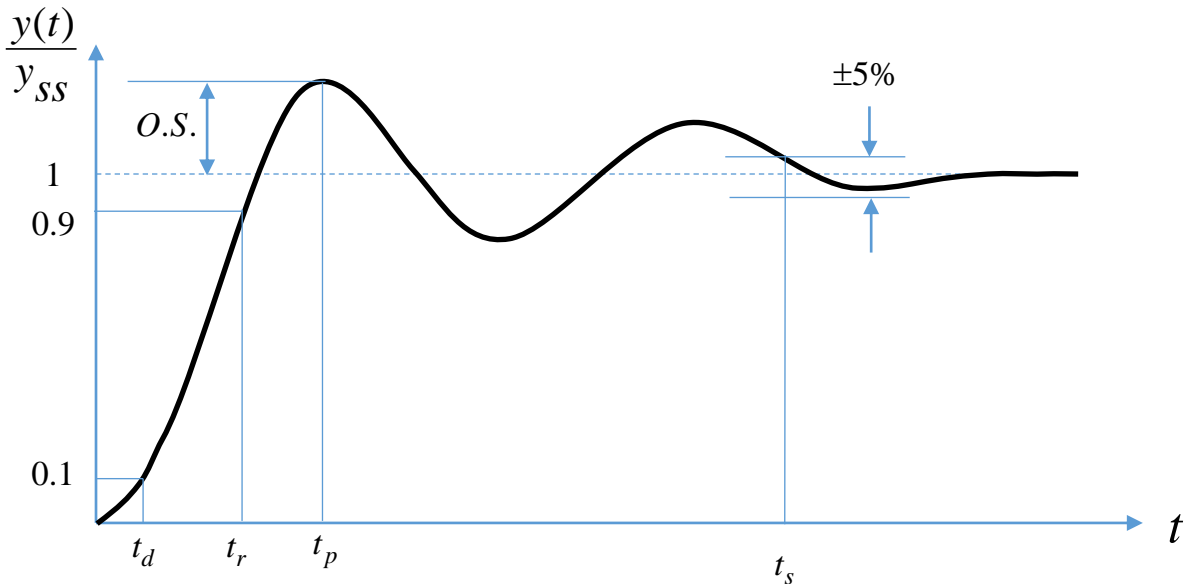
- א. התגובה הזמנית – לרוב התגובה למדרגה.
- ב. תגובת התדר של המערכת – כפי שמתוארת למשל בדיאגרמת בודה.

בהרצאה זו נתאר צורות אופייניות של תגובות אלה ומדדים מתאימים עבורם. אנו מתמקדים פה באיפיון התגובה של המערכת הכוללת, ובפרט לקשר בין כניסת הייחוס ליציאה:



7.1. מאפייני התגובה למדרגה

הדרך המקובלת לאפיין את התגובה הדינאמית היא באמצעות התגובה למדרגה, כלומר יציאת המערכת $y(t)$ המתקבלת כאשר כניסת הייחוס $r(t)$ הינה מדרגת יחידה. תגובה זו מייצגת ישירות את תגובת המערכת לשינוי חד בערך הכניסה (בין שני ערכים קבועים).



צורה אופיינית של תגובה למדרגה של מערכת עקיבה (בעלת ריסון נמוך) מוראית בציור. גודל היציאה $y(t)$ נורמל לפי הערך הסופי שלה y_{ss} לשם נוחיות. התגובה מאופיינת על ידי הפרמטרים העיקריים הבאים:

t_r – זמן העלייה, rise time. הזמן הראשון שבו התגובה מגיעה ל-90% מערכה הסופי. (לעיתים מוגדר בזמן העלייה מ-10% עד 90%).

t_s – זמן ההתייצבות, settling time. הזמן הראשון שבו התגובה נכנסת לשרווול של $\pm p\%$ מערכה הסופי, ולא יוצאת משם יותר. מקובלים ערכים של $\pm 5\%$, $\pm 2\%$.

t_p – זמן השיא, peak time. הזמן שבו התגובה מגיעה לערכה המכסימאלי.

O.S. – תגובת היתר, overshoot. הערך המכסימאלי של התגובה (לרוב נמדד באחוזים מעבר לערך המצב היציב: למשל: כ-10% בציור).

t_d – זמן ההשהיה, הזמן שבוא התגובה מגיעה ל-10% מערכה הסופי.

הגדלים השימושיים ביותר עבורנו יהיו זמן ההתייצבות וגודל תגובת היתר.

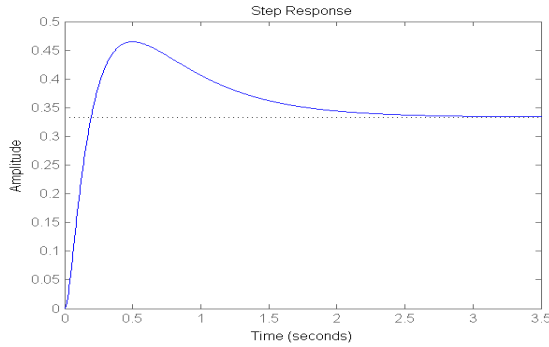
פרמטר חשוב נוסף הינו ערך התגובה במצב המתמיד, y_{ss} , והערך המתאים של שגיאת העקיבה:

$$e_{ss} = 1 - y_{ss}$$

מספר דוגמאות של תגובה למדרגה:

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{(s+2)(s+5)(s+30)} = \frac{100s+100}{s^3+37s^2+220s+300}$$

מערכת מבוקרת:



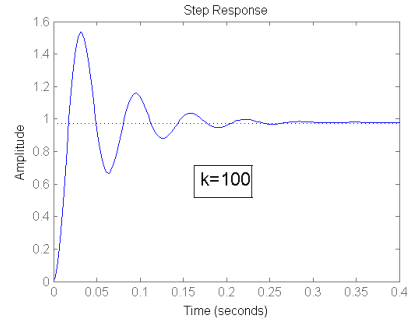
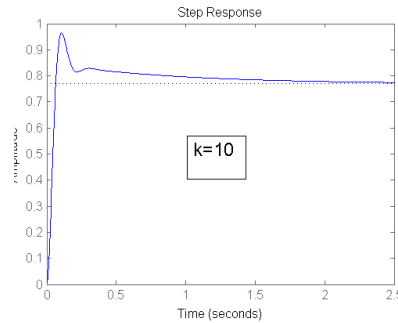
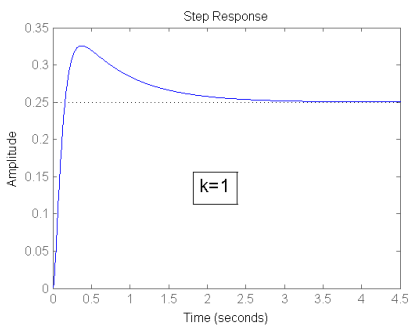
תגובה למדרגה (ללא משוב):

• קוד מטלב:

```
>> G=tf([100,100],[1,37,220,300])
>> G=zpk([-1],[-2,-5,-30],100)
>> s = tf('s'); G = 100*(s+1)/((s+2)*(s+5)*(s+30))
>> step(G)
```

$$T(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$$

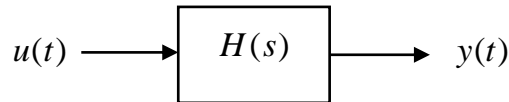
בחוג סגור - משוב יחידה שלילי עם הגבר k :



```
>> H=1; k=10;
>> T=feedback(k*G,H); step(T)
>> %% avoid T=k*G/(1+k*G) !!
```


7.2. מאפייני תגובת התדר

כזכור, תגובת התדר $H(j\omega)$ מתארת את ההגבר והסחת הפאזה של יציאת המערכת (במצב מתמיד) בתגובה לכניסה הרמונית בתדר ω :



$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = A |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega))$$

- $|H(j\omega)|$ הינו הגבר תגובת התדר

- $\angle H(j\omega)$ הינה הפאזה (או הסחת הפאזה) של תגובת התדר.

קשר זה מאפשר מדידה ישירה של תגובת התדר של המערכת, אם ע"י ביצוע סריקה על גבי תדרים בודדים, או בעזרת מנתח ספקטרום (spectrum analyzer).

נציין כי $H(j\omega)$ מוגדרת באופן כללי עבור $-\infty < \omega < \infty$. אולם במערכת ממשיית מתקיים $H(-j\omega) = H(j\omega)^*$, כך שניתן להסתפק בתיאור $H(j\omega)$ עבור $\omega \geq 0$.

הערה לגבי תגובת התדר של מערכת לא יציבה:

- כאשר $H(s)$ פונקצית תמסורת של מערכת לא יציבה, ציר $j\omega$ אינו נמצא בתחום ההתכנסות של $H(s)$, ולא ניתן לפרש את $H(j\omega)$ כהתמרת פוריה של התגובה להלם. כמו כן, עבור "רוב" תנאי ההתחלה יציאת המערכת לא תתכנס למצב יציב בתגובה לכניסה הרמונית, אלא תתבדר.
- במקרה זה עדיין ניתן לפרש את $H(j\omega)$ כמתאר את הפיתרון הפרטי (החסום) של המשוואה הדיפרנציאלית של המערכת, עבור כניסה הרמונית בתדר ω . הקשר $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ עדיין מתקיים באופן פורמאלי, אך אין לראותו כקשר בין התמרת לפלס לפוריה.
- מדידה ישירה של תגובת התדר למערכת לא יציבה עדיין אפשרית, אולם יש להציב תחילה את המערכת בחוג משוב לצורך ייצובה (למניעת התבדרות היציאה).

דיאגרמת בודה: קיימים מספר ייצוגים גרפיים לתגובת התדר, כאשר דיאגרמת בודה היא הנפוצה ביותר. דיאגרמה זו ערוכה כך:

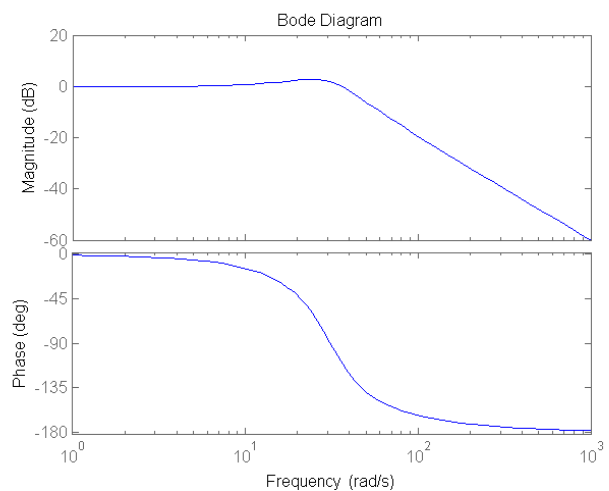
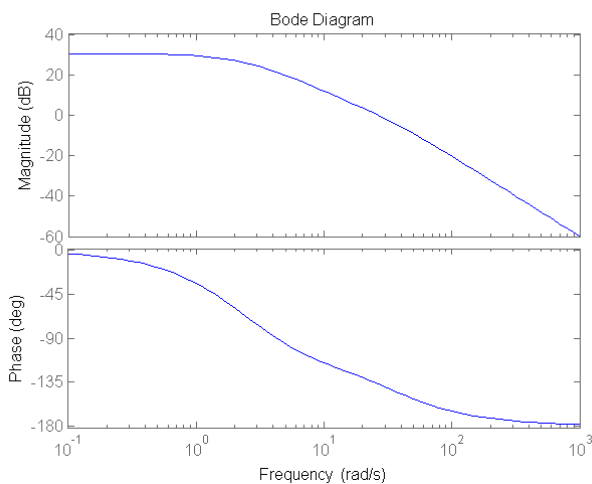
- ציור נפרד של ההגבר $|H(j\omega)|$ ושל הפאזה $\angle H(j\omega)$, כתלות בתדר $\omega > 0$.
- ציר התדר בסקלה לוגריתמית
- ההגבר מתואר בסקלה לוגריתמית, ביחידות דציבל (dB): $|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} |H(j\omega)|$
- הפאזה במתוארת בסקאלה לינארית (ביחידות מעלות או רדיאנים).

הסקאלה הלוגריתמית מאפשרת ציור ידני מקורב ("קרוב אסימפטוטי") של תגובת התדר באמצעות קווים ישרים. חזרה על כללי השרטוט המקורב של דיאגרמת בודה תינתן בתירגול.

דיאגרמות בודה אופייניות של התמסורת הקדמית $G(s)$ ושל תמסורת החוג הסגור $T(s)$ עבור מערכת משוב-יחידה מוראות להלן:

$$G(s) = \frac{1000(s+10)}{(s+2)(s+5)(s+30)}$$

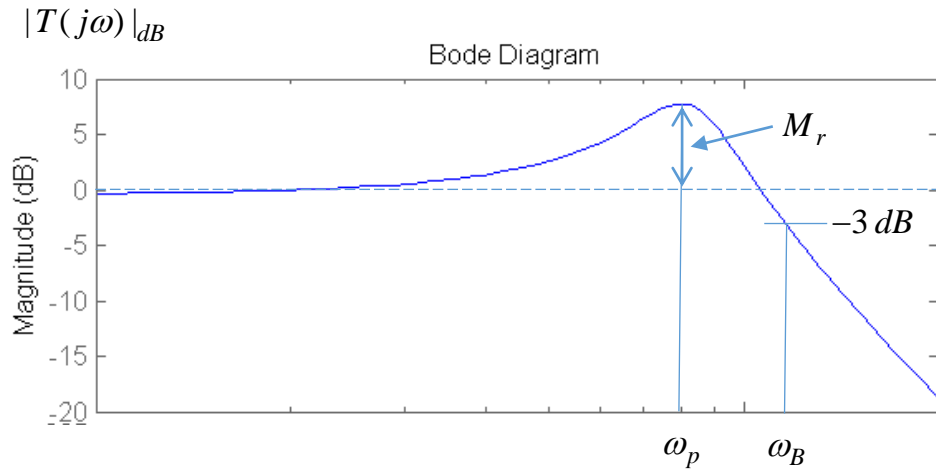
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$



התמסורת הקדמית $G(j\omega)$ (הכוללת את המערכת המבוקרת ובקר מתאים) תהיה בעלת הגבר גדול משמעותית מ-1 (0dB) בתדרים נמוכים. זהו תחום התדרים שבו המשוב אפקטיבי והמערכת עוקבת אחר הכניסה.

התמסורת הכוללת $T(j\omega)$ הינה בעלת הגבר קרוב ל-1 (0dB) בתחום תדרים דומה. זהו תחום התדרים של הכניסה שבו היציאה עוקבת באופן נאמן אחר הכניסה.

מאפייני תגובת התדר:



ניתן לראות כי תגובת התדר של החוג הסגור היא בעלת צורה של מסנן מעביר-נמוכים. הפרמטרים העיקריים של התגובה הינם:

ω_B – רוחב הסרט. זהו הערך שבו ההגבר יורד ל- $3dB$ (פי $\frac{1}{\sqrt{2}}$) מערכו בתדרים הנמוכים. ערכים אופייניים למערכות בקרה הינם עשרות או מאות הרץ.

M_r – ערך התהודה הראשית. זהו הערך המכסימאלי של תגובת התדר (באופן טיפוסי בין 0 למספר dB). ערך גבוה של תהודה זו מצביע על מערכת בעלת ריסון נמוך (תגובה למדרגה תנודתית).

הרצאה 8 : התגובה הזמנית -

מערכות מסדר שני והתגובה הדומיננטית

בהרצאה זו נלמד להעריך את צורת התגובה הזמנית (התגובה למדרגה) של מערכת מתוך מיקום הקטבים והאפסים של פונקציית תמסורת $T(s)$. לצורך זה נתאר ראשית את התגובה של מערכות פשוטות מסדר ראשון ושני, ובהמשך תבסס על כך כדי למצוא קירוב לתגובה של מערכות מורכבות יותר.

8.1. מערכת מסדר ראשון

נתבונן ראשית במערכת הבאה מסדר ראשון:

$$T(s) = \frac{a}{s+a}, \quad a > 0$$

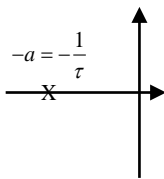
הדרישה $a > 0$ מבטיחה את יציבות המערכת.

נשים לב שההגבר מנורמל כך שמתקבל $T(0) \equiv T(j0) = 1$ (הגבר 1 בתדר 0, כלומר לאות קבוע).

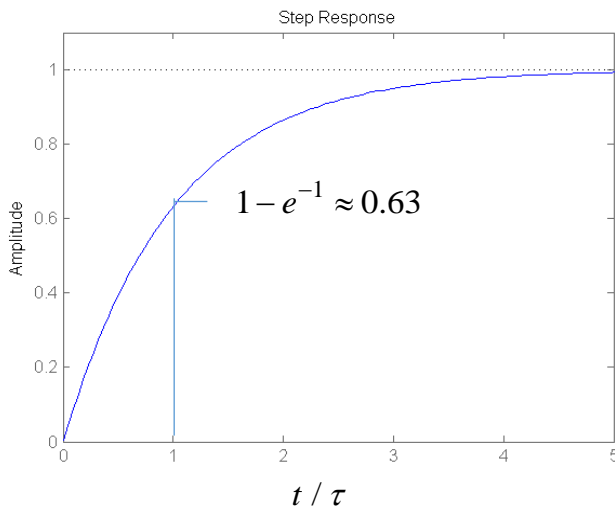
צורה שקולה עבור תמסורת זו:

$$T(s) = \frac{1}{1+\tau s}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (\tau \text{ הוא קבוע הזמן, בשניות})$$

למערכת זו קוטב אחד, בנקודה $p = -a = -\frac{1}{\tau}$

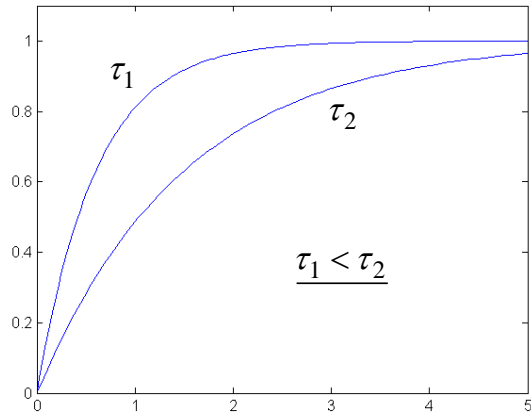


התגובה למדרגה בכניסה, $r(t) = 1(t)$:

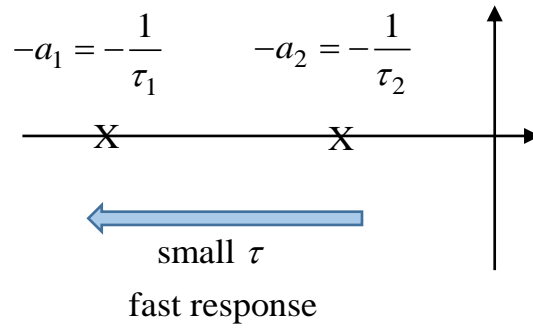


התגובה מתכנסת מונוטונית ל-1, תגובת היתר (overshoot) היא 0%.

השפעת קבוע הזמן τ :



השפעת τ על מיקום הקוטב:



8.2. מערכת סטנדרטית מסדר שני

מערכות מסדר שני הינן המודל הפשוט ביותר שהוא בעל עניין ממשי כמודל מקורב למערכת בקרה כוללת.

מערכת סטנדרטית מסדר שני היא בעלת פונקציית התמסורת הבאה :

$$T(s) = \frac{a_2}{s^2 + a_1s + a_2},$$

למערכת זו : אין אפסים, והגבר התדר הנמוך הוא 1 : $T(0) = 1$.

תנאי היציבות הוא כמובן $a_1 > 0, a_2 > 0$. כאשר $a_2 > 0$, ניתן לרשום את התמסורת כך :

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- $\omega_n > 0$ הוא התדר הטבעי

- ζ הוא מקדם הריסון

- הקשר למקדמים שלעיל: $\omega_n = \sqrt{a_2}, \zeta = \frac{a_1}{2\omega_n}$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \quad \text{קטבי המערכת:}$$

- הערה : מערכת סטנדרטית מסדר שני מתקבלת כתמסורת בחוג סגור של מערכת משוב יחידה עם תמסורת קדמית :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

במקרה זה נקבל

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

זו אכן מערכת סטנדרטית מסדר שני, עם $\omega_n = \sqrt{K}, \zeta = \frac{a}{2\sqrt{K}}$

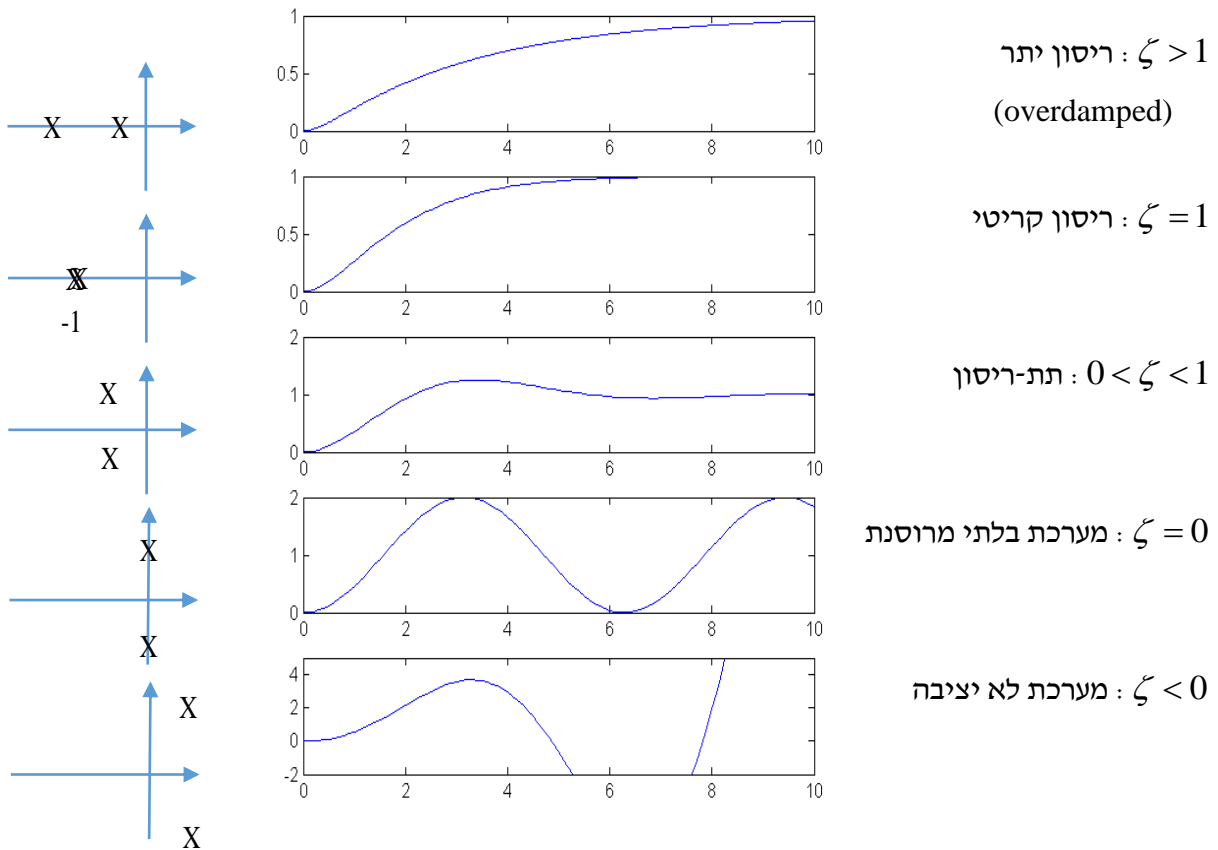
התגובה למדרגה היא בעלת הצורה הבאה (עבור $p_1 \neq p_2$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} T(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} \right\}$$

$$= 1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (t \geq 0)$$

כאשר A_1, A_2 מקדמים מתאימים המתקבלים מהפרוק לשברים חלקיים.

צורה עקרונית של התגובה למדרגה ומיקום הקטבים עבור ערכים שונים של מקדם הריסון מוראים בצורך.



המקרה המעניין עבורנו הוא של תת-ריסון ($0 < \zeta < 1$), ובו נתמקד להלן.

פרטי התגובה הזמנית של מערכת סטנדרטית מסדר שני

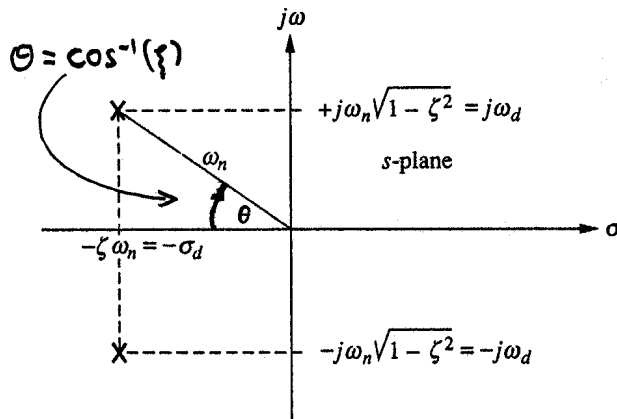
פונקצית תמסורת

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ω_n - תדר טבעי

ζ - מקדם הריסון. נניח $0 \leq \zeta < 1$

מיקום הקטבים

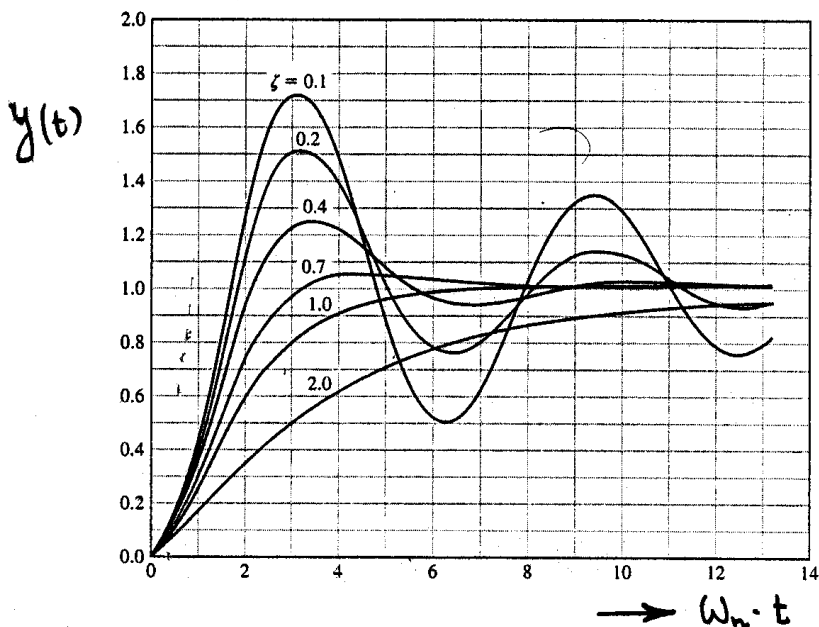


התגובה למדרגה

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma_d t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1} \zeta) \quad t \geq 0$$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ - תדר התנודה

$\sigma_d = \zeta\omega_n$. $\tau_d = 1/\sigma_d$ הוא "קבוע הזמן של המעטפת".

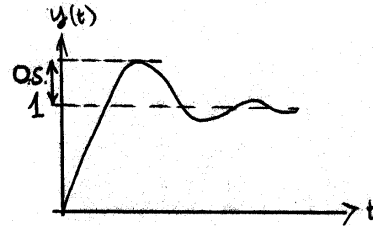
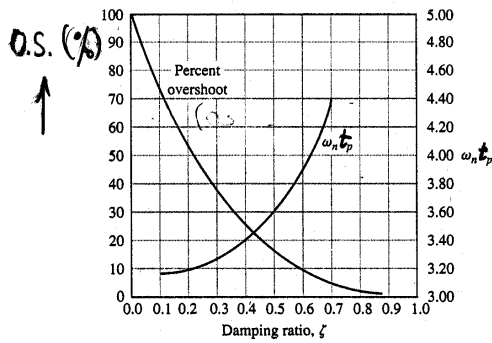


תגובת יתר (Overshoot)

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

עבור $0 \leq \zeta < 1$

$$O.S. = \exp\left(-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right) = \exp(-\pi / \tan(\theta))$$



זמן התייצבות (Settling Time)

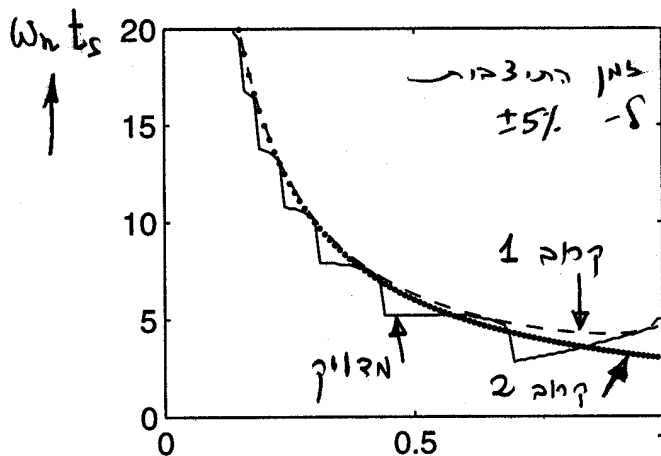
לתחום ±5%

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05 \Rightarrow t_s \approx -\frac{\ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

- קירוב 1 :

$$t_s \approx -\frac{\ln(0.05)}{\zeta\omega_n} \cong \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

- קירוב 2 :



8.3. השפעת קוטב נוסף

נוסיף עתה קוטב (שלישי) למערכת סטנדרטית מסדר שני, ונבחן את השפעתו על התגובה הדינאמית.

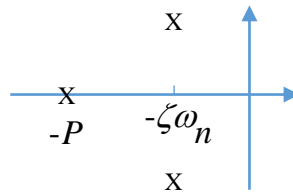
$$T_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{נסמן:}$$

ונבחן את פונקציית התמסורת:

$$T(s) = T_0(s) \frac{1}{1 + s/P} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + s/P)}$$

כאשר $P > 0$. נשים לב כי בקוטב השלישי הוא נקודה $p_3 = -P$.

מפת הקטבים המתקבלת:

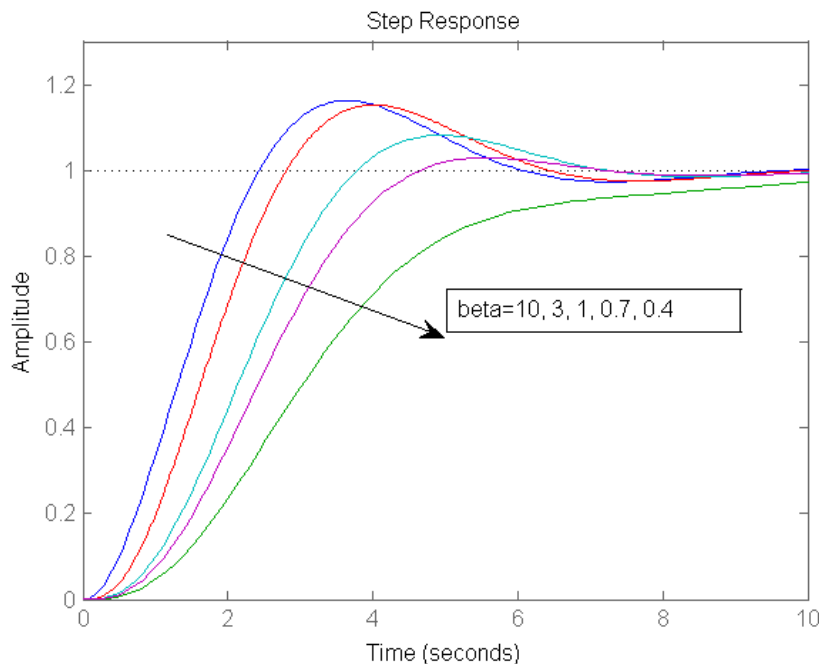


במקום הערך של P עצמו נוח להתייחס לפרמטר היחסי הבא, שמבטא את היחס בין הערך של הקוטב הנוסף לערך הממשי של הקטבים הקיימים:

$$\beta = \frac{P}{\zeta\omega_n}$$

ככל ש- β גדול יותר, כך הקוטב הנוסף נקודה $(-P)$ רחוק יותר שמאלה מהראשית.

התגובה המתקבלת עבור ערכים שונים של β :



ניתן לראות כי :

- עבור $\beta \gg 1$ ($\beta = 10$ בציור), התגובה זהה למעשה לזו של $T_0(s)$. כלומר: השפעת הקוטב הנוסף זניחה.
- ככל ש- β קטן, השפעתו גדלה. כאשר $\beta \ll 1$, התגובה הופכת איטית יותר ודומה לזו של מערכת מסדר ראשון. השפעת הקטבים המקוריים (של T_0) הופכת להיות זניחה.

הסבר :

- התגובה למדרגה תהיה עתה

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}T(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_3}{s+P}\right\}$$

$$= 1 + Ae^{-\sigma_d t} \sin(\dots) + A_3 e^{-Pt}$$

כאשר $\sigma_d = \zeta\omega_n$.

- ניתן לראות כי אם $P \gg \zeta\omega_n$ ($\beta \gg 1$), אזי האקספוננט השייך ל- P דועך מהר יותר, ולאחר דעיכתו האקספוננט השני יקבע את צורת התגובה. עבור $P \ll \zeta\omega_n$ המקרה הפוך.
- ניתן לבטא זאת באמצעות קבועי זמן: הגורם של הקוטב $(-P)$ דועך עם קבוע זמן $\tau_P = \frac{1}{P}$, ואילו זה הקשור לקטבים המרוכבים דועך עם קבוע זמן $\tau_d = \frac{1}{\zeta\omega_n}$. הגורם עם קבוע הזמן הקצר יותר דועך מהר יותר.
- בנוסף לכך, ניתן לראות כי בפרוק לשברים חלקיים, הקטבים בעלי קבוע זמן איטי יותר הם גם בעלי מקדמים A_i גדולים יותר (בערך מוחלט), ובהתאם השפעתם על התגובה דינאמית גדולה יותר.

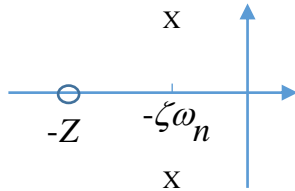
מסקנה מהדיון עד כה: **הקטבים שחלקם הממשי ממשי קרוב יותר לציר המדומה הם הדומיננטיים יותר בקביעת צורת התגובה.**

8.4. השפעת אפס נוסף

נתבונן עתה במערכת עם תוספת אפס אחד (גורם מסדר ראשון במונה) :

$$T(s) = T_0(s) \left(1 + \frac{s}{Z}\right) = \frac{\omega_n^2(1 + s/Z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

כאשר $Z > 0$. נשים לב כי האפס הנוסף הוא בנקודה $z_1 = -Z$.



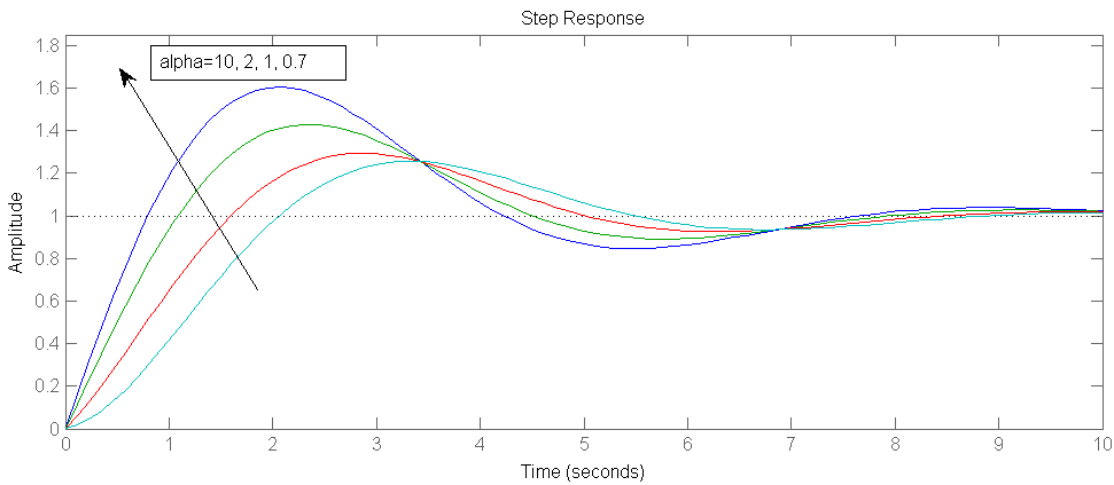
מפת הקטבים והאפסים של פונקציית התמסורת שקיבלנו :

גם פה נווח להתייחס לערך היחס של האפס הנוסף. נגדיר

$$\alpha = \frac{Z}{\zeta\omega_n}$$

ככל ש- α גדול יותר, כך האפס הנוסף בנקודה $(-Z)$ רחוק יותר שמאלה מהראשית.

התגובה המתקבלת עבור ערכים שונים של α :



ניתן לראות כי :

- עבור $\alpha \gg 1$ ($\alpha = 10$ בציור), התגובה זהה למעשה לזו של $T_0(s)$. כלומר: השפעת האפס הנוסף זניחה.
- ככל ש- α קטן, השפעתו של האפס גדלה. השפעה זו מתבטאת בעיקר בהגדלת הערך של תגובת היתר.

הסבר : ניתן להבין את השפעת האפס הנוסף בשתי דרכים, כאשר השניה מדויקת יותר.

הסבר 1 (חלקי) : פרוק לשברים חלקיים. תוספת האפס אינה משנה כמובן את קוטבי המערכת. הפרוק לשברים חלקיים יישאר מהצורה :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2(1+s/Z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} \right\} = \dots = 1 + Ae^{-\sigma t} \sin(\dots)$$

כאשר ההשפעה היא על המקדמים (A_i) בלבד, דרך ההכפלה בגורם הנוסף $(1 + p_i / Z)$. ניתן לראות כי השפעה זו זניחה כאשר $Z \gg |\text{Re}(p_i)|$, וגורמת להגדלתם אחרת.

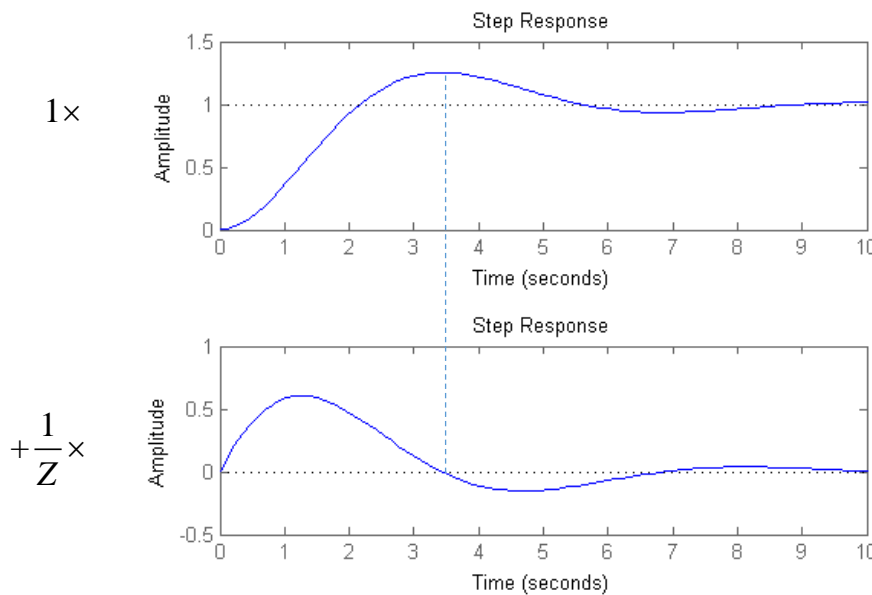
הסבר 2. נשים לב כי פונקציית התמסורת עם האפס ניתנת לפרוק הבא :

$$T(s) = T_0(s) \left(1 + \frac{s}{Z}\right) = T_0(s) + \frac{s}{Z} T_0(s)$$

נסמן את התגובה למדרגה של $T_0(s)$ (המערכת המקורית) ב- $y_0(t)$. כיוון ש- s מתאים לגוזר בתחום הזמן, הרי שהתגובה למדרגה של המערכת $T(s)$ תהיה

$$y(t) = y_0(t) + \frac{1}{Z} \dot{y}_0(t)$$

(כאשר \dot{y}_0 היא למעשה התגובה להלם). לאחר גזירת $y_0(t)$ תתקבל התמונה הבאה :



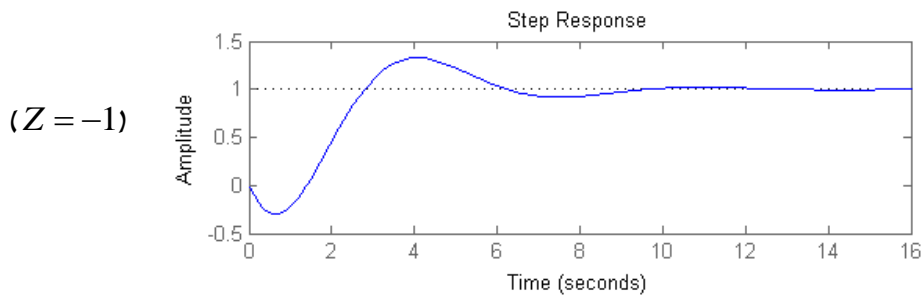
ניתן לראות כי :

- השפעת האפס קטנה ככל ש- Z גדל.
- בנקודת המכסימום של $y_0(t)$ לא יהיה שינוי ערך התגובה (השוו לציור הקודם).

מסקנה מהדיון בהשפעת האפס : האפס משפיע על מקדמי האקספוננטים אך לא על קבועי הזמן שלהם. השפעתו משמעותית אם הוא קרוב לציר המדומה ביחס לקטבים, וזניחה אם הוא רחוק יותר מהם.

הערה לגבי אפסים בחצי המישור הימני :

כאשר $Z < 0$, האפס $z_1 = -Z$ מתקבל בחצי המישור הימני. (מערכת בעלת אפסים בחצי המישור הימני נקראת "לא מינימום-פאזה"). במקרה זה הנגזרת נוספת עם סימן שלילי (מתחסרת), ובתגובה למדרגה מתקבלת תגובה ראשונית שלילית (הפוכה לכיוון הכניסה).



תופעה זו מתקיימת באופן כללי כאשר קיים בצד ימין של המישור המרוכב. ניתן להראות זאת כך :
נניח כי

$$T(s) = T_0(s) (1 - s/b)$$

כאשר $b > 0$, ו- $T_0(s)$ פונקצית תמסורת יציבה.

$$Y(s) = \frac{1}{s} T_0(s) (1 - s/b) \quad \text{התגובה למדרגה } y(t) \text{ מקיימת :}$$

$$Y(b) = 0 \quad \text{ולכן (נשים לב ש- } b \text{ בתחום ההתכנסות) :}$$

$$Y(b) = \int_0^\infty e^{-bt} y(t) dt \quad \text{מצד שני, לפי הגדרת התמרת לפלס :}$$

כדי שאינטגרל זה יתאפס, $y(t)$ חייב לקבל גם ערכים שליליים.

מערכת יציבה ללא אפסים ביצי המישור הימני נקראת מינימום פאזה (הגדרה זו ניתנה ע"י בודה).

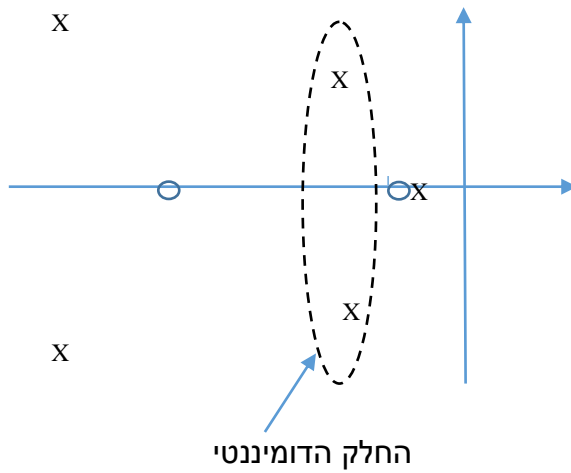
8.5. קירוב התגובה הדומיננטית

בעמודים הקודמים ראינו כי ההשפעה העיקרית על התגובה הדינאמית של מערכת יציבה היא של הקטבים והאפסים הקרובים יותר לציר $j\omega$. בנוסף לכך, צמדים של אפסים וקטבים המצטמצמים בקירוב יהיו גם הם בעלי השפעה קטנה (ניתן לראות זאת באפוף הפשוט ביותר בהשפעתם הקטנה על דיאגרמת בודה).

בהתאם לכך, נגדיר את **הקטבים והאפסים הדומיננטיים** של התגובה כלהלן:

1. נבחר מספר קטבים (אחד או שניים) שהם הקרובים ביותר לציר, מבין אלה שאינם מצטמצמים בקירוב עם האפסים.
2. קוטבים ואפסים הרחוקים משמעותית (נניח, פה 5 או יותר) מהציר המדומה יחסית לקטבים הנ"ל יבוטלו.
3. קטבים ואפסים המצטמצמים בקירוב יבוטלו גם הם.

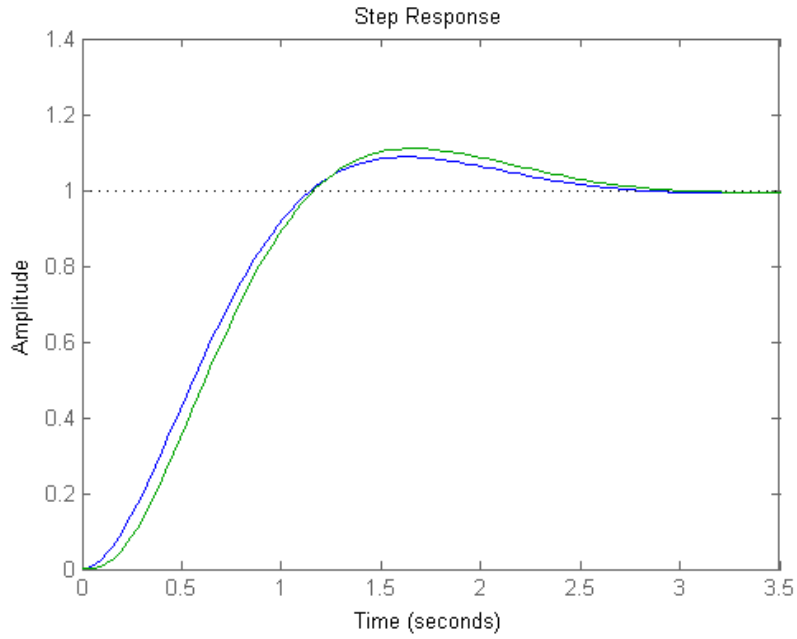
הקבוצה הנותרת של קטבים ואפסים הוא החלק הדומיננטי של המערכת. התגובה למדרגה המתקבלת עבור מערכת ממושטת זו הינה התגובה הדומיננטית, ואמורה לתת קרוב ראשוני טוב לתגובה המלאה.



לדוגמא:

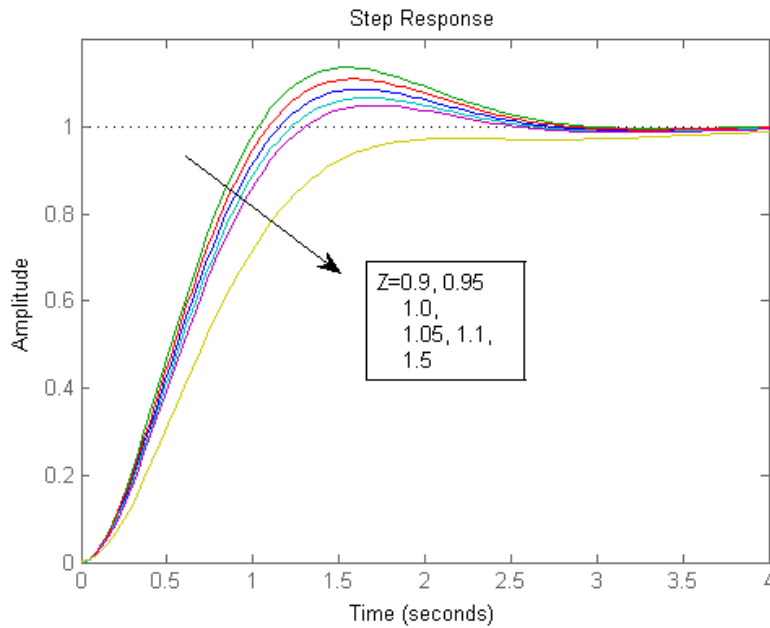
דוגמא (מוצלחת) :

$$T(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 6} \cdot \frac{10(s + 20)}{s^2 + 25s + 200} \cdot \frac{1 + s/0.95}{s + 1}, \quad T_0(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 6}$$

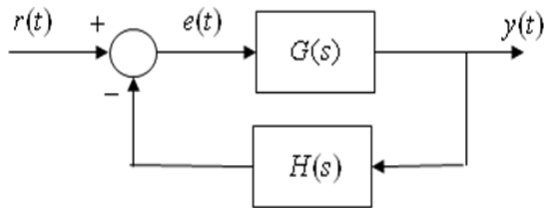


ביטול אפס וקוטב :

$$T(s) = \frac{6}{(s^2 + 3s + 6)} \frac{1 + s/Z}{1 + s}$$



הרצאה 9: קריטריון נייקוויסט ליציבות מערכות משותף



בהרצאה קודמת ראינו כי יציבות (פנימית) של מערכת המשוב הבסיסית שבציור שקולה לדרישות הבאות:

1. שרשי המשוואה האופיינית $1 + G(s)H(s) = 0$

כולם "יציבים" (בחצי המישור השמאלי הפתוח).

2. אין צמצום של אפס וקוטב "לא יציבים" במכפלה $G(s)H(s)$.

באם נתונות פונקציות התמסורת $G(s), H(s)$ בצורה מפורשת, ניתן לבדוק את יציבות פתרונות המשוואה האופיינית בצורה אלגברית (למשל בעזרת קריטריון רות-הורביץ). בהרצאה זו נתאר בדיקת יציבות חלופית, קריטריון נייקוויסט, אשר מסתמכת ישירות על תגובות התדר $G(j\omega), H(j\omega)$.

התובנה מאחורי הקריטריון הינה כלהלן: ראינו כי יתרונות המשוב השלילי מתקבלים כאשר הגבר החוג $|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$. עם זאת, לתמסורת זו יש פאזה שונה מ-0, ובתדר שבו הפאזה מגיעה ל- 180° , המשוב השלילי הופך למשוב חיובי. אם הגבר החוג בתדר זה גדול מ-1, תתקבל הגברה חוזרת של אות המשוב שתוביל לאי-יציבות. קריטריון נייקוויסט מעמיד אבחנות אלו על בסיס מתמטי מוצק.

קריטריון נייקוויסט הינו בעל חשיבות במספר היבטים:

1. במקרים בהם תגובות התדר של המערכת המבוקרת או החיישן נמדדת ישירות, ניתן להפעיל את הקריטריון ללא צורך "להתאים" לתגובת התדר פונקציית תמסורת מקורבת.
2. קריטריון נייקוויסט ישים גם כאשר פונקציית התמסורת כוללת השהיה טהורה (או אף תמסורת לא-רציונאלית אחרת). במקרים אלה פתרון המשוואה האופיינית מסתבך המידה ניכרת.
3. ההתבוננות בתחום התדר מובילה לתובנות חשובות לגבי התכונות הנדרשות מתמסורת החוג $G(j\omega)H(j\omega)$. בפרט נתעכב בהמשך על המושגים של עודף הפאזה ועודף ההגבר, שהם מהיסודיים בכל מערכת בקרת-משוב.

קריטריון היציבות של נייקוויסט הוצג לראשונה (בגרסה פחות כללית מהנוכחית) במאמר

- *H. Nyquist, "Regeneration Theory". Bell System Technical Journal, January 1932.*
המוטיבציה לפיתוחו היתה הצורך בניתוח יציבות של מגברי משוב, ששימשו להגברת אות בכבלי טלפון ארוכים.
ד"ר הארי נייקוויסט היה חוקר ומהנדס חשמל אמריקאי ממוצא שוודי, שעבד במעבדות AT&T (בהמשך מעבדות Bell). הוא תרם תרומות יסודיות בנושאים של רעש תרמי, תורת התקשורת, ומערכות משוב.

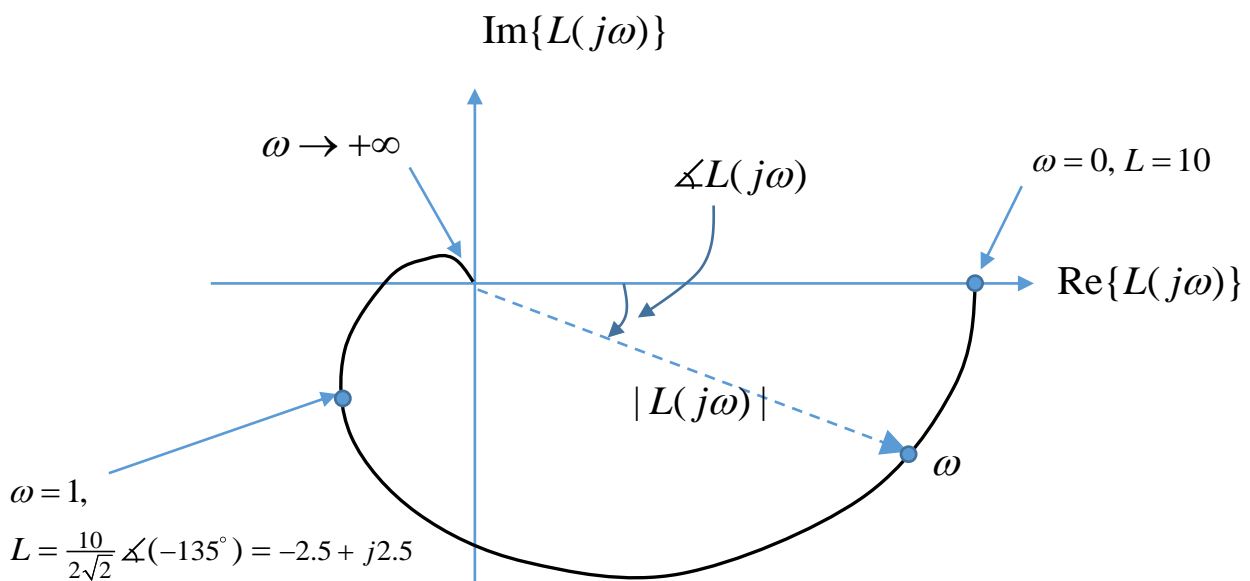
9.1 דיאגרמת נייקויסט

דיאגרמת נייקויסט מהווה תיאור גרפי של תגובת התדר, באופן שונה מדיאגרמת בודה. דיאגרמת בודה מציגה גרפים נפרדים עבור ההגבר והפאזה, כתלות בתדר. דיאגרמת נייקויסט מהווה תיאור פולארי משולב של ההגבר והפאזה, במישור המרוכב, כאשר התדר משמש כפרמטר.

דיאגרמת נייקויסט מצוירת לרוב עבור תמסורת החוג $L = GH$. באופן כללי, אנו מתייחסים לתגובת תדר נתונה $L(j\omega)$, $\omega \geq 0$. לכל תדר ω , הינו מספר מרוכב שניתן לציירו כנקודה במישור המרוכב, כאשר הצירים הם החלק הממשי והמדומה. עקום נייקויסט הינו העקום המתקבל באופן זה כאשר התדר משתנה מ-0 עד ∞ .

להלן הדיאגרמה המתקבלת עבור

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3} \Rightarrow L(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)^3}$$

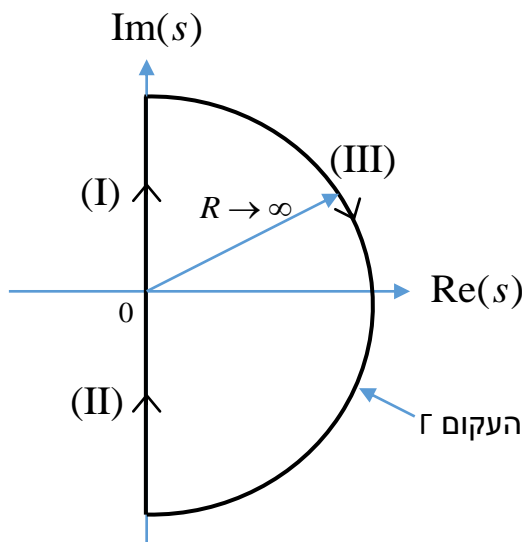


דיאגרמת נייקויסט (השלמה, ראו להלן) מתקבלת במטלב ע"י הפקודה $Nyquist(L)$. ציור ידני מקורב ניתן לקבל:

1. על ידי חישוב וציור ערכים עבור ערכי תדר מייצגים.
2. בעזרת דיאגרמת בודה.
3. (עם מעט ניסיון): באופן ישיר מתוך פונקציית התמסורת $L(s)$, ע"י הבנת לאחר הבנת הקטבים והאפסים על הדיאגרמה.

9.2. עקום נייקויסט השלם

קריטריון היציבות של נייקויסט מבוסס על ציור העקום המתואר על ידי $\{L(s) : s \in \Gamma\}$, כאשר Γ הוא עקום סגור המקיף את חצי המישור המרוכב הימני (בכיוון השעון). במונחים של פונקציות מרוכבות, זוהי ההעתקה של Γ באמצעות הפונקציה המרוכבת $L(s)$.



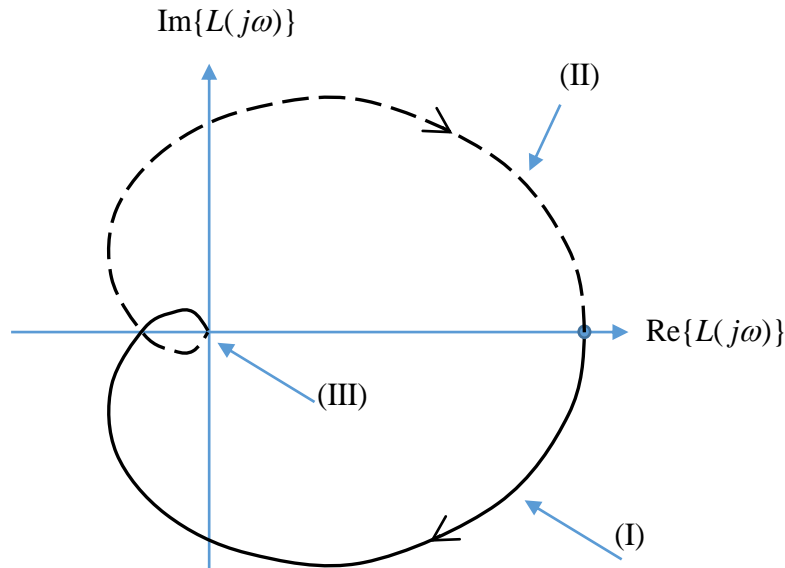
העקום Γ מוראה בציור:

כאמור זהו עקום סגור המקיף את חצי המישור הימני בכיוון השעון. נוח לחלקו לשלושה קטעים:

- (I): $s = j\omega, \quad \omega: 0 \rightarrow +\infty$
- (II): $s = j\omega, \quad \omega: -\infty \rightarrow 0$
- (III) חצי עיגול בעל רדיוס אינסופי

עקום נייקויסט השלם, $\{L(s) : s \in \Gamma\}$, הינו כאמור עקום סגור במישור המרוכב, המתאר את השתנות $L(s)$ כאשר s משתנה לאורך העקום Γ .

עקום נייקויסט השלם המתקבל עבור הדוגמה הקודמת: $L(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$



באופן כללי:

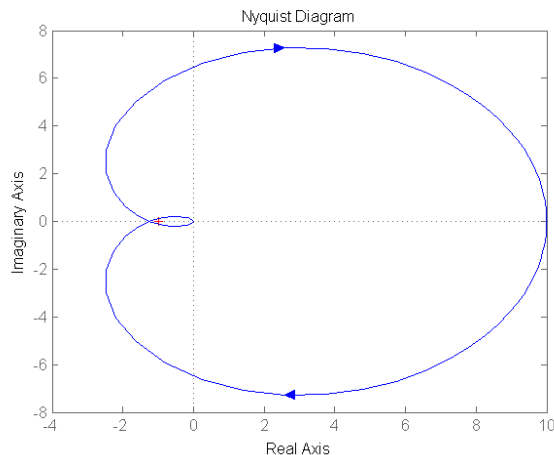
- חלק (I): הציור עבור החלק החיובי של ציר $j\omega$ הינו למעשה דיאגרמת נייקויסט (החלקית) של תגובת התדר, שתוארה בסעיף הקודם.
- חלק (II): עקב $L(-j\omega) = L(j\omega)^*$, חלק העקום עבור קטע (II) הינו תמונת ראי של חלק (I). בציור ידני מקובל לקווקו חלק זה. יש להקפיד על סימון הכיוון (מתדר $\omega = -\infty$ לכיוון $\omega = 0$)
- חלק (III): כאשר המערכת נאותה ממש, חלק זה של העקום מתנוון לנקודת בודדת בראשית:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} L(Re^{j\phi}) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} L(s) = 0$$

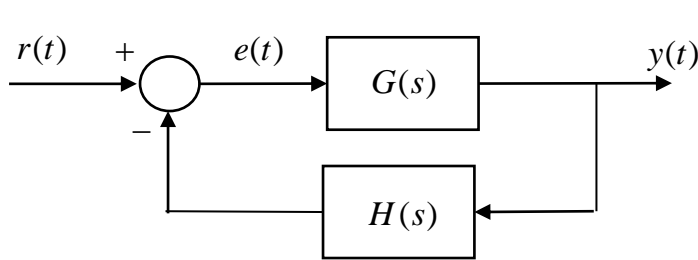
כאשר המערכת נאותה אך לא ממש, עדיין חלק (III) יתנוון לנקודה בודדת, אם כי לא בראשית.

ציור מטלב עבור הדוגמה שלעיל:

```
>> L=zpk([], [-1 -1 -1], 10);
>> nyquist(L)
```



9.3. קריטריון היציבות של נייקויסט



נחזור למערכת המשוב הבסיסית:

פונקציית התמסורת:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

נניח פה כי במכפלה $G(s)H(s)$ אין צמצומי קטבים ואפסים בחצי המישור הימני (במקרה זה המערכת אינה יציבה).

בהנחה זו, החוג הסגור יציב אם ורק אם פתרונות המשוואה האופיינית $1 + L(s) = 0$ כולם בחצי המישור השמאלי הפתוח.

כזכור אנו מתייחסים לפתרונות המשוואה האופיינית כ"קטבי החוג הסגור".

משפט נייקויסט.

נניח (לעת עתה) כי:

א. לתמסורת החוג $L(s)$ אין קטבים על הציר המדומה

ב. עקום נייקויסט השלם של תמסורת החוג $L(s)$ אינו עובר דרך הנקודה (-1).

אזי מתקיים:

$$P_c = P_o + N_{cw}$$

כאשר:

P_c : מספר קטבי החוג הסגור (פתרונות המשוואה האופיינית $1 + L(s) = 0$) הנמצאים בחצי המישור הימני הפתוח.

P_o : מספר הקטבים של תמסורת החוג $L(s) = G(s)H(s)$ בחצי המישור הימני הפתוח.

N_{cw} : מספר ההקפות שמקיף עקום נייקויסט השלם את הנקודה (-1), בכיוון השעון (CW). * הקפות נגד כיוון השעון נספרות מספר שלילי.

הערות למשפט:

- ה"ינעלם" פה הוא P_c . החוג הסגור יציב אם $P_c = 0$.
- את P_o ניתן לקבל ישירות כאשר נתונה תמסורת $L(s) = G(s)H(s)$. בפרט, $P_o = 0$ כאשר $G(s), H(s)$ יציבים.
- N_{cw} הוא הגודל המתקבל מתוך הדיאגרמה.

הוכחה (עקרונית):

ההוכחה מתקבלת בעזרת הגרסה הבאה של עקרון הארגומנט של קושי מתורת הפונקציות המרוכבות.

תהי $F(s)$ פונקציה מרוכבת (נניח רציונאלית לשם פשטות). יהי Γ עקום סגור המקיף בכיוון השעון תחום D במישור המרוכב, אשר אינו עובר דרך קטבים או אפסים של $F(s)$. נשרטט את העקום הסגור המתקבל ע"י העתקה של Γ באמצעות $F(s)$:

$$F(\Gamma) \triangleq \{F(s) : s \in \Gamma\} \text{ אזי}$$

$$N = Z - P$$

מספר הקטבים של $F(s)$ בתוך Γ	-	מספר האפסים של $F(s)$ בתוך Γ	=	מספר ההקפות של $F(\Gamma)$ מסביב לראשית בכיוון השעון
-------------------------------------	---	-------------------------------------	---	--

נבחר $F(s) = 1 + L(s)$, $D = \text{חצי המישור הימני}$, ואילו Γ הינו העקום שמקיף את חצי המישור הימני כפי שהוגדר עבור עקום נייקויסט השלם. נקבל:

$$N = Z - P$$

מספר הקטבים של $1 + L(s)$ בחצי המישור הימני	-	מספר האפסים של $1 + L(s)$ בחצי המישור הימני	=	מספר ההקפות של העקום $\{1 + L(s) : s \in \Gamma\}$ מסביב לראשית בכיוון השעון
---	---	---	---	--

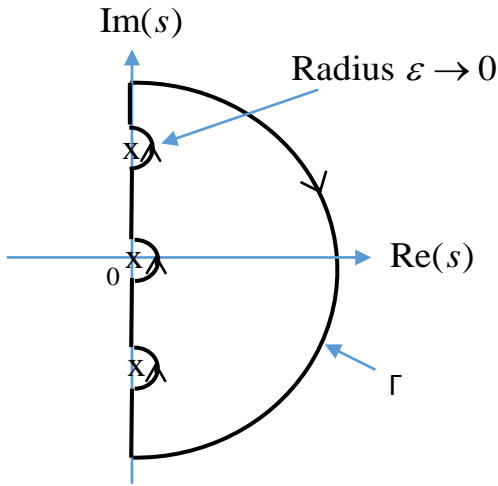
ניתן עתה בקלות לזהות גדלים אלה כגדלים שהוגדרו במשפט, ולקבל:

$$N_{cw} = P_c - P_o$$

מ.ש.ל.

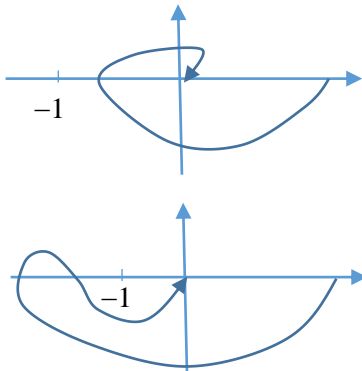
הערות נוספות:

- כאשר עקום נייקויסט עובר דרך הנקודה (-1), לחוג הסגור קוטב על הציר המדומה, כך שאינו יציב. הסיבה: $1 + L(j\omega) = 0 \Leftrightarrow L(j\omega) = -1$.
 הסיבה להחרגת מקרה זה מהמשפט היא כי מספר ההקפות סביב (-1) אינו מוגדר היטב. כדי לקבל פרטים נוספים לגבי מספר הקטבים הלא-יציבים ניתן לשנות מעט את ההגבר של $L(s)$.



- כאשר לתמסורת החוג קטבים על הציר המדומה – למשל $L(s) = \frac{1}{s}$ או $L(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ – יש לשנות את העקום Γ כך שיעקוף קטבים אלה. להפעלת המשפט על העקיפה להתבצע מימין, ברדיוס שואף ל-0, ואז וקטבים אלה אינם נספרים ב- P_o . היישום יודגם בהמשך ובתרגול.

- כאשר $P_o = 0$ (החוג הפתוח $L(s)$ יציב), הדרישה ליציבות החוג הסגור היא $N_{cw} = 0$. המשמעות לגבי עקומי נייקויסט "פשוטים" יחסית: למניעת ההקפה של (-1) יש לוודא שההגבר בתדר שבו $\angle L(j\omega) = -180^\circ$ יהיה קטן מ-1.

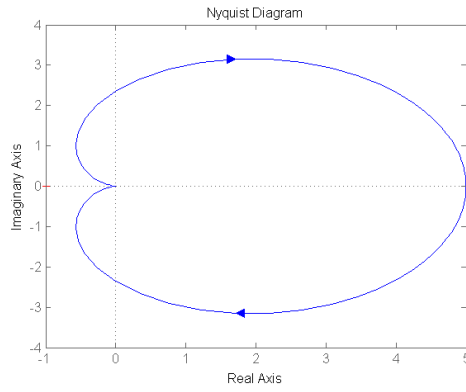


עם זאת, יש לשים לב שייתכנו גם מקרים מורכבים יותר:

9.4. דוגמאות

$$L(s) \equiv G(s)H(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

דוגמא 1:



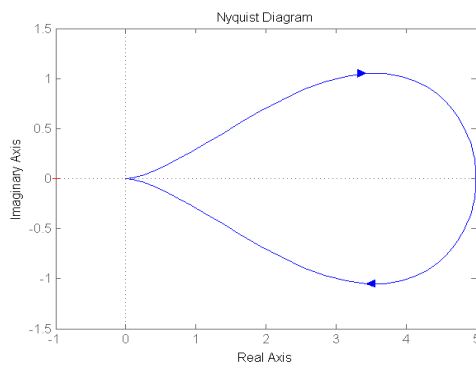
$$P_o =$$

$$N_{cw} =$$

$$P_c =$$

$$L(s) = \frac{-10}{(s+1)(s-2)}$$

דוגמא 2:



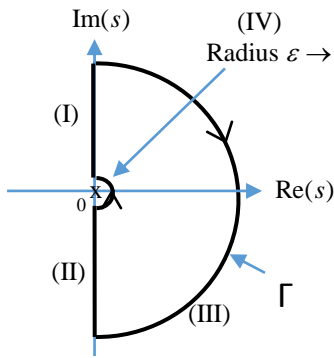
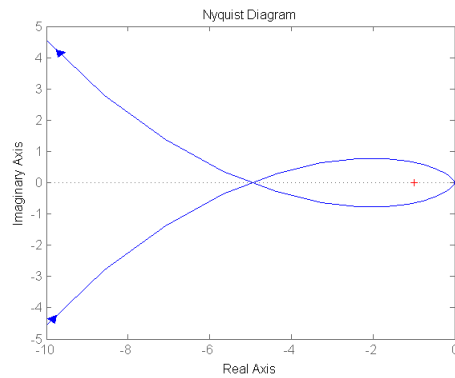
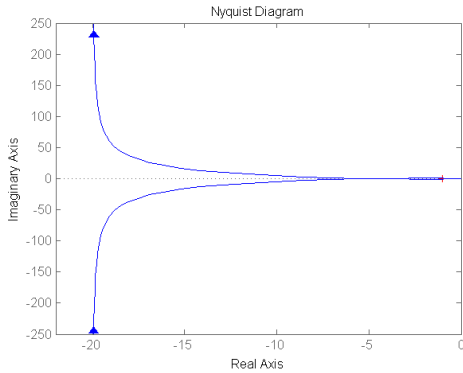
$$P_o =$$

$$N_{cw} =$$

$$P_c =$$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

דוגמא 3 (קוטב על הציר המדומה):



פה קיים קוטב ב- $s = 0$, וציור המטלב אינו נותן את מלוא התמונה. העקום Γ נדרש עתה לעקוף את הקוטב בראשית.

העקיפה הנדרשת מסומנת כקטע (IV) בציור. כדי לקבל את העתקת קטע זה נרשום אותו באופן הבא:

$$(IV): s = \epsilon e^{j\theta}, \quad \theta: -90^\circ \xrightarrow{\text{ccw } (0^\circ)} +90^\circ$$

הצבה ב- $L(s)$ עבור ϵ קטן נותנת:

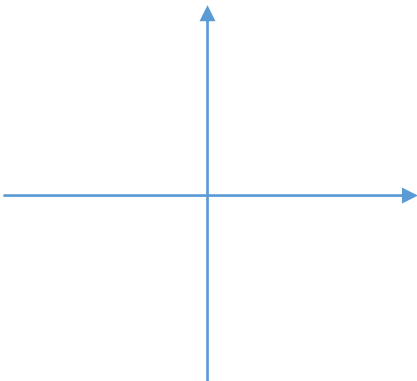
$$L(\epsilon e^{j\theta}) \approx \frac{10}{s} \Big|_{s=\epsilon e^{j\theta}} = \frac{10}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

עבור $\epsilon \rightarrow +0$ נקבל חצי-מעגל ברדיוס אינסופי, בעל פאזה המשתנה באופן הבא:

$$(-\theta): +90^\circ \xrightarrow{\text{cw } (0^\circ)} -90^\circ$$

(באופן כללי, כל קוטב בראשית "תורם" חצי מעגל אינסופי נוסף).

עקומת נייקויסט המלאה היא לפיכך:



$$P_o =$$

$$N_{cw} =$$

$$P_c =$$

חישוב נקודות החיתוך עם הציר הממשי:

לערך נקודות החיתוך עם הציר הממשי (ובפרט מיקומן ביחס לנקודה -1) חשיבות רבה בקביעת מספר ההקפות סביב (-1).

נקודות אלו מאופיינות על-ידי: $\text{Im}\{L(j\omega)\} = 0$

או: $\angle L(j\omega) = -180^\circ$

לפיכך, חישוב ידני של נקודות אלו ניתן לבצע על ידי:

א. חיפוש נומרי של התדר שבו מתקבל אחד מהתנאים הנ"ל.

ב. מדיאגרמת בודה (בקרוב): הערכת התדר שבו $\angle L(j\omega) = -180^\circ$ מתוך דיאגרמת הפאזה.

ג. חישוב מקורב מתנאי הפאזה ע"י קרובי טנגנס הפוך (בתרגול).

ד. חישוב אנליטי מדויק – במקרים מיוחדים.

המשך דוגמא 3: נדגים את החישוב האנליטי בדוגמא זו.

$$\text{Im}\{L(j\omega)\} = \text{Im}\left\{\frac{10}{j\omega(j\omega+1)^2}\right\} = \text{Im}\left\{\frac{10(-j\omega)(1-j\omega)^2}{\dots}\right\} = 0 \quad \text{א.}$$

$$\Rightarrow \omega^2 - 1 = 0, \quad \omega = 1$$

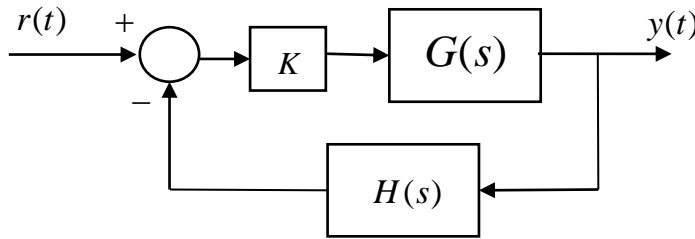
$$L(j1) = -5$$

$$\angle L(j\omega) = -90^\circ - 2 \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) = -180^\circ \quad \text{ב.}$$

$$\omega = \tan(45^\circ) = 1$$

9.5. קריטריון נייקויסט עם פרמטר הגבר

נתבונן במערכת המשוב עם הגבר K , אליו נתייחס כפרמטר הניתן לשינוי. אנו מעוניינים למצוא מהם תחומי ההגבר K שעבורם המערכת יציבה.



$$L(s) = KG(s)H(s)$$

איננו מעוניינים כמובן לצייר דיאגרמת נייקויסט נפרדת של $L(s)$ לכל ערך של K . ואכן קיימת דרך פשוטה בהרבה:

נשים לב כי מספר ההקפות של הנקודה (-1) על ידי העקום $L(s) = KG(s)H(s) |_{s \in \Gamma}$ זהה למספר ההקפות של הנקודה $(-\frac{1}{K})$ על ידי העקום $G(s)H(s) |_{s \in \Gamma}$. לפיכך ניתן להפעיל את קריטריון נייקויסט כך:

- א. נשרטט עקום נייקויסט עבור $G(s)H(s)$ בלבד ($K = 1$).
- ב. נחשב

$$P_c = P_o + N_{cw}$$

כאשר:

P_c : מספר הפתרונות של המשוואה האופיינית $1 + KG(s)H(s) = 0$ (דהיינו: קטבי החוג

הסגור עם הגבר K) בחצי המישור הימני הפתוח.

P_o : ללא שינוי: קטבי $G(s)H(s)$ בחצי המישור הימני הפתוח.

N_{cw} : מספר ההקפות בכיוון השעון שמקיף עקום נייקויסט השלם של $G(s)H(s)$ את הנקודה

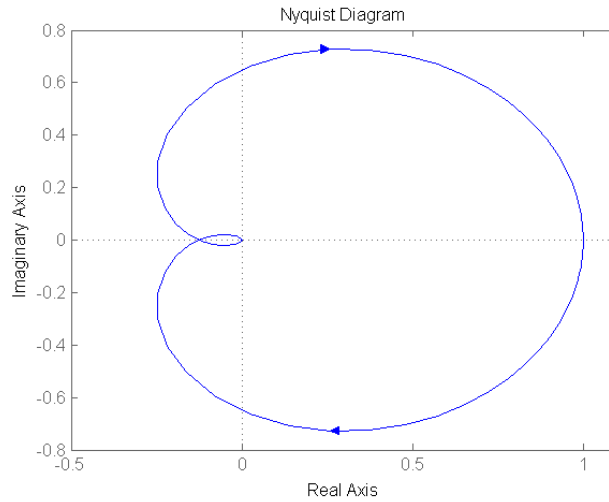
$$(-\frac{1}{K})$$

קריטריון זה תקף עבור ערכי K חיוביים ושליילים כאחת.

דוגמא 4 (קריטריון נייקויסט עם פרמטר הגבר):

$$L(s) = KG(s)H(s) = K \frac{1}{(s+1)^3}$$

עקום נייקויסט של $G(s)H(s)$:



חישוב נקודת החיתוך עם הציר הממשי:

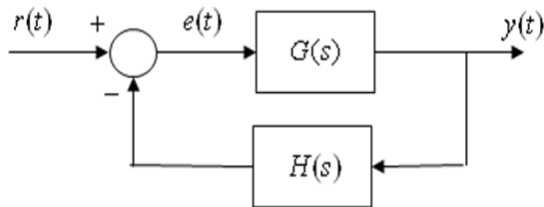
$$\angle GH(j\omega) = -3 \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) = -180^\circ \Rightarrow \omega_0 = \tan(60^\circ) = \sqrt{3}, \quad GH(j\omega_0) = -\frac{1}{8}$$

עקב $P_0 = 0$ מתקיים פה $P_c = N_{cw}$. נמצא את N_{cw} (מספר ההקפות סביב $-\frac{1}{K}$) עבור כל הערכים האפשריים של K .

- a. $-\frac{1}{K} < -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 0 < K < 8, \quad P_c = N_{cw} = 0$
- b. $-\frac{1}{8} < -\frac{1}{K} < 0 \Leftrightarrow K > 8, \quad P_c = N_{cw} = 2$
- c. $0 < -\frac{1}{K} < 1 \Leftrightarrow K < -1, \quad P_c = N_{cw} = 1$
- d. $-\frac{1}{K} > 1 \Leftrightarrow -1 < K < 0, \quad P_c = N_{cw} = 0$

בדיקה: השוו תוצאות אלו עם המתקבלות בעזרת קריטריון רוט-הורביץ.

הרצאה 10: שולי היציבות – עודף פאזה ועודף הגבר



אנו ממשיכים את הדיון במערכת המשוב הבסיסית, ובפרט בקשר בין תגובת התדר של מרכיבי המערכת: $G(j\omega)$, $H(j\omega)$ לבין תכונות מערכת המשוב (בחוג סגור).

בהרצאה הקודמת ראינו כי קריטריון היציבות של נייקוויסט מאפשר לקבוע את יציבות החוג הסגור מתוך תגובת התדר של תמסורת החוג: $L(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$.

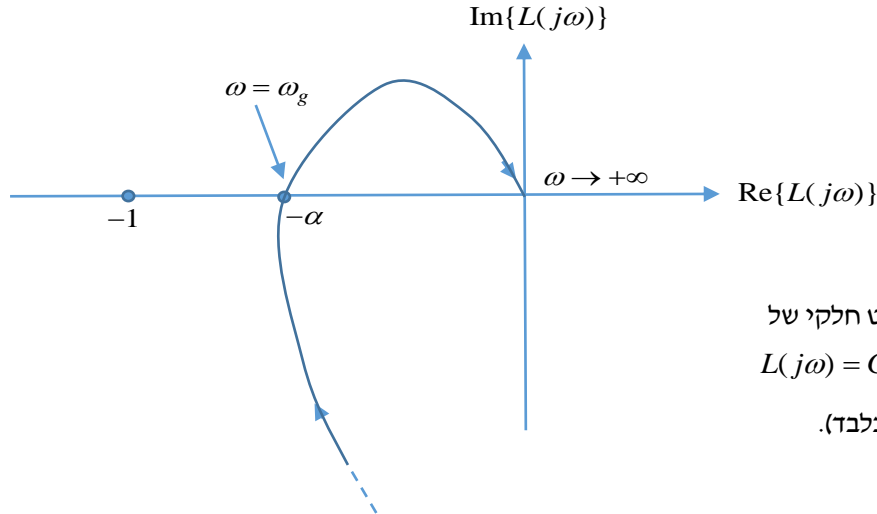
בנוסף ליציבות, במערכת מעשית חשוב לדעת מהו ה"מרחק" של המערכת מאי-יציבות. מרחק זה יכול להתבטא בשתי דרכים:

- ריסון המערכת - הנטייה לתנודות (של התגובה למדרגה למשל).
- עמידות לשינויי הפרמטרים – בכמה יכולים להשתנות פרמטרי המערכת המבוקרת (למשל ההגבר של $G(s)$) מבלי לגרום לאי-יציבות של המערכת הכוללת?

בהרצאה זו נגדיר שני גדלים חשובים - עודף ההגבר ועודף הפאזה של מערכת משוב – אשר נותנים תשובות מסוימות על שאלות אלו.

10.1. עודף הגבר (Gain Margin)

נתבונן בעקום נייקוויסט של מערכת משוב נתונה, ונתמקד בעקום סביב הציר הממשי השלילי והנקודה (-1):

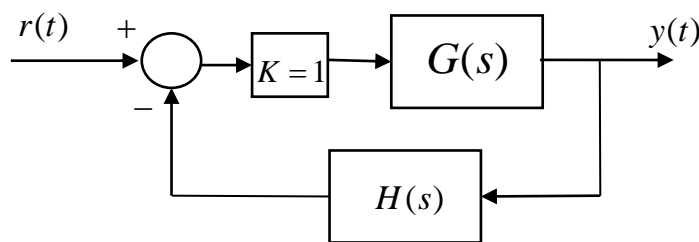


עקום נייקוויסט חלקי של
 $L(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$
 (עבור $\omega > 0$ בלבד).

נניח כי המערכת בחוג סגור יציבה. איזה שינוי בתגובת התדר של החוג $L(j\omega)$ (הגבר או פאזה) יגרום למערכת הכוללת להפוך ללא-יציבה ("לצאת מיציבות")?

נזכור כי לפי קריטריון נייקוויסט מתקיים במערכת משוב יציבה: $P_c = P_o + N_{cw} = 0$, וכן כי $P_c \geq 0$ באופן כללי. לפיכך – שינוי כלשהו של מספר ההקפות N_{cw} סביב הנקודה (-1) יגרום לאי יציבות!

נתבונן ראשית בהשפעת ההגבר K .



עד כמה ניתן להגדיל את K (מעבר ל- $K = 1$) מבלי שהמערכת תהפוך לבלתי-יציבה? זהו בדיוק הנושא של ההגדרה הבאה.

הגדרה: עודף ההגבר, שסומן g_M או $G.M.$, הוא הערך המכסימאלי שעבורו מערכת המשוב יציבה עבור כל ההגברים בתחום $1 \leq K < g_M$.

נחזור לדוגמא המצוירת לעיל. נזכור שהגדלת ההגבר פרושה "ניפוח" דיאגרמת נייקוויסט. לפיכך,

מספר ההקפות (-1) ישתנה לראשונה כאשר $K = \frac{1}{\alpha}$, וזהו בדיוק עודף ההגבר פה: $g_M = \frac{1}{\alpha}$.

ניתן לחשב את עודף ההגבר מתוך תגובת התדר באופן הבא:

$$g_M = \frac{1}{|L(j\omega_g)|} \equiv -|L(j\omega_g)|_{dB}$$

כאשר $\omega_g > 0$ התדר שבו עקום נייקוויסט חותך את הציר הממשי, כלומר התדר שבו מתקיים:

$$\angle L(j\omega) = -180^\circ$$

הערות לחישוב עודף ההגבר:

1. אם התנאי האחרון מתקיים במספר תדרים, יש להתייחס לנקודת החיתוך הסמוכה ביותר לנקודה (-1), משמאלה.

2. אם אין אף נקודת חיתוך עם הציר הממשי ~~משמאל~~ השלילי מימין לנקודה (-1), אזי $g_M = \infty$ (כלומר: המערכת יציבה לכל הגבר $K \geq 1$).

הערות נוספות:

1. מההגדרה, במערכת יציבה מתקיים $g_M > 1$, או $g_M |_{dB} > 0dB$.

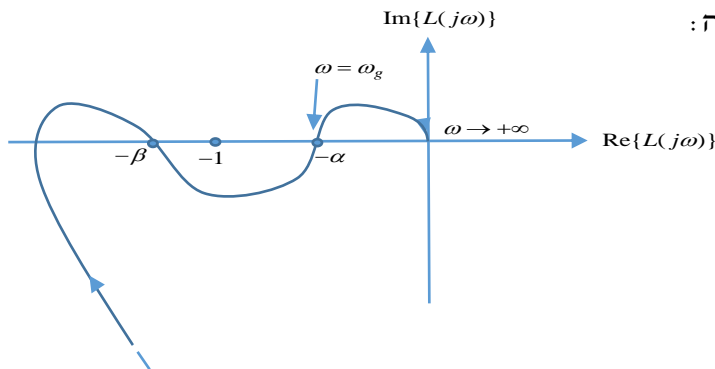
2. ערכים מקובלים לעודף ההגבר במערכות בקרה: $6-10dB$ (לפחות).

3. שולי הגבר במערכת יציבה-על-תנאי:

עד כה התמקדנו ביציאה מיציבות עקב העלאת ההגבר. מה לגבי הורדת ההגבר?

מערכות מסוימות אכן עלולות לצאת מיציבות עקב הקטנת ההגבר. בפרט, הדבר מתקיים בהכרח כאשר המערכת אינה יציבה בחוג פתוח (כלומר, ללא משוב). מערכת כזאת נקראת לעיתים "יציבה על תנאי".

נתבונן בדיאגרמת נייקוויסט הבאה:



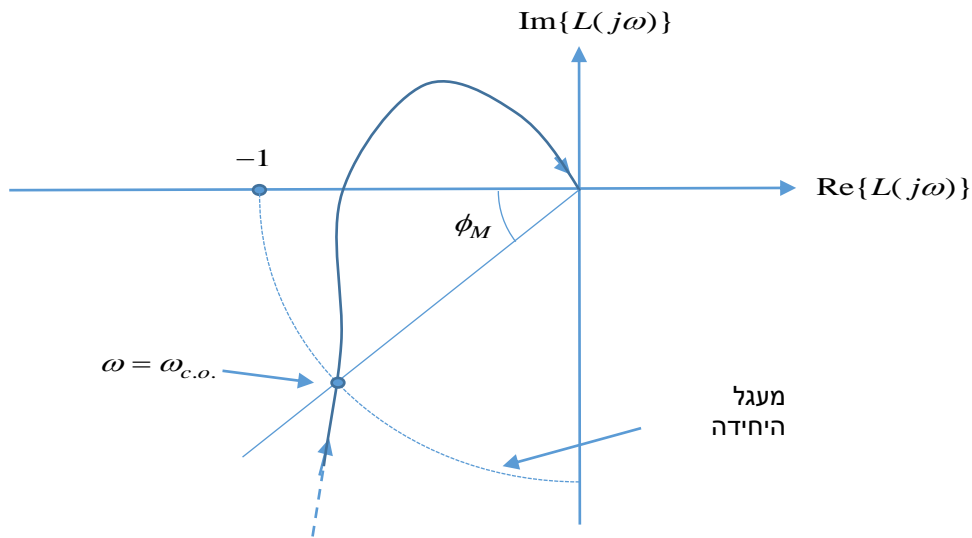
בהנחה שהמערכת יציבה עבור $K = 1$, תחום היציבות מסביב לערך זה הינו $\frac{1}{\beta} < K < \frac{1}{\alpha}$.

במקרה זה עדיין נאמר שעודף ההגבר הינו $\frac{1}{\alpha}$, כאשר הגבול התחתון יצויין במפורש.

10.2. עודף פאזה (Phase Margin)

באופן דומה, ניתן לשאול: מהו הערך המירבי של פאזה שניתן להוריד (בתדר כלשהו) מבלי שהמערכת תצא מיציבות? ערך זה נקרא **עודף הפאזה** של המערכת, ויסומן ϕ_M או $P.M.$.

נשים לב שהורדת פאזה אחידה (בכל התדרים) פרושה סבוב עקום נייבויסט בכיוון השעון. לפיכך, שינוי במספר ההקפות יתרחש כאשר הנקודה הסמוכה ל- (-1) על מעגל היחידה תגיע ל- (-1).



מכאן נקבל את ביטוי הבא עבור עודף הפאזה:

$$\phi_M = 180^\circ + \angle L(j\omega_{c.o.})$$

כאשר $\omega_{c.o.}$ התדר שבו מתקיים:

$$|L(j\omega)| = 1 \quad \text{או} \quad |L(j\omega)|_{dB} = 0_{dB}$$

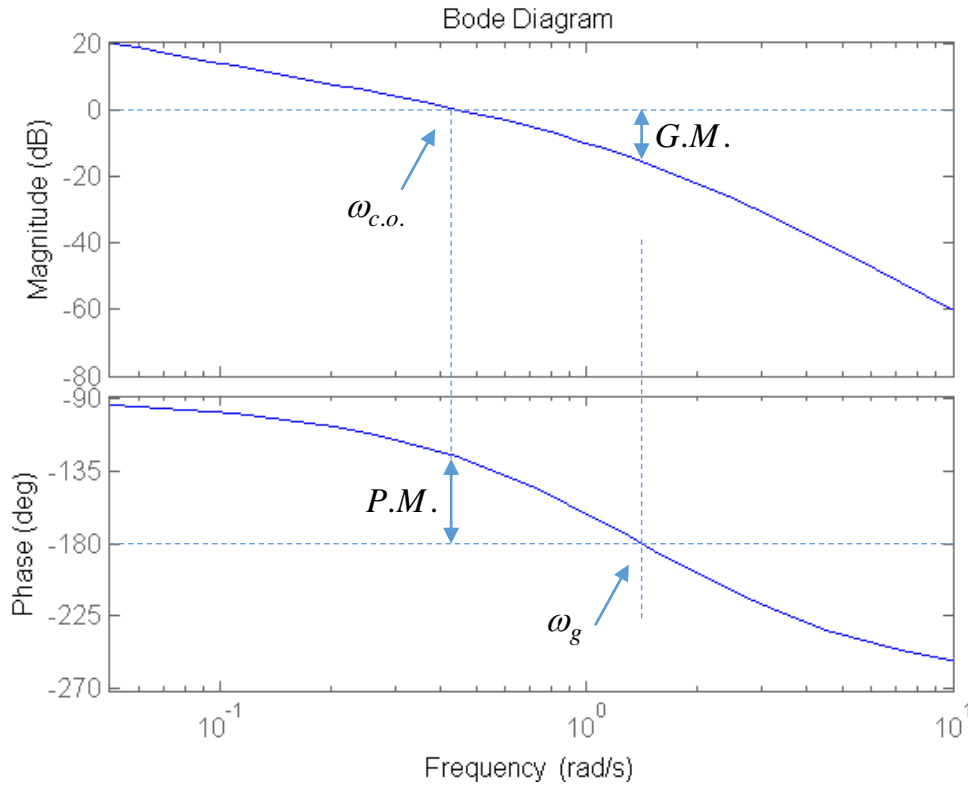
תדר זה נקרא "תדר החציה" (cross-over frequency) והוא אחד מהמאפיינים החשובים של תמסורת החוג $L(j\omega)$.

ברור מההגדרה כי $\phi_M > 0$ עבור מערכת יציבה.

במערכת בקרה טיפוסית נדרש עודף פאזה של $30^\circ - 60^\circ$ לפחות (בתלות באופי המערכת).

10.3. עודף פאזה ועודף הגבר בדיאגרמת בודה

בעוד ההבנה הבסיסית של משמעות עודף הפאזה וההגבר נובעת מדיאגרמת נייקוויסט, ניתן למוצאם ביתר קלות מתוך דיאגרמת בודה של $L(j\omega)$.



עודף הפאזה: נזהה בתרשים ההגבר את $\omega_{c.o.}$, התדר שבו ההגבר הוא 0_{dB} , ונקבל את עודף הפאזה כמרחק (במעלות) שבין הפאזה בתדר זה ל- -180° .

עודף ההגבר: נזהה בתרשים הפאזה את ω_g , התדר שבו הפאזה היא -180° , ונקבל את עודף ההגבר כ"מרחק" (ב-dB) בין ההגבר (השלילי) בתדר זה ל- 0_{dB} .

דוגמא: נתונה מערכת משוב בעלת $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $H(s) = \frac{1}{s+1}$

נדרש לחשב את עודף הפאזה ועודף ההגבר.

תמסורת החוג של המערכת $L(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$

ותגובת התדר המתאימה: $L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2}$

דיאגרמת בודה עבור מערכת זו דומה לזו המוראית בעמוד הקודם.

א. עודף פאזה:

$$\omega_{c.o.}: |L(j\omega)| = \frac{1}{\omega(1+\omega^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{c.o.} \approx 0.68 \text{ rad/s}$$

$$\angle L(j\omega_{c.o.}) = -90 - 2 \tan(0.68) = -124.2^\circ$$

$$P.M. = 180 - 124.2 = 55.8^\circ$$

ב. עודף הגבר:

$$\omega_g: \angle L(j\omega) = -90 - 2 \tan(\omega) = -180^\circ \Rightarrow \omega_g = \tan^{-1}(45^\circ) = 1_{\text{rad/s}}$$

$$|L(j\omega_g)| = \frac{1}{1(1+1^2)} = 0.5 = -6_{\text{dB}}$$

$$G.M. = \frac{1}{|L(j\omega_g)|} = 2 (= 6_{\text{dB}})$$

הערה: עבור התמסורת $L(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$, חישוב פורמאלי דומה לני"ל ייתן

$$G.M. = \frac{1}{5} < 1, P.M. = -36^\circ < 0^\circ$$

ערכים אלה מעידים על מערכת לא יציבה. בפרט, יש להקטין את ההגבל פי 5 לפחות כדי לייצב את המערכת.

10.4. הקשר בין עודף הפאזה וריסון המערכת

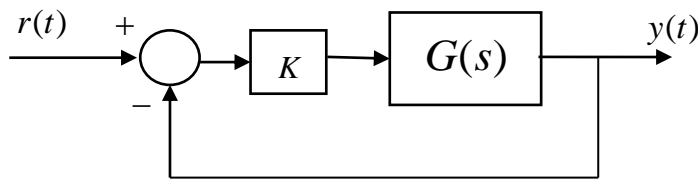
מקדם הריסון ζ מוגדר במדויק עבור מערכות מסדר שני. עם זאת, הוא מהווה מדד איכותי לתנודתיות התגובה הזמנית גם במערכות מורכבות יותר (בפרט כאלו שהן בעלות תגובה דומיננטית של מערכת מסדר שני).

מטרתנו עתה לתת קשר מקורב בין עודף הפאזה – תכונה של תמסורת החוג $L(s)$ - לבין מקדם הריסון של תגובת החוג הסגור, הנקבעת על ידי תמסורת החוג הסגור - $T(s)$. איכותית, אם נזכור כי עודף פאזה נמוך פירושו קרבה (של החוג הסגור) לחוסר יציבות, נצפה לקשר הבא:

- עודף פאזה נמוך (בכיוון 0°) ← מערכת בעלת ריסון נמוך (תגובה תנודתית)
- עודף פאזה גבוה (בכיוון $+90^\circ$) ← מערכת בעלת ריסון גבוה (תגובה מרוסנת)

כדי לתת בסיס כמותי לקשר זה, נחשבו עבור מערכת (סטנדרטית) מסדר שני, ונשתמש בקשר שנקבל גם כ"כלל אצבע" עבור מערכות כלליות יותר, לפחות בשלב התכן.

נתבונן אם כן במערכת הבאה:



$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

$$L(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad \text{תמסורת החוג:}$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K} \quad \text{תמסורת המערכת בחוג סגור:}$$

תמסורת החוג הסגור $T(s)$ היא תמסורת של מערכת סטנדרטית מסדר שני, עם פרמטרים

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad \zeta = \frac{a}{2\sqrt{K}}$$

עודף הפאזה ניתן לחישוב מפורש מתוך $L(s)$:

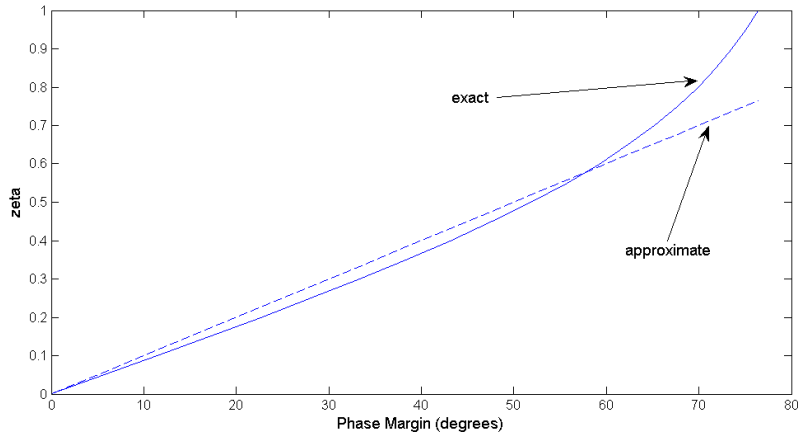
$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2 + a^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + a^2\omega^2 - K = 0 \Rightarrow \omega_{c.o.} = \dots$$

$$P.M. = 180^\circ + \angle L(j\omega_{c.o.}) = 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{c.o.}}{a}\right) = \dots$$

לאחר חישוב וסידור איברים ניתן לקבל את הקשר הבא (בתחום $0 \leq \zeta \leq 1$):

$$P.M. = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{[\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2]^{0.5}} \right)$$

קיבלנו כי עודף הפאזה ניתן לביטוי כפונקציה של ζ בלבד. ציור של פונקציה זו נותן :



ניתן לראות כי בתחום $0^\circ \leq P.M. \leq 60^\circ$ מתקיים בקירוב טוב הקשר הליניארי הפשוט :

$$\zeta \approx \frac{P.M.}{100}$$

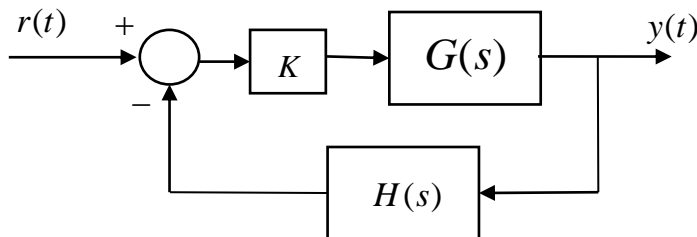
קשר מקורב זה הינו כלל האצבע שבו נשתמש גם עבור מערכות כלליות יותר.

הרצאה 11: דיאגרמת Root Locus

דיאגרמת Root Locus (R.L.) מהווה כלי נוסף להסקת תכונות מערכת משוב ישירות מתוך תמסורת החוג $G(s)H(s)$. בדיאגרמה זו אנו מתארים את המיקום הגיאומטרי (Locus) של קטבי החוג הסגור כתלות בפרמטר ההגבר K , תוך שימוש בכללים גיאומטריים פשוטים.

דיאגרמת R.L. הוצעה ע"י Walter R. Evans (1920-1999) ב-1949, והיא מהווה כלי חשוב בניתוח ותכן מערכות משוב.

אנו עוסקים במערכת המשוב הבסיסית:



ההגבר K הוא כמובן חלק מהתמסורת הקדמית, אולם פה אנו מציינים אותו בנפרד כפרמטר הניתן לשינוי. תמסורת החוג היא $L(s) = KG(s)H(s)$. פונקציית התמסורת של החוג הסגור הינה:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

עיקר עיסוקנו בהרצאה זו יהיה במיקום הקטבים של המערכת, כלומר שורשי המשוואה האופיינית $1 + KG(s)H(s) = 0$. אולם לפני כן נבדוק מיהם האפסים של $T(s)$.

11.1. מיקום האפסים של תמסורת החוג הסגור

מהתבוננות ב- $T(s)$ ברור כי האפסים של $G(s)$ הינם גם אפסים של $T(s)$. אולם עשויים להיות גם אפסים נוספים.

כדי לראות זאת, נרשום את $G(s)$ ו- $H(s)$ כמנת פולינומים:

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}, \quad H(s) = \frac{n_H(s)}{d_H(s)}$$

נניח כי אין גורמים משותפים בין המונה למכנה, וכן כי פונקציות התמסורת שונות מאפס. לאחר הצבה והכפלה נקבל:

$$T(s) = \frac{K \frac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1 + K \frac{n_G(s) n_H(s)}{d_G(s) d_H(s)}} = \frac{K n_G(s) d_H(s)}{d_G(s) d_H(s) + K n_G(s) n_H(s)}$$

מכן נקבל כי: $T(s) = 0$ אם ורק אם $n_G(s) d_H(s) = 0$.

- הערה: כדי לוודא טענה "ברורה" זו יש לוודא כי אם $n_G(s) d_H(s) = 0$ אזי המכנה שונה מאפס. בדקו זאת!

קיבלנו את המסקנה הבאה:

- אפסי פונקציית התמסורת $T(s)$ הינם: {אפסי $G(s)$ } + {קטבי $H(s)$ } ("+" במובן איחוד).

בפרט, נציין כי אפסי $T(s)$ אינם תלויים בהגבר K .

דוגמא:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}, \quad H(s) = \frac{2s+10}{s+10}$$

$$\Rightarrow T(s) = \dots$$

11.2. מיקום קטבי החוג הסגור - דוגמאות

נעבור עתה לקטבי החוג הסגור. נתחיל בשתי דוגמאות פשוטות.

$G(s) = \frac{s+1}{s+3}, \quad H(s) = 1$ דוגמא 1:

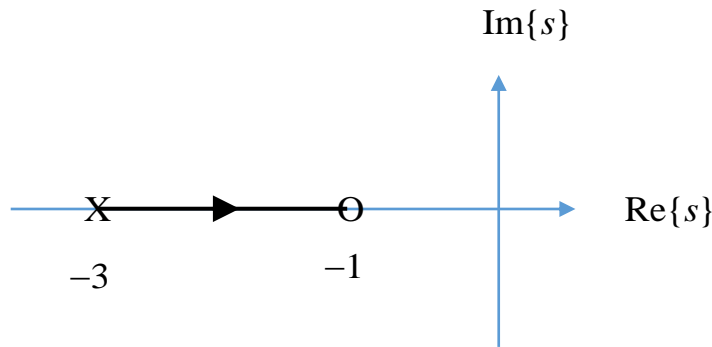
$T(s) = \frac{KG}{1+KGH} = \dots = \frac{K(s+1)}{(s+3)+K(s+1)}$ פונקציית התמסורת:

את הקטבים ניתן לקבל (גם) ישירות מהמשוואה האופיינית:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{s+1}{s+3} = 0 \Rightarrow (s+3) + K(s+1) = (1+K)s + (3+K) = 0$$

$$p^c = -\frac{3+K}{1+K}$$

נצייר את מיקום הקוטב שקיבלנו כתלות בהגבר K , כאשר K משתנה מ-0 ל- $+\infty$:

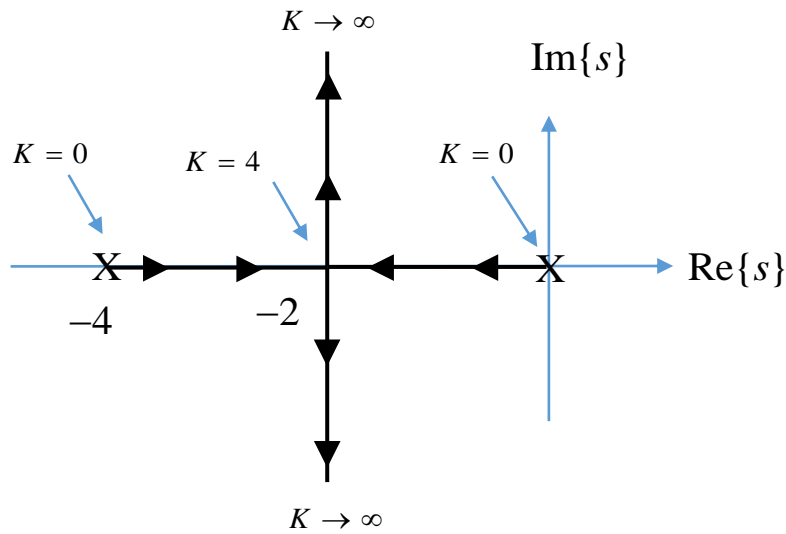


$KG(s)H(s) = K \frac{1}{s(s+4)}$ דוגמא 2:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+4)} = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + K = 0$$

קטבי החוג הסגור (שהם פתרונות המשוואה האופיינית):

$$p_{1,2}^c = \dots$$



- הצירור כולל שני "ענפים", כאשר כל ענף כזה מתאר את השתנותו של קוטב אחד, כאשר K גדל מ- 0 ל- $+\infty$.
- עבור $K \rightarrow 0$ הקטבים הם בנקודות $p_{1,2}^c = 0, -4$. אלו נקודות ההתחלה של הענפים.
- עבור $K = 4$ מתקבל קוטב כפול, $p_{1,2}^c = -2, -2$. גרפית, הענפים נפגשים בנקודה זו, ונפרדים שוב.
- עבור $K > 4$ מתקבלים שני קטבים מרוכבים.

11.3. כלל הפאזה וכלל ההגבר

מטרתנו בהמשך לפתח כללים גיאומטריים שיאפשרו לשרטט (בקרוב) את דיאגרמת מיקום השורשים גם למערכות מסובכות יותר. הבסיס לכללים אלה הם כלל ההגבר והפאזה שנתאר פה. ראשית נגדיר פורמאלית את דיאגרמת מיקום השורשים.

הגדרה: דיאגרמת מיקום השורשים (Root Locus) עבור הגבר $K > 0$ מתארת באופן גראפי את השתנות הפתרונות של המשוואה האופיינית $1 + KG(s)H(s) = 0$, כאשר ההגבר K משתנה מ- 0 עד $+\infty$.

באופן דומה ניתן להגדיר את דיאגרמת מיקום השורשים עבור $K < 0$, כלומר K משתנה מ- 0 עד $-\infty$.

נרשום את המשוואה האופיינית באופן הבא, כך שהגבר K מופרד מהתמסורת:

$$(*) \quad G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

על ידי התייחסות נפרדת לפאזה של משוואה זו, נקבל את הכלל החשוב הבא:

א. כלל הפאזה: ממשוואה (*) אנו מסיקים כי נקודה s_0 "נמצאת על ה-R.L. עבור $K > 0$ " (כלומר: מהווה שורש של המשוואה האופיינית עבור $K > 0$ כלשהו) אם ורק אם $G(s_0)H(s_0)$ הוא מספר ממשי שלילי. לפיכך:

• נקודה s_0 נמצאת על ה-R.L. (עבור $K > 0$) אם ורק אם מתקיים כי:

$$\angle G(s_0)H(s_0) = -180^\circ \pm 360^\circ \ell, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

באופן דומה:

• נקודה s_0 נמצאת על ה-R.L. (עבור $K < 0$) אם ורק אם:

$$\angle G(s_0)H(s_0) = 0^\circ \pm 360^\circ \ell, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

ב. כלל הגבר: נניח כי נקודה s_0 נמצאת על ה-R.L., כלומר מהווה שורש של המשוואה האופיינית עבור הגבר K מסוים. מהו K זה?

התשובה מיידיית: מתוך השוויון $1 + KG(s_0)H(s_0) = 0$, נקבל:

$$K = \frac{-1}{G(s_0)H(s_0)}$$

כיוון ש- K ממשי, ניתן לכתוב את ערכו גם כערך מוחלט:

$$K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} \quad \text{באם } s_0 \text{ נמצאת על ה-R.L. עבור } K > 0, \text{ אזי}$$

עבור $K < 0$ יש להוסיף כמובן סימן מינוס.

סיכום ביניים:

- כלל הפאזה מאפשר לקבוע באם נקודה נמצאת על ה-R.L. (עבור הגבר כלשהו).
- כלל הגבר מאפשר לחשב את הגבר המתאים לנקודה שנמצאת על ה-R.L.
- מסקנה מכלל הגבר: לכל נקודה s_0 על ה-R.L. מתאים הגבר אחד ויחיד.

הפרוש הגיאומטרי של כלל הפאזה: לכלל הפאזה פירוש גיאומטרי בעל חשיבות. נניח כי תמסורת החוג (ללא ההגבר K) נתונה על ידי:

$$G(s)H(s) = \frac{A(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}, \quad A > 0$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) \quad \text{לפיכך:}$$

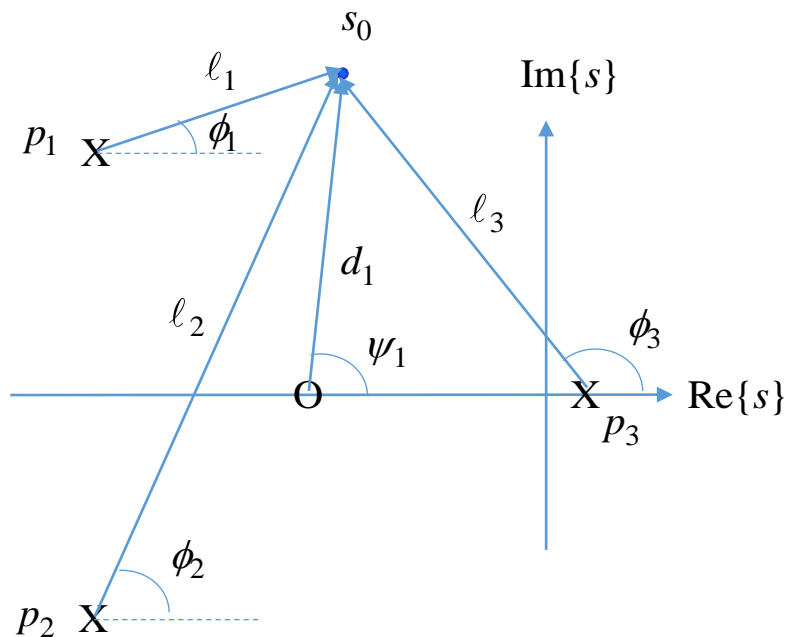
את כלל הפאזה (עבור $K > 0$) ניתן עתה לפרש באופן הבא. נקודה s_0 נמצאת על ה-RL אם ורק אם:

$$\sum_{i=1}^n \angle(s_0 - p_i) - \sum_{j=1}^m \angle(s_0 - z_j) = 180^\circ \pm 360^\circ \ell$$

אם נגדיר (עבור נקודה s_0 נתונה) $\phi_i \triangleq \angle(s_0 - p_i)$, $\psi_j \triangleq \angle(s_0 - z_j)$, נקבל את התנאי:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i - \sum_{j=1}^m \psi_j = 180^\circ \pm 360^\circ \ell$$

הפירוש הגיאומטרי של זוויות אלו מוראה בציור.



הפרוש הגיאומטרי של כלל ההגבר: לכלל ההגבר פירוש גיאומטרי דומה (אם כי חשיבותו פחותה). מכלל ההגבר נקבל (ראו הציור לעיל):

$$K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} = \frac{\prod_{i=1}^n |s_0 - p_i|}{A \prod_{j=1}^m |s_0 - z_j|} \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \ell_i}{A \prod_{j=1}^m d_j}$$

11.4. כללי שרטוט דיאגרמת Root-Locus

ראשית, יש להביא את פונקציית התמסורת של החוג ל"צורה סטנדרטית לציור RL":

$$KG(s)H(s) = K \frac{(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

נשים לב כי ההגבר הקבוע של $G(s)H(s)$ נכלל בפרמטר ההגבר K , לשם נוחיות.

המשוואה האופיינית של המערכת היא $1 + KG(s)H(s) = 0$, או בצורת פולינום:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \cdot \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

הכללים להלן מתייחסים לשתי האפשרויות:

א. שרטוט $R.L.$ עבור $K > 0$: כלומר ההגבר K משתנה מ-0 עד $+\infty$.

ב. שרטוט $R.L.$ עבור $K < 0$: כלומר ההגבר K משתנה מ-0 עד $-\infty$.

חלק מהכללים משותפים, כאשר קיימים הבדלים הם יצוינו במפורש.

כלל 1 מספר ענפי ה- $R.L.$ הוא $n_0 = \max(m, n) \equiv \max(\#p, \#z)$

השרטוט כולו הוא סימטרי ביחס לציר הממשי.

כלל 2 נקודות קצה של ה- $R.L.$:

כל ענף של ה- $R.L.$ מתחיל ($K = 0$) בקוטב שונה של החוג הפתוח (p_i) ומסתיים ($|K| \rightarrow \infty$)

באפס שונה של החוג הפתוח (z_j). כשמספר הקטבים (או האפסים) גדול ממספר האפסים (קטבים)

אזי לצורך זה האפסים וקטבים החסרים נמצאים ב- ∞ , והענף שואף לאינסוף לאורך "אסימפטוטות"

(ראו להלן).

כלל 3 ה- $R.L.$ על הציר הממשי:

עבור $K > 0$: נקודה על הציר הממשי תימצא על ה- $R.L.$ אם סכום מספר הקטבים והאפסים

הממשיים (של החוג הפתוח) מימינה הוא אי זוגי.

עבור $K < 0$: כנ"ל, עם מספר זוגי.

כלל 4 אסימפטוטות:

האסימפטוטות הן קווים ישרים (קרניים) אליהם שואפים ענפי ה- $R.L.$ ההולכים ל- ∞ .

• מספר האסימפטוטות: $N = |\#p - \#z| = |n - m|$

• זווית האסימפטוטות : $K > 0$: $\Theta = \frac{2l+1}{N} \pi \quad l = 0, 1, \dots, N-1$

$\Theta = \frac{2l\pi}{N} \quad l = 0, 1, \dots, N-1$: $K < 0$

- מפגש האסימפטוטות : כל האסימפטוטות נפגשות בנקודה אחת על הציר הממשי, שערכה :

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{\# p - \# z}$$

כלל 5 א' זווית עזיבה מקוטב מרוכב (או כניסה לאפס מרוכב) של החוג הפתוח :

$K > 0$: זווית עזיבה Φ מקוטב בנקודה s_0 : $-\Phi + \angle [GH(s_0)]^\# = \pi$

זווית כניסה Ψ לאפס בנקודה s_0 : $\Psi + \angle [GH(s_0)]^\# = \pi$

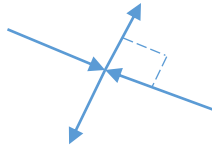
כאשר $\angle [GH(s_0)]^\#$ זו הזווית של $GH(s)$ המחושבת ב- s_0 ללא תרומת הקוטב (אפס) הנדון.

$K < 0$: כני"ל עם 0 במקום π .

כלל 5 ב' זוויות עזיבה מקוטב ממשי מרובה (או כניסה לאפס ממשי מרובה) ניתן לקבל מצירוף העובדות הבאות :

- א. קיום / אי קיום ענף של ה- $R.L.$ על הציר הממשי משני צידי הקוטב / אפס.
- ב. הזוויות בין הענפים היוצאים (נכנסים) הן שוות.
- ג. ה- $R.L.$ הינו סימטרי ביחס לציר הממשי.

כלל 5 ג' זוויות עזיבה/כניסה מקוטב/אפס ממשי בעל ריבוי 1 : הכניסה היציאה תמיד לאורך הציר הממשי (זווית 0 או 180 מעלות), הכיוון מתקבל מכלל 3 ($R.L.$ על הציר הממשי).



כלל 6 נקודות פיצול של ה- $R.L.$:

נקודת פיצול היא נקודה בה נפגשים שני ענפים (או יותר) של ה- $R.L.$.
 בד"כ נקודות הפיצול יהיו על הציר הממשי.
 נקודות אלו מתקבלות מתוך אחת מהמשוואות השקולות הבאות :

(1)
$$-\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{GH(s)} \right] = 0$$

(2)
$$\frac{d}{ds} [GH(s)] = 0$$
 או

(3)
$$\sum_{i=1}^{\#p} \frac{1}{s - p_i} = \sum_{j=1}^{\#z} \frac{1}{s - z_j}$$
 או

כללים נוספים (במידת הצורך) :

"כלל 7 חיתוך ציר $j\omega$:

לנקודות החציה של הענפים עם הציר המדומה (ולהגבר בו חציה זו קורית) חשיבות מיוחדת בקשר ליציבות המערכת.

ניתן למצוא את נקודות חיתוך הענפים עם ציר $j\omega$ (במידה וקיימות) בשתי שיטות :

א. הצבת $s = j\omega$ במשוואה האופיינית. השוואת החלק הממשי והמדומה לאפס תיתן את K_0 ו- ω_0 .

ב. בעזרת קריטריון רות – הורוביץ :

- חשבו את מערך $R.H.$ עבור הפולינום האופייני של החוג הסגור.

- מצאו K_0 עבורו המקדם בשורה s^1 מתאפס.

- את ω_0 ניתן למצוא מהשורה שמעליה (ראו הסבר על $R.H.$).

- ניתן גם להציב K_0 זה בפולינום האופייני של החוג הסגור ולפתור עבור $s_0 = j\omega_0$.

כלל 8 שימור מרכז הכובד

אם מספר הקטבים של החוג הפתוח גדול לפחות בשניים ממספר האפסים ($\#p \geq \#z + 2$), אזי סכום

קטבי החוג הסגור קבוע (לכל K) ושווה לסכום קטבי החוג הפתוח :

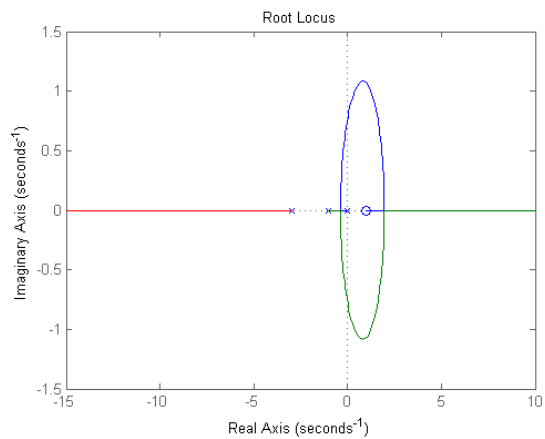
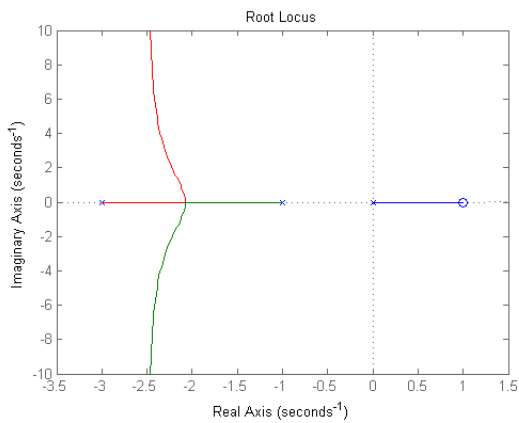
$$\sum_{i=1}^n p_i^c = \sum_{i=1}^n p_i$$

$$G(s)H(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+3)}, \quad K > 0 \quad \text{דוגמא 3:}$$

$$G(s)H(s) = \frac{1-s}{s(s+1)(s+3)}, \quad K > 0 \quad \text{דוגמא 4:}$$

```
>> s=tf('s'); G=(s-1)/(s*(s+1)*(s+3));
```

```
>> rlocus(G)
```



הסבר והוכחת הכללים (פרטים בכיתה):

נזכור כי ה- $R.L.$ הוא שרטוט השורשים של המשוואה האופיינית כאשר K חיובי או שלילי. המשוואה האופיינית היא $1 + KG(s)H(s) = 0$, ובצורת פולינום:

$$a_K(s) \triangleq \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \cdot \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

כלל 1 (מספר הענפים, סימטריה): לפי הגדרתם, מספר הענפים הוא כמספר השורשים של המשוואה האופיינית, שהיא פולינום מסדר $n_0 = \max(m, n)$.

הסימטריה ביחס לציר הממשי נובעת מכך שאם s_0 שורש (מרוכב) אזי גם הצמוד \bar{s}_0 הוא שורש.

כלל 2 (נקודות קצה): עבור $K \rightarrow 0$ הפולינום האופייני שואף ל- $\prod_{i=1}^n (s - p_i)$, ולכן השורשים (הסופיים) שואפים ל- (p_i) שהם קטבי החוג הפתוח.

כאשר $|K| \rightarrow \infty$, החלק הדומיננטי של הפולינום האופייני הוא $K \cdot \prod_{j=1}^m (s - z_j)$, והשורשים (הסופיים) שואפים ל- (z_j) .

לגבי השורשים השואפים ל- ∞ ראו הדיון באסימפטוטות.

כלל 3 ($R.L.$ על הציר הממשי): נובע מהפעלת כלל הזווית על נקודה הנמצאת על הציר, כאשר:

- קוטב או אפס ממשיים משמאלה תורמים 180^0

- קוטב או אפס ממשיים מימינה תורמים 0^0

- צמד של אפס או קוטב מרוכבים (במיקום כלשהו) תורמים ביחד 0^0 .

כלל 4 (אסימפטוטות): נדון במקרה $m < n$. עבור $|K| \rightarrow +\infty$, אנו מעוניינים בקטבים בעלי

$|s| \rightarrow \infty$. לקבלת הזוויות, קרוב ראשון של המשוואה האופיינית עבור $|s|$ גדול נותן:

$$s^n + Ks^m = 0, \text{ עם שורשים:}$$

$$s = \sqrt[n-m]{-K} = \sqrt[n-m]{|K|} \angle \left(\frac{\angle(-K) + 360\ell}{n-m} \right), \quad \ell = 0, 1, \dots, n-m$$

לקבלת נקודת המפגש יש לבצע קירוב עדין יותר של המשוואה האופיינית. הוספת החזקות השניות-בגודלן נותנת:

$$-K = \frac{1}{G(s)H(s)} \triangleq \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{s^n - Ps^{n-1} + \dots}{s^m - Zs^{m-1} + \dots}, \quad P \triangleq \sum_{i=1}^n p_i, \quad Z \triangleq \sum_{j=1}^m z_j$$

עבור $|K| \rightarrow +\infty, |s| \rightarrow \infty$ נקבל על ידי חלוקה: $-K = s^{n-m} - (P-Z)s^{n-m-1} + o(s^{n-m-2})$

וניתן להראות מכאן, לאחר הוצאת שורש ושימוש בקירוב $\sqrt[\ell]{1-x} \approx 1-x/\ell$, כי

$${}^{n-m}\sqrt{-K} = s - \sigma_0 + o(1), \quad \sigma_0 = \frac{P-Z}{n-m}$$

כלל 5 (זוויות יציאה מקוטב): מתקבל על ידי הפעלת כלל הזווית על נקודה ϵ -קרובה לקוטב.

כלל 6 (נקודות פיצול): "נקודת פיצול" היא מפגש של שני ענפים (או יותר), שמשמעותו קוטב כפול (לפחות) המתקבל עבור K מסוים. יהיה K_0 הגבר כזה, שעבורו המשוואה האופיינית היא בעלת

שורש כפול בנקודה s_0 . לפיכך:

$$1 + K_0 G(s)H(s) = (s - s_0)^2 X(s)$$

גזירה לפי s והצבת $s = s_0$ נותנת:

$$\begin{aligned} 1 + K_0 \frac{d}{ds} G(s)H(s) \Big|_{s=s_0} &= [2(s - s_0)X(s) + (s - s_0)^2 X'(s)]_{s=s_0} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} G(s)H(s) \Big|_{s=s_0} &= 0 \end{aligned}$$

כלל 8 (שימור מרכז כובד): נזכור כי עבור פולינום כלשהו $q(s)$ מסדר n (עם מקדם מוביל 1) מתקיים:

$$q(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) s^{n-1} + \dots$$

לפיכך, המקדם של s^{n-1} הוא מינוס סכום השורשים.

נניח עתה $n \geq m - 2$, ונחשב את המקדם המתאים של הפולינום האופייני:

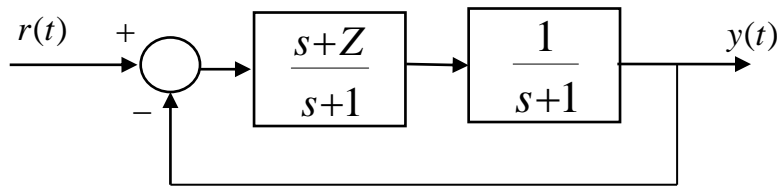
$$\begin{aligned} a_K(s) &= \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \cdot \prod_{j=1}^m (s - z_j) \\ &= s^n - \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) s^{n-1} + (\text{lower-order terms}) \end{aligned}$$

מכאן נקבל כי $\sum_{i=1}^n p_i^c$, סכום שורשי $a_K(s)$, שווה ל- $\sum_{i=1}^n p_i$.

11.5. שרטוט Root-Locus לפי פרמטר כללי

לעיתים נדרש לחקור את השתנות קטבי החוג הסגור כתלות בפרמטר שאינו בהכרח ההגבר K . פרמטר כזה עשוי להיות מיקום אפס או קוטב של המערכת המבוקרת או של הבקר.

במקרים מסוימים ניתן לעשות זאת על ידי הבאת המשוואה האופיינית של חוג הבקרה לצורה הסטנדרטית של ציור $R.L.$. נראה זאת באמצעות דוגמא:



פה $(-Z)$ הוא מיקום האפס של הבקר, ואנו מעוניינים לבדוק את השפעת Z על קטבי החוג הסגור.

נרשום את המשוואה האופיינית: $1 + \frac{s+Z}{(s+1)^2} = 0$

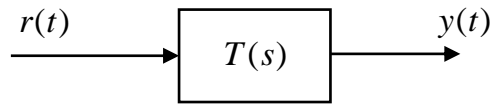
בעזרת מעט אלגברה נקבל: $(s+1)^2 + s + Z = 0$

$$1 + Z \frac{1}{(s+1)^2 + s} = 0$$

ניתן עתה לצייר $R.L.$ לפי הפרמטר Z , לפי הכללים הרגילים.

הרצאה 12: שגיאות מצב מתמיד

נתבונן במערכת עקיבה כללית:



כזכור, שגיאת העקיבה היא ההפרש בין כניסת הייחוס ליציאה ("הרצוי פחות המצוי"):

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

בפרקים קודמים עסקנו בתגובת המעבר של המערכת, בתגובה לשינוי (מדרגה) בכניסה. בפרק זה נתרכז בתגובת המצב המתמיד, ובפרט בשגיאה המתקבלת המצב המתמיד, לאחר דעיכת תגובת המעבר.

שגיאת המצב המתמיד מוגדרת (עבור כניסה נתונה) על ידי:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

וזאת כאשר הגבול קיים.

ניתן לדון במצב המתמיד עבור שני סוגי כניסות:

- א. כניסות פולינומיאליות – כניסת מדרגה, ופולינומים מסדר גבוה יותר.
 - ב. כניסות הרמוניות (סינוס בתדר נתון).
- בפרק זה נתמקד בכניסות מהסוג הראשון.

12.1. כניסות בוחן פולינומיאליות

כניסת בוחן פולינומיאלית (מנורמלת) מדרגה k מוגדרת כללית על ידי :

$$r(t) = \frac{1}{k!} t^k \cdot 1(t), \quad R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

עבור הכניסות הפולינומיאליות הסטנדרטיות המשמשות לבחינת השגיאה במצב המתמיד הן הבאות :

א. כניסת מדרגה ($k = 0$) : $r(t) = 1(t), \quad R(s) = \frac{1}{s}$

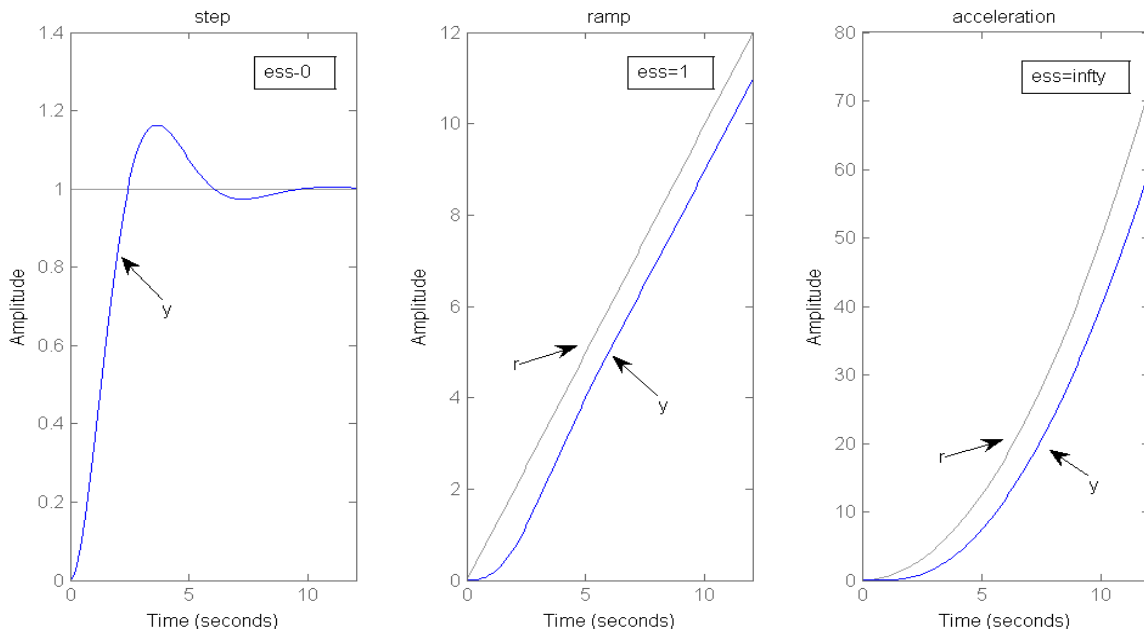
ב. כניסת ריצה\ מהירות - ramp ($k = 1$) : $r(t) = t \cdot 1(t), \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$

ג. כניסת תאוצה ($k = 2$) : $r(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t), \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$

- כניסת מדרגה בוחנת את תגובת המערכת (במצב המתמיד) בתנאים של כניסה קבועה.
- כניסת ריצה בוחנת את תגובת המצב המתמיד בתנאים קשים יותר, של כניסה המשתנה בקצב קבוע. הרלוונטיות של כניסה זו (וגודלה) תלויה בשימוש הצפוי במערכת. למשל: אנטנת מכ"ם העוקבת אחר מיקום מטוס נוסעים ("כניסה" פה היא המיקום הנמדד של המטוס, היציאה מיקום האנטנה).
- כניסת תאוצה עולה שלב נוסף, ובוחנת את תגובת המצב המתמיד בתנאים של כניסה בעל קצב עולה. למשל: אנטנת מכ"ם, או ראש ביות, העוקבים אחר תנועת מטוס קרב מתמרן.

הציור הבא מראה את התגובה לכניסות אלו עבור המערכת $T(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

```
>> s=tf('s'); T=1/(s^2+s+1); t=0:0.1:12; clf, hold on
>> clf; subplot(1,3,1); r=ones(size(t)); lsim(T,r,t)
>> subplot(1,3,2); r=1*t; lsim(T,r,t)
>> subplot(1,3,3); r=0.5*t.^2; lsim(T,r,t)
```



ניתן לראות כי למערכת זו $e_{ss} = 0$ עבור כניסת מדרגה, $e_{ss} = 1$ (סופי ושונה מאפס) עבור כניסת ריצה, וכן $e_{ss} = \infty$ עבור כניסת תאוצה.

סוג המערכת (type of a system): עבור מערכת יציבה, נגדיר את סוג (או טיפוס) המערכת, כחזקה (דרגה) הגדולה ביותר של כניסה פולינומיאלית שעבורה שגיאת המצב המתמיד הינה סופית.

מערכות עקיבה מעשיות הן מסוגים 0,1,2, כאשר מתקיים (כפי שנראה בהמשך):

כניסת תאוצה	כניסת ריצה	כניסת מדרגה	
$ e_{ss} = \infty$	$ e_{ss} = \infty$	$0 < e_{ss} < \infty$	מערכת מסוג 0:
$ e_{ss} = \infty$	$0 < e_{ss} < \infty$	$e_{ss} = 0$	מערכת מסוג 1:
$0 < e_{ss} < \infty$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	מערכת מסוג 2:

חישוב השגיאה. את שגיאת המצב המתמיד עבור כניסות פולינומיאליות נוה לחשב באמצעות משפט הערך הסופי מהתמרות לפלס.

נזכור כי אם $E(s)$ התמרת לפלס של אות שבה כל הקטבים הם בחצי המישור השמאלי הפתוח או בראשית, אזי

$$e_{ss} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sE(s)$$

• דוגמאות לשימוש לא נכון במשפט: $E(s) = \frac{1}{s-1}$, $E(s) = \frac{1}{s^2+1}$

לחישוב $E(s)$ נגדיר את התמסורת הבאה בין הכניסה לשגיאה:

$$T_E(s) \triangleq \frac{E(s)}{R(s)}$$

במערכת שלנו, $T_E(s) = 1 - T(s)$. לפיכך, $E(s) = T_E(s)R(s)$. תנאי המשפט מתקיימים כאשר

$T_E(s)$ יציבה (אקוויולנטית, $T(s)$ יציבה), והכניסה היא פולונומיאלית. לפיכך:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} sR(s)T_E(s)$$

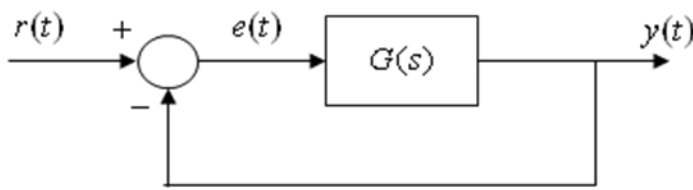
דוגמא: עבור $T(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ שלעיל, נקבל: $T_E(s) = 1 - T(s) = \frac{s^2+s}{s^2+s+1}$. לפיכך –

$$R(s) = \frac{1}{s}, \quad e_{ss} = \dots \quad \text{עבור מדרגה:}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2}, \quad e_{ss} = \dots \quad \text{עבור ריבוע:}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3}, \quad e_{ss} = \dots \quad \text{עבור תאוצה:}$$

12.2. מערכת משוב יחידה וקבועי השגיאה



נתבונן ראשית במערכת משוב יחידה :

אנו מניחים כרגיל כי המערכת (בחוג סגור) הינה יציבה.

פה מתקיים :

$$T_E(s) \triangleq \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

ולפיכך :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} sR(s) \frac{1}{1+G(s)}$$

א. כניסת מדרגה : הצבת $R(s) = \frac{1}{s}$ נותנת :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+G(s)}$$

או, באופן שקול,

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}, \quad K_p \triangleq \lim_{s \rightarrow 0^+} G(s)$$

K_p הוא קבוע שגיאת המדרגה.

כאשר ל- $G(s)$ אין קטבים בראשית, אזי $K_p = G(0)$, הגבר $G(s)$ בתדר 0.

ב. כניסת ריצה : הצבת $R(s) = \frac{1}{s^2}$ נותנת :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s+sG(s)}$$

או, באופן שקול (כאשר הגורם הנוסף s במכנה אינו משפיע על הגבול) :

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}, \quad K_v \triangleq \lim_{s \rightarrow 0^+} sG(s)$$

K_v הוא קבוע שגיאת הריצה.

ג. כניסת תאוצה : הצבת $R(s) = \frac{1}{s^3}$ נותנת, באופן דומה :

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}, \quad K_a \triangleq \lim_{s \rightarrow 0^+} s^2 G(s)$$

K_a הוא קבוע שגיאת התאוצה.

סוג המערכת: נראה עתה כי יכולת המערכת לעקוב עם שגיאה סופית (או אפס) אחר כניסות פולינומיאליות נקבעת על ידי מספר הקטבים בראשית של $G(s)$. נסמן

$$G(s) = \frac{1}{s^\ell} \tilde{G}(s)$$

כאשר $\ell \geq 0$ הוא מספר הקטבים בראשית של $G(s)$ (לפיכך $\tilde{G}(0)$ סופי ושונה מ-0).

נשים לב כי כל גורם מהצורה $\frac{1}{s}$ ניתן לפרש בתחום הזמן כתוספת טורית של אינטגרטור. לפיכך ℓ נקרא גם מספר האינטגרטורים של $G(s)$.

בהתאם לסוג המערכת וסוג הכניסה, קבועי השגיאה (ושגיאות המצב המתמיד עצמן) יכולים להיות אפס, סופיים, או אינסופיים. לפי ההגדרות ניתן לקבל את הטבלה הבאה:

	K_p	K_v	K_a	e_{ss} עבור כניסת:		
				מדרגה	ריצה	תאוצה
$\ell = 0$	סופי	0	0	$\frac{1}{1+K_p}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\ell = 1$	$\pm\infty$	סופי	0	0	$\frac{1}{K_v}$	$\pm\infty$
$\ell = 2$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	סופי	0	0	$\frac{1}{K_a}$

למשל:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0^+} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{s^\ell} \tilde{G}(s) = \begin{cases} 0 & : \ell = 0 \\ \tilde{G}(0) & : \ell = 1 \\ \infty \cdot \text{sign}(\tilde{G}(0)) & : \ell = 2 \end{cases}$$

אנו רואים מהטבלה כי סדר המערכת נקבע על ידי ℓ , וזהה לו.

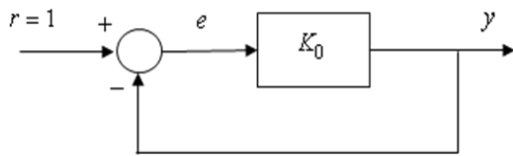
דוגמא: עבור $G(s) = \frac{9}{s(s+3)}$

א. חשבו את קבועי השגיאה

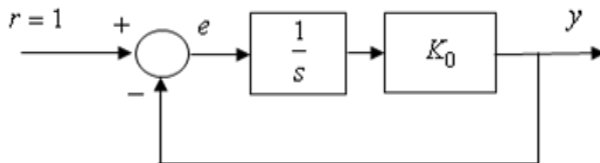
ב. חשבו את שגיאת המצב המתמיד לכניסה $r(t) = 5 + 5t, t \geq 0$ בשתי דרכים: באמצעות קבועי השגיאה, וישירות מהנוסחה הכללית.

* הסבר השפעת האינטגרטור:

ראינו כי נוכחות אינטגרטורים (קטבים בראשית) בתמסורת הקדמית $G(s)$ תורמת מהותית להקטנת השגיאה במצב המתמיד. כדי להבין השפעה זו נתבונן בשתי מערכות: אחת עם ללא קוטב בראשית, והשניה בתוספת אינטגרטור.



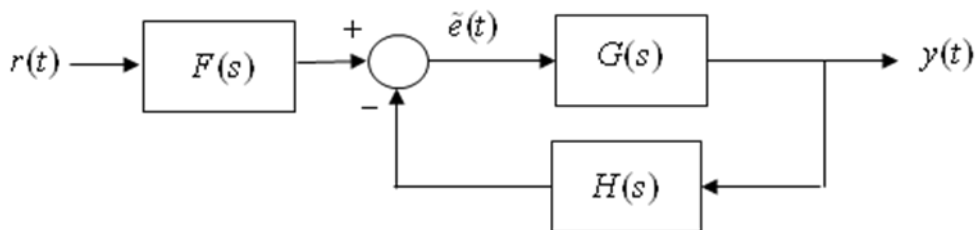
א. המערכת הראשונה מתארת מצב מתמיד של מערכת מסדר 0, עם $K_0 = G(0)$. קל לראות שלא ייתכן פה $e = 0$ (מדוע?).



ב. נוסף עתה אינטגרטור טורי.
 (1) מהו השגיאה במצב היציב עתה?
 (2) מה יקרה אם השגיאה תגדל \ תקטן?

12.3. שגיאת עקיבה בחוג משוב כללי

נתבונן עתה במערכת משוב כללית יותר:



$F(s)$ הוא מסנן מקדים הנדרש לעיתים לצורך עיצוב התגובה והתאמת סקלות.

שגיאת העקיבה עדיין מוגדרת כרגיל על ידי $e(t) = r(t) - y(t)$. נשים לב ששגיאה זו אינה זהה עתה לאות השגיאה $\tilde{e}(t)$ המופיע ביציאת המסכם. חישוב פשוט נותן:

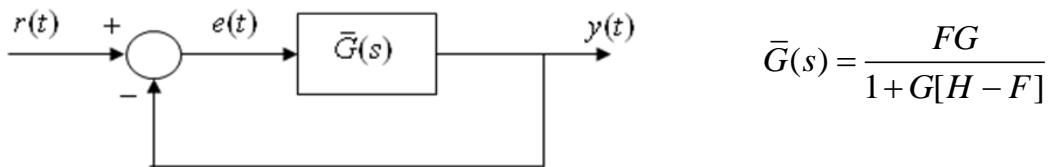
$$T(s) \triangleq \frac{Y(s)}{R(s)} = F(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$T_E(s) \triangleq \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - T(s) = \frac{1 + G(s)(H(s) - F(s))}{1 + G(s)H(s)}$$

ניתן עתה לחשב את שגיאות המצב המתמיד תוך שימוש בנוסחה הכללית :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} sR(s)T_E(s)$$

ניתן גם להגדיר קבועי שגיאה למערכת זו. לצורך כך נוח לבצע "קיצור דרך" כלהלן. ניתן לוודא כי תמסורת המערכת $T(s)$ זהה לזו המתקבלת במערכת משוב-יחידה הבאה :



לפיכך גם שגיאות העקיבה זהות בשתי המערכות, וניתן להגדיר את קבועי השגיאה ביחס למערכת $\bar{G}(s)$ ולחשב מתוכם את שגיאות המצב המתמיד באופן הרגיל.

דוגמא : נתבונן במערכת סרוו טיפוסית של בקרת זווית (או מיקום) עם משוב מהירות, שעבורה :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}, \quad H(s) = 1 + \beta s, \quad F(s) = 1$$

האיבר βs מתאר את אות משוב מהירות, שהוא יחסי לנגזרת (קצב שינוי) היציאה. המהירות נמדדת פעמים רבות ישירות, למשל ע"י מד מהירות על ציר המנוע (טכומטר). כפי שנראה בהמשך הקורס, משוב המהירות תורם לריסון המערכת, ומאפשר בכך הגדלה ההגבר K .
נקבל פה :

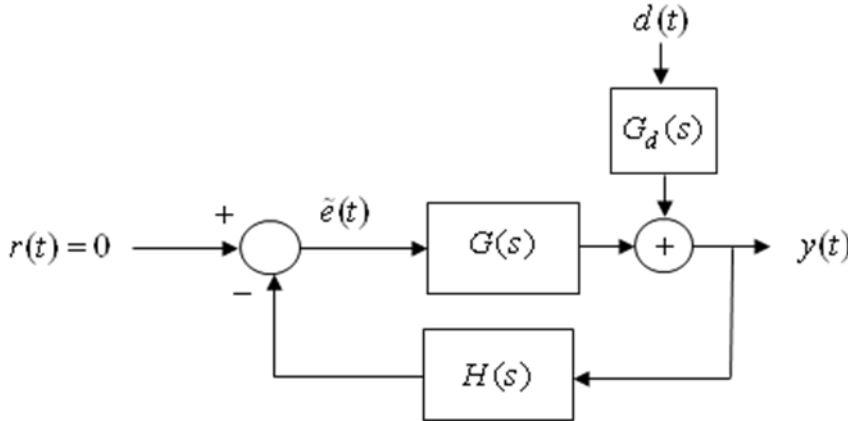
$$\bar{G}(s) = \frac{G}{1 + G[H - 1]} = \frac{K}{s(s+a) + K(1 + \beta s - 1)} = \frac{K}{s(s + (a + K\beta))}$$

$\bar{G}(s)$ כוללת אינטגרטור אחד, לכן המערכת הכוללת היא מסוג $\ell = 1$, ובעלת קבוע שגיאה

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{a + K\beta}$$

12.4. שגיאות עקב הפרעה חיצונית

כפי שראינו, אחד מהיתרונות החשובים של מערכת משוב היא דחיית (הנחת) הפרעות הנובעות ממקורות חיצוניים למערכת ומשפיעים על יציאתה.



במערכת המצוירת, התמסורת $G_d(s)$ מתאר את ההשפעה של אות הפרעה $d(t)$ על יציאת המערכת (ללא השפעת המשוב).

כדי לבדוד את השפעת הפרעה, ניעזר בעקרון הסופרפוזיציה ונחשב השפעה זו עבור $r(t) = 0$. שגיאת העקיבה עתה הינה:

$$e(t) \triangleq r(t) - y(t) = -y(t)$$

התמסורת מההפרעה לשגיאה בחוג הסגור:

$$T_{d \rightarrow e}(s) = -T_{d \rightarrow y}(s) = -G_d(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

ניתן עתה לחשב את שגיאות המצב המתמיד עקב הפרעה בעזרת הנוסחה הכללית:

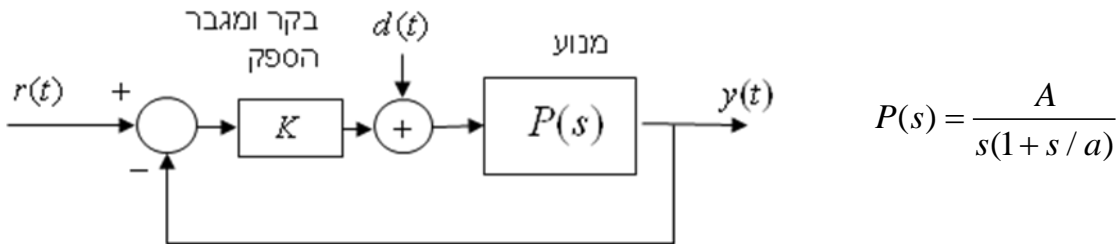
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} sD(s)T_{d \rightarrow e}(s) = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{sD(s)G_d(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- ניתן לראות כי הגבר החוג $L(s) = G(s)H(s)$ נמצא במכנה, והשגיאה תקטן ככל שערכו של $L(0)$ גבוה יותר.

- בפרט, כאשר $L(0)$ סופי (אין קטבים בראשית), נקבל: $e_{ss} = \frac{-\lim_{s \rightarrow 0^+} sD(s)G_d(s)}{1 + G(0)H(0)}$.

נציין כי ניתן גם כאן להגדיר קבועי שגיאה מתאימים עבור השפעת הפרעה, אולם לא נפרט זאת.

דוגמא : נתבונן שוב במערכת סרוו-מצב בסיסית, עם משוב יחידה :



עקב תקלה במגבר ההספק, נוספה הפרעת מתח קבועה (bias) בכניסת המנוע, בגודל $d(t) = V_0$. מה תהיה שגיאת המצב המתמיד ביציאה עקב מתח זה?

ההפרעה המתוארת מתאימה למערכת שבה דנו בתחילת הסעיף, עם :

$$G_d(s) = P(s), \quad G(s) = KP(s), \quad H(s) = 1$$

ניתן לכן להציב בנוסחאות שם, או לחשב ישירות :

$$T_{d \rightarrow e}(s) = -T_{d \rightarrow y}(s) = -\frac{P(s)}{1 + KP(s)}$$

בנוסף $D(s) = \frac{V_0}{s}$ לפיכך :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} sD(s)T_{d \rightarrow e}(s) = -\lim_{s \rightarrow 0^+} V_0 \frac{\frac{A}{s(1+s/a)}}{1 + \frac{KA}{s(1+s/a)}} = -\frac{V_0}{K}$$

- להשוואה : מה הייתה שגיאת המצב המתמיד המתקבלת ללא משוב במקרה זה?

הרצאה 13: מבוא לתכן מערכות בקרה

בהרצאה זו נציג מבט כללי על נושא התכן של מערכות בקרה, ובפרט מערכות משוב. בהרצאות הבאות נתאר מספר שיטות תכן ספציפיות.

13.1. תהליך התכן

תכן של מערכת בקרה מורכבת כולל מספר שלבים (כולם או חלקם), שניתן לתארם באופן גס כלהלן.

1. **איפיון הדרישות**: הגדרה ראשונית של דרישות הביצועים של המערכת, הנגזרות ממטרתה.
2. **הגדרת המערכת**: הגדרת מבנה מערכת הבקרה, בחירת רכיבים, "אופטימיזציה" של מבנה ועלות.
3. **מידול**: פיתוח מודל מתמטי מקורב של המערכת הפיזית, חישוב ומדידת פרמטרי המערכת.
4. **תכן הבקר**: תכנון בקר דינאמי אשר משיג את דרישות הביצועים, תוך שימוש בכלי תכן וסימולציה ממוחשבים.
5. **בדיקת התכן**: בדיקת ביצועים מתקדמת, תוך שימוש במודל סימולציה מפורט, בניית אב טיפוס, ניסויים.
6. **מימוש והפעלת המערכת**.

באופן טיפוסי אנו חוזרים לשלבים הקודמים ומבצעים שינויים במידת הנדרש ככל שנצבר ידע והבנת הבעיה בשלבים הבאים.

בקורס זה נתמקד בעיקר בשלב 4 – תכן הבקר. ביצוע תכן זה, כמו גם הבנת האפשרויות ומגבלות התכן, מהווה את הבסיס התיאורטי לכלל תהליך התכן. בסיס זה מהווה מכנה משותף למגוון גדול של מערכות בקרה מתחומים שונים.

13.2. דרישות ביצועים

מערכת בקרה מוצלחת חייבת לענות על מגוון דרישות ביצועים. בין הדרישות העיקריות ניתן למנות :

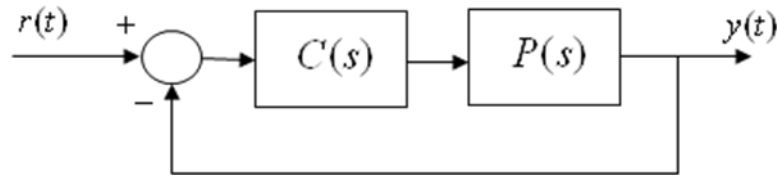
- יציבות
- תגובה מהירה (רוח סרט מספיק)
- ריסון
- עקיבה טובה (שגיאת עקיבה נמוכה)
- הנחתת הפרעות ורעשים
- רובוסטיות : רגישות נמוכה לשינויי פרמטרים של המערכת המבוקרת
- מאמץ בקרה (הספק או גודל אות הכניסה u) נמוך

חלק מדרישות אל הן מנוגדות (למשל : תגובה מהירה לעומת מאמץ בקרה נמוך), כך שהתכנון הכולל מחייב מציאת פשרה קבילה בין כלל הדרישות.

בזמן התכן יש להקפיד על הימנעות מתכן-יתר (over-design), כלומר יש לענות על דרישות הביצועים אך לא מעבר לכך. למשל, יש להימנע מהגדלת רוחב הסרט של המערכת ללא צורך, כיוון שיש לכך מחיר במאמץ הבקרה הנדרש. וזאת גם אם אין מגבלה מפורשת על מאמץ הבקרה.

13.3. מבנה מערכת בקרת משותף

מערכת המשותף הבסיסית שבה נתעניין בהקשר לתכן הינה חוג העקיבה המוראה בצירור.



כאן :

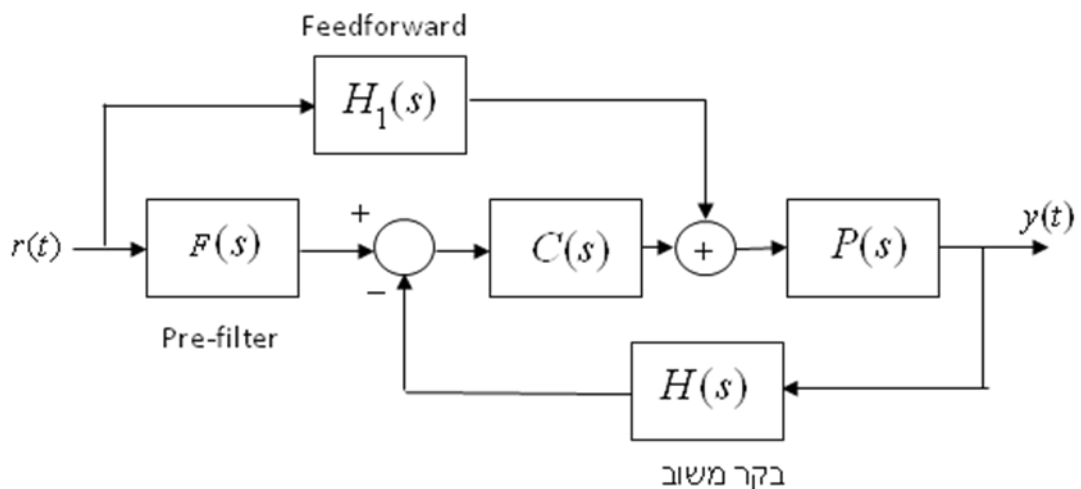
- $P(s)$ הינה מודל לינארי מקורב של המערכת המבוקרת (Plant), כולל המפעילים (Actuators). זהו החלק ה"פיסי" של המערכת.
- $C(s)$ הינו הבקר הדינאמי אותו נדרש לתכנן. בקר מומש בעבר באלקטרוניקה אנלוגית, וכיום בעיקר באופן ספרתי. בקר מסוג זה נקר בקר קדמי עקב מיקומו.
- התמסורת הקדמית המתקבלת היא כמובן $G(s) = C(s)P(s)$.

הבקר הקדמי $C(s)$ משפיע על התגובה הדינאמית ועל תגובת המצב המתמיד של המערכת, ומתוכנן בהתאם לדרישות הביצועים. אנו נתייחס לשתי משפחות עיקריות של בקרים המשמשים לתכן :

א. בקרי PID

ב. בקר מסוג רשת קידום \ פיגור.

לחוג המשותף הבסיסי ניתן להוסיף מספר מרכיבים נוספים, שחלקם מוראה בצירור הבא. על משמעותם נעמוד בהמשך.



13.4. גישות לתכן הבקר

מטרתו לתכנן את מערכת הבקרה (החל מבחירת הבקר הקדמי $C(s)$) כך שהמערכת תענה על דרישות הביצועים. קיימות מספר שיטות וגישות שונות לביצוע התכן. הגישה הבסיסית שאותה נלמד בקורס זה הינה הבאה.

א. עיצוב החוג (Loop Shaping): בגישה זו התכן מבצע על ידי "עיצוב" תמסורת החוג $L(s) = G(s)H(s) = C(s)P(s)H(s)$. עיצוב זה מתבצע באופן כפלי על ידי בקר הטורי $C(s)$, ובמידת הצורך בתוספת בקר המשוב $H(s)$.

שלבי התכן פה הינם:

1. תרגום דרישות הביצועים לדרישות על תמסורת החוג $L(s)$.
2. בחירת תמסורת הבקרים $C(s), H(s)$ כך שתמסורת החוג תקיים את הדרישות.
3. בדיקת הביצועים בסימולציה.

תורת הבקרה הקלאסית מציעה שני כלי תכנון עיקריים לביצוע שלב 2:

- א. תכן בתחום התדר – בעזרת דיאגרמת בודה. (כלי עזר נוסף הוא דיאגרמת ניקולס).
- ב. תכן בתחום התמסורת – בעזרת דיאגרמת רות-לוקוס.

ניתן לראות כלים אלה כמשלימים, כאשר התכן בתחום התדר הוא המקיף ביותר ומאפשר התייחסות למירב התכונות של המערכת.

גישה חליפית לביצוע התכן הינה הבאה, אותה נזכיר בקצרה לצורך ההשוואה.

ב. בחירה ישירה של התמסורת: בגישה זו, בוחרים ראשית את תמסורת המערכת הרצויה $T(s)$, ולאחר ניתן לחשב את הבקר הנדרש לקבלת תמסורת זו. לדוגמא, במערכת משוב היחידה, נזכור כי

$$T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

ומכאן נחלץ

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{1}{1 - T(s)}$$

האתגר העיקרי בגישה זו (שלא ניכנס לפרטיה) הוא בבחירה נכונה של $T(s)$. באופן נאיבי, ניתן לבחור בתמסורת סטנדרטית כגון $T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, ללא התחשבות בתמסורת המערכת $P(s)$, ולחשב בקר בהתאם. אולם בגישה מעין זו קיימות מספר בעיות מרכזיות:

- א. אין התחשבות בגורמים מרכזיים כגון שולי היציבות ורגישות המערכת, ומאמץ הבקרה הנדרש.
- ב. הבקר המתקבל עלול להיות מסדר גבוה, לא נאות (פרופר), ואף לא יציב (שלא לצורך).
- ג. בנוסחת הבקר קיימת מעין הפיכת תמסורת המערכת, דבר שעלול להוביל לצמצום לא רצוי של קטבים ואפסים.

להמחשת הבעיות האחרונות, נניח כי $P(s) = \frac{s-2}{s^2+s+1}$, ובחרנו $T(s) = \frac{4}{s^2+3s+4}$ (לפי דרישת רוחב סרט, ריסון, ושגיאת מצב מתמיד). נקבל:

$$C(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s - 2} \frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 + 3s}$$

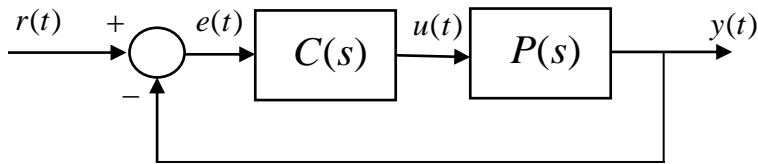
בקר זה איננו נאות, ואיננו יציב. חמור מכך, הוא כולל קוטב "לא יציב" אשר מצטמצם עם אפס של המערכת המבוקרת. כזכור, צמצום כזה אסור כיוון שמערכת המשוב המתקבלת אינה יציבה פנימית.

גישת תכן זו, הכוללת כללים לבחירה מתאימה של $T(s)$, קרויה גישת התכן של Truxal and Guillemin. היא אינה מקובלת כיום.

הרצאה 14: בקרי PID

בקרי PID הם משפחה נפוצה של בקרים, שיתרונם בפשטותם. בקרים אלה מהווים בחירה ראשונה למגוון מערכות בסיסיות כגון מערכות סרוו ומערכות בקרה תעשייתית.

14.1. מבנה ותכונות הבקר



בקר PID בסיסי הוא בקר טורי המכיל את התמסורת הקדמית, ונתון על ידי סכום של שלושה איברים:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

בהתאם לכך, PID = Proportional+Integral+Derivative.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int^t e(s) ds + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

תיאור זמני של פעולת הבקר:

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

פרמטריזציה חליפית של תמסורת הבקר:

פה לקבועים T_I, T_D יש יחידות של זמן.

השמטת רכיב אחד או יותר מהבקר המלא תיתן בקרי P, PD, PI.

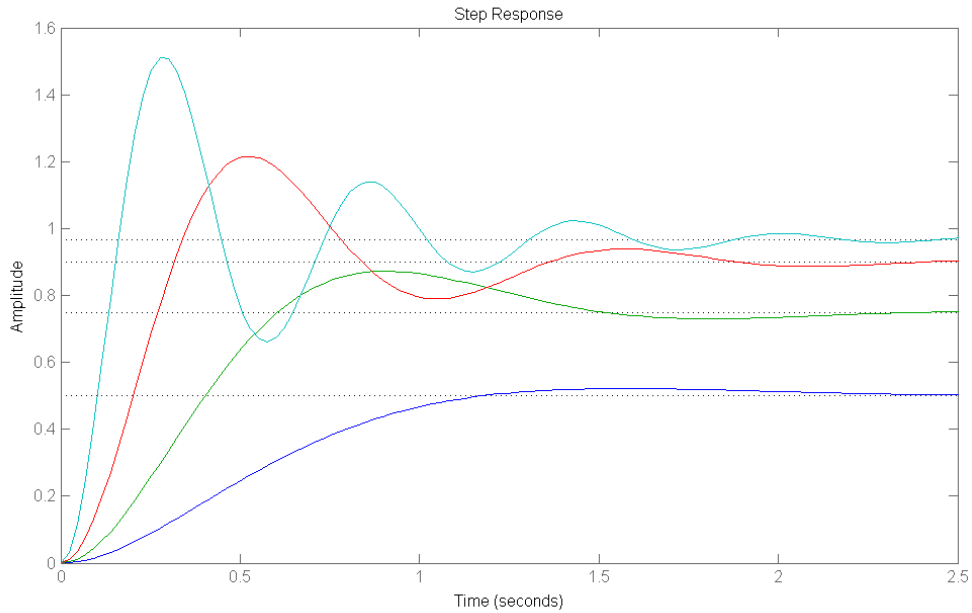
נעמוד להלן על משמעות כל אחד משלושת הרכיבים של הבקר.

א. בקר P

פה מדובר בבקר הגבר פשוט: $C(s) = K_P$. כפי שראינו, הגבר גבוה של חוג הבקרה רצוי לקבלת התכונות החיוביות של מערכת משוב שלילי – עקיבה טובה במצב מתמיד, הגדלת רוחב סרט, דחיית הפרעות, רגישות לשינויי פרמטרים. עם זאת, הגדלת יתר של ההגבר עלולה להקטין את ריסון המערכת, ואף להוביל לאי יציבות.

דוגמא 1: נניח
$$P(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

התגובה למדרגה עבור בקר P עם ערכי הגבר $K_P \equiv K = 1, 3, 9, 20$ מוראית בציור. קל להבין את צורת התגובה עבור ערכי K שונים בעזרת דיאגרמת רות-לוקוס של המערכת. נעיר כי זמן ההתייצבות (t_s) בערך שווה בכל התגובות התנודתיות (מדוע?).



ב. בקר PD

בקר זה כולל את רכיב ההגבר ורכיב הנגזרת: $C(s) = K_P + K_D s$

באופן שקול: $C(s) = K_P(1 + sT_D)$, $T_D = K_D / K_P$

ניתן לראות כי בקר זה מוסיף לתמסורת החוג $L(s) = C(s)P(s)$ "אפס" בנקודה $s = -1/T_D$.

השפעת רכיב הנגזרת: הגדלת ריסון המערכת.

דבר זה מאפשר הגדלה נוספת של K_P ללא ערעור היציבות.

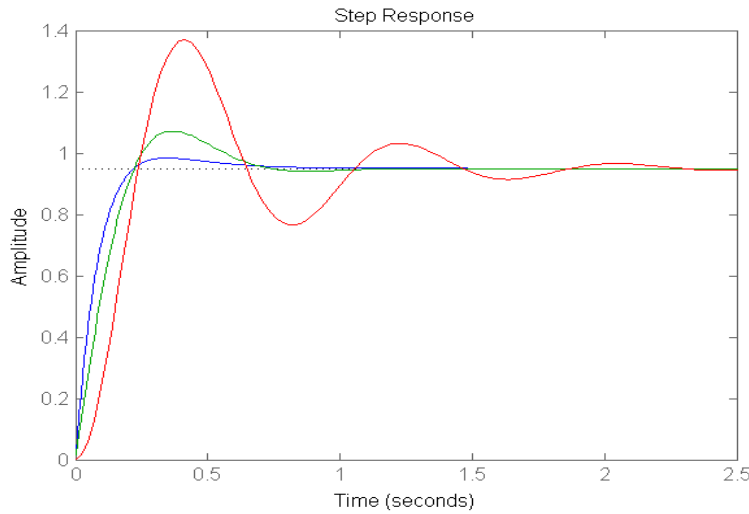
הסבר השפעה זו:

1. בתחום התדר: הוספת האפס (בתדר מתאים) מוסיפה פאזה לתגובת התדר של $L(s)$, ובכך תורמת להגדלת עודף הפאזה של המערכת. (כזכור: הגדלת עודף פאזה \leq הגדלת ריסון המערכת).

2. בתחום הזמן: אות הבקרה המתקבל ביציאת בקר זה הוא $u(t) = K_P e(t) + K_D \dot{e}(t)$. עבור כניסת ייחוס קבועה (מדרגה) נקבל $\dot{e}(t) = -\dot{y}(t)$. ניתן לראות איבר זה כמשוב שלילי על קצב השינוי של היציאה y : כאשר היציאה משתנה מהר, איבר זה תורם להקטנת $u(t)$ ובכך למיתון השינוי ב- y .

3. פרוש נוסף בתחום הזמן: המשוב של בקר P טהור $u(t) = K_P e(t)$ מוחלף פה ב- $u(t) = K_P(e(t) + T_d \dot{e}(t))$. את האיבר בסוגריים ניתן לראות כחזאי של ערך השגיאה $e(t)$ בעוד T_d שניות. כלומר: המושב עובר על ערך השגיאה החזוי לעתיד, ופועל בכך למניעת תגובת יתר גדולה עוד לפני זו מתפתחת.

המשך דוגמא 1: עבור אותה מערכת מבוקרת $P(s)$ עם בקר $C(s) = 20(1 + sT_D)$, הציור מראה את התגובה למדרגה המתקבלת עבור $T_D = 0, 0.1, 0.2$ [sec]



הערות:

1. הוספת רכיב הנגזרת (בבקר הקדמי) אינה משפיעה על שגיאת המצב המתמיד (למדרגה, ריצה, וכו'),

$$\lim_{s \rightarrow 0} K_P(1 + sT_D) = K_P \quad : s \rightarrow 0$$

כיוון שהשפעתו זניחה ביחס לרכיב ההגבר עבור $s \rightarrow 0$

2. בפועל לא ניתן להוסיף רכיב נגזרת אידאלי בזמן רציף, וגם לא רצוי עקב הגברת רעשים בתדר גבוה. לפיכך מקובל להוסיף קוטב לרכיב זה, אשר מקזז את הגברו בתדרים הגבוהים:

$$C(s) = K_P + \frac{K_D s}{1 + T_0 s} \equiv K_P \left(1 + \frac{T_D s}{1 + T_0 s}\right)$$

הערך של T_0 נבחר כך שהשפעת הקוטב לא תורגש בתחום רוחב הסרט של המערכת (בחוג סגור). ערך

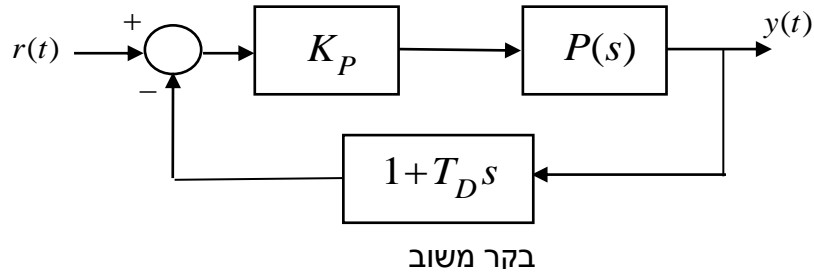
$$T_0 \approx 0.1T_D$$

טיפוסי הינו

3. לאחר תוספת הקוטב, ניתן לרשום את הבקר גם באופן הבא: $C(s) = K_P \frac{1 + (T_0 + T_D)s}{1 + sT_0}$

בקר זה מוסיף הגבר, אפס וקוטב לתמסורת החוג. בקר זה זהה למעשה לבקר מסוג "רשת קידום פאזה", שבו נעסוק בהמשך.

4. מיקום חליפי לבקר PD (ללא ההגבר) הוא בתמסורת המשוב :



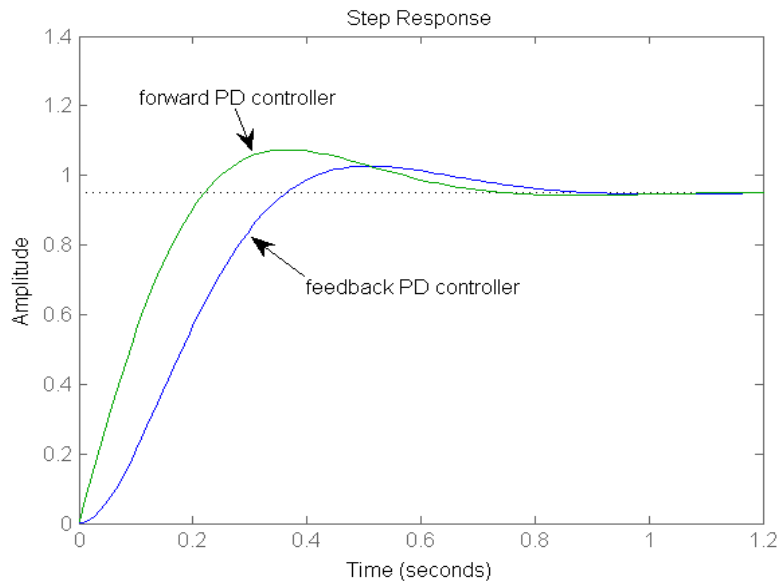
באופן זה, האפס של הבקר אינו מופיע בתמסורת החוג הסגור $T(s)$, כך שנצפה לתגובת יתר נמוכה יותר – ראו הציור להלן. (נציין שאת השפעת האפס ניתן לבטל גם ע"י הוספת מסנן מקדים

$$.(F(s) = \frac{1}{1+T_D s}$$

נציין שמבנה שקול לבקר PD במשוב מתקבל גם במערכות בקרת מיקום (בפרט מערכות סרוו) שבהן בנוסף למשוב המיקום קיים גם משוב מהירות, המתקבל ממד מהירות מתאים.

המשך דוגמא 1 : עבור בקר PD לעיל עם $T_D = 0.1 \text{ sec}$, הציור הבא משווה את תגובת המערכת עם

בקר PD בתמסורת הקדמית ובתמסורת המשוב.



ג. בקר PI

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad \text{בקר PI הוא מהצורה:}$$

$$C(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} \quad \text{או, באופן שקול:}$$

הוספת האינטגרטור (הקוטב בראשית) מגדילה את סוג המערכת, ובהתאם מקטינה את שגיאת המצב המתמיד. וזהו אכן תפקידו העיקרי של בקר PI.

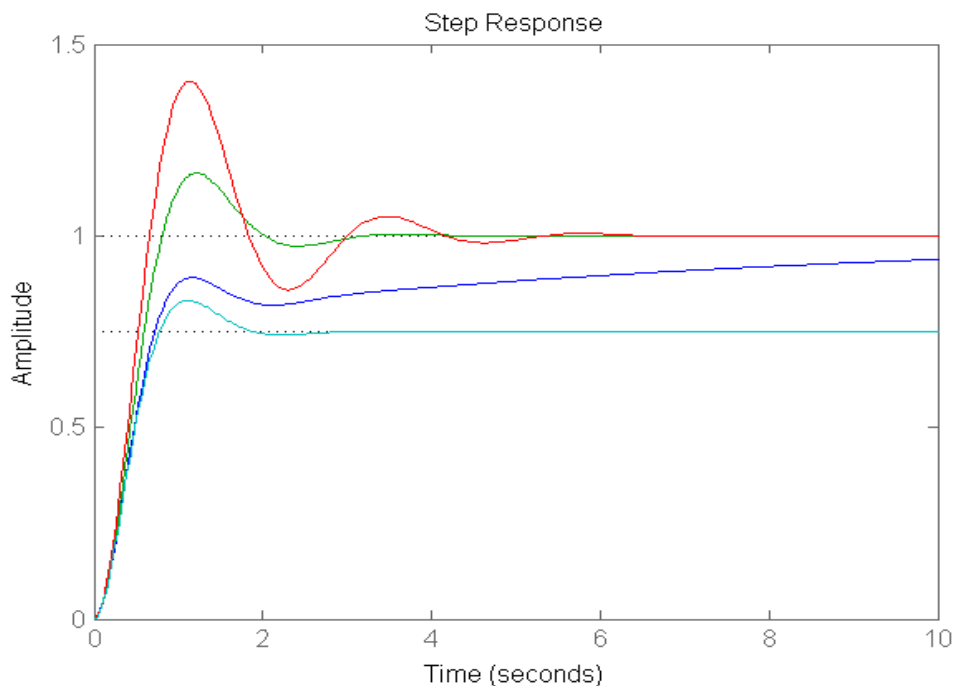
מנגד, תוספת האינטגרטור עשויה לפגוע בריסון ויציבות המערכת (עקב הורדת הפאזה של תמסורת החוג, ובהתאם הורדת עודף הפאזה של המערכת- על כך בהמשך הקורס). השארת איבר ההגבר K_P מסייעת להתגבר על כך במידה מסוימת. במידה ואין זה מספיק יש להוסיף את רכיב הנגזרת (D) לקבלת בקר PID מלא.

נציין כי ניתן לראות בקר PI כמקרה פרטי של "רשת פיגור פאזה", עליה נלמד בהמשך.

המשך דוגמא 1: תגובת המערכת עם בקר PI, עבור $K_P = 3$, $K_I = 0, 0.5, 3, 6$.

שגיאת המצב-המתמיד לכניסת מדרגה תהיה 0 לכל ערך $K_I > 0$, אך עבור ערך נמוך מדי זמן ההתייצבות עשוי להיות ארוך (מדוע?).

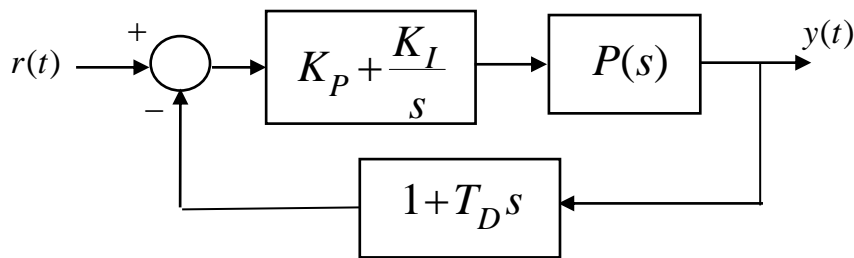
נציין כי שגיאת המצב המתמיד לכניסת ריצה תקטן עם הגדלת K_I , ביחס הפוך.



ד. בקר PID

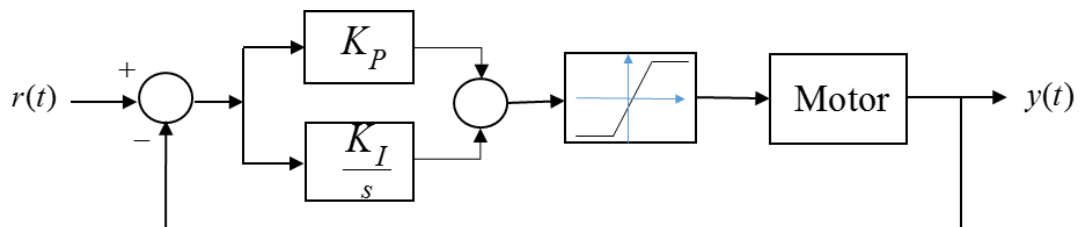
בקר PID מלא משלב את מרכיב ה-I להקטנת שגיאות המצב המתמיד, עם רכיב ה-D המשמש להגדלת הריסון.

ניתן לממשו כבקר PID מלא בתמסורת הקדמית (ראו עמוד 1), או כבקר מפוצל כלהלן :



הערה: בעיית "טעינת האינטגרטור" Integrator Windup

השימוש בבקר הכולל אינטגרטור (PI או PID) עשוי לעורר בעיה כאשר המערכת כוללת רכיב רוויה. נתבונן למשל במערכת בקרת מיקום עם בקר PI :



אות הבקרה מוזן למגבר הספק, שהוא בקירוב ליניארי (נניח הגבר 1) עד לערכי רוויה (למשל $\pm 15\text{ V}$). כאשר מתקיימת שגיאה $e(t)$ לאורך זמן (למשל עקב שינוי גדול או חד בכניסת הייחוס) האינטגרטור נטען, וערכו ביציאה עלול לעלות לערך גדול משמעותית מערך הרוויה. עתה, כאשר נרצה להשפיע על היציאה $y(t)$ בכיוון ההפוך, עלינו ראשית לפרוק את האינטגרטור, דבר שגורם להשהיה בפעולת החוג וכתוצאה מכך אף לנדנודים ואי-יציבות.

כדי למנוע את הבעיה נדרש, עקרונית, להגביל את טעינת האינטגרטור מעבר לערכי הרוויה. פתרון פשטני הוא הגבלת ערכי מוצא האינטגרטור עצמו לערכי הרוויה. פתרון מקובל יותר הוא להגביל את טעינת האינטגרטור כך שמוצא שמוצא הבקר כולו (PI במקרה זה) יוגבל לערכי הרוויה. קיימים מספר רב של מימושים ספציפיים לכך שלא נסקור פה.

14.2. כיווןן אמפירי של בקרי PID

יתרון חשוב של בקרי PID הינו בפשטותם – הם כוללים בסיס"כ עד שלושה פרמטרים עיקריים, כאשר לכל אחד תפקיד ברור. עקב כך בקר זה מתאים במיוחד לכיווןן אמפירי על סמך מדידות פשוטות של תגובת המערכת. כיווןן כזה (ידני או אוטומאטי) מקובל מאוד בחוגי בקרה בתעשייה. בפרט, הוא חוסך את הצורך בקבלת מודל מתמטי מדויק של המערכת וביצוע תכן אנליטי.

קיימות כיום שיטות והמלצות רבות לכיווןן הפרמטרים, המתבססות על קריטריונים שונים. בין השיטות הראשונות, והידועה מביניהן, היא שיטת הכיווןן של זיגלר וניקולס (Ziegler-Nichols), שפורסמה בשנת 1942.

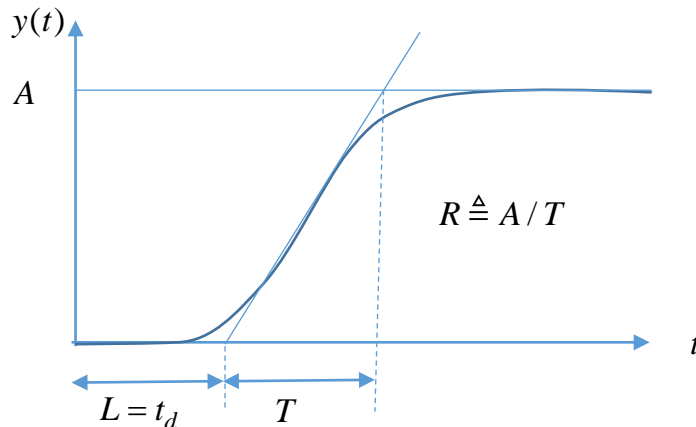
שיטת זיגלר-ניקולס מתבססת על ההנחה כי המערכת המבוקרת ניתנת לקרוב סביר על ידי פונקציית תמסורת הכוללת השהיה טהורה וקוטב, כלומר

$$P(s) = \frac{Ae^{-st_D}}{1 + s\tau}$$

פונקציית תמסורת מעין אלה נפוצות במערכות בקרה תעשייתית. ההמלצות לכיווןן התקבלו על סמך סימולציות במחשב אנלוגי, כאשר הקריטריון העיקרי היה דחיית הפרעות מיטבית.

שיטת הכיווןן של זיגלר-ניקולס מסתמכת על שתי אפשרויות למדידת תגובת המערכת:

א. מדידה בחוג פתוח: המדידה מתבצעת פה על ידי הכנסת כניסת מדרגה למערכת המבוקרת $P(s)$, ומדידת פרמטרים של התגובה. הפרמטרים הנמדדים מוראים בציר.



המלצות הכיווןן עבור שלושה סוגי בקרים הינן:

P controller: $K_P = 1 / RL$

PI controller: $K_P = 0.9 / RL, T_I = 3.3L$

PID controller: $K_P = 1.2 / RL, T_I = 2L, T_D = 0.5L$

ב. מדידה בחוג סגור (סף אי-יציבות): פה המדידה מתבצעת בחוג סגור, עם בקר P בלבד. ערך ההגבר K_P מוגדל בהדרגה עד שהמערכת מגיעה לסף יציבות ומתנדנדת בתנודה מתמדת. במצב זה נמדד ערך ההגבר K_P , שיסומן k_u , וזמן המחזור של התנודה, שיסומן P_u . ערכי הפרמטרים המומלצים עבור הבקר הינם:

P controller: $K_P = 0.5k_u$

PI controller: $K_P = 0.45k_u, T_I = 0.83P_u$

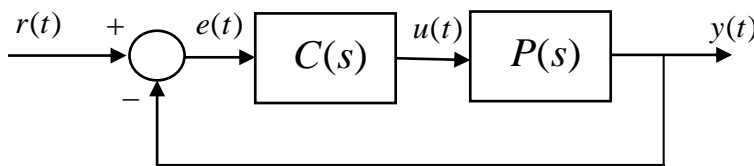
PID controller: $K_P = 1.6k_u, T_I = 0.5P_u, T_D = 0.125P_u$

נציין כי הערכים שלעיל עלולים לגרום לתגובה תנודתית יתר על המידה, ומובאים כאן בעיקר עקב חשיבותם ההיסטורית.

הרצאה 15: תכן בעזרת דיאגרמת השורשים (Root-Locus)

נעבור עתה לתיאור הגישות הקלאסיות העיקריות לתכנון בקרים למערכת משוב. בפרק זה נתאר את השימוש בדיאגרמת השורשים, ובפרק הבא את התכן בתחום התדר. שתי שיטות אלה עושות שימוש בבקרים בעלי צורה סטנדרטית, הנקראים בקרי קידום-פיגור (lead/lag compensators).

15.1. בקרי קידום/פיגור



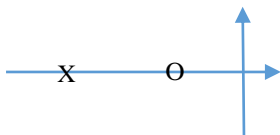
אנו דנים במערכת עם בקר טורי, כמוראה בציור. הבקר יכול חוליה אחת או יותר מהצורה הבאה:

$$C_1(s) = K \frac{s+Z}{s+P}$$

כלומר הגבר, אפס וקוטב. נסמן:

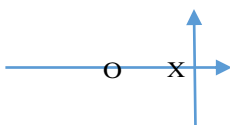
$$\alpha = \frac{Z}{P}$$

נבחין בין שני מקרים:



א. **בקר קידום** (גם: רשת קידום, בקר קידום פאזה, lead compensator):
 כלומר $0 < \alpha < 1$, $P > Z > 0$

בקר זה מקביל לבקר PD. נשים לב שהמרכיב הדומיננטי פה הוא האפס, כאשר הקוטב נועד לקזז את ההגבר הנוסף של האפס בתדרים הגבוהים. ככלל, בקר קידום מגדיל את ריסון המערכת, ובכך מאפשר הגדלת ההגבר לקבלת תגובה מהירה יותר (הגדלת רוחב סרט).



ב. **בקר פיגור** (גם: רשת קידום, בקר קידום פאזה, lag compensator):
 כלומר $\alpha > 1$, $Z > P > 0$

רשת זו מוסיפה הגבר בתדרים נמוכים, ומשפרת את שגיאות המצב במתמיד.

נעיר כי במקרה הקיצוני של $P = 0$ (קוטב בראשית) מתקבל למעשה בקר PI.

פרט למקרה הקיצוני של $P = 0$, רצוי לשמור על היחס בין האפס לקוטב בתחום $0.1 < \alpha < 10$.
 הבקר הכולל יכול לכלול חיבור טורי של מספר חוליות קידום/פיגור.

15.2. גישת התכן ודרישות ביצועים

כזכור, דיאגרמת השורשים (Root Locus) מאפשרת שרטוט של מיקום קטבי החוג הסגור מתוך תמסורת החוג. תכן בשיטת דיאגרמת השורשים מבוסס על שינוי תמסורת החוג (באמצעות בקרי קידום/אפיגור) כך שיתקבלו קטבים רצויים בחוג הסגור, אשר עונים על דרישות התכן. בפרט, אנו בוחרים מיקום רצוי לקטבים הדומיננטיים של החוג הסגור, ומוודאים ששאר הקטבים והאפסים אינם "מפריעים" יתר על המידה.

שיטת דיאגרמת-השורשים מתאימה לפיכך לעמידה בדרישות ביצועים אשר קשורות באופן ישיר למיקום מערך הקטבים והאפסים של החוג הסגור, ופרט למיקום הקטבים הדומיננטיים. אנו נתייחס לדרישות הביצועים הבאות (בהנחת יציבות כמובן):

1. מאפייני התגובה הדינאמית – ריסון ומהירות. בפרט: זמן עליה (t_r), גודל תגובת היתר (O.S.),

זמן התייצבות (t_s).

2. שגיאות המצב המתמיד.

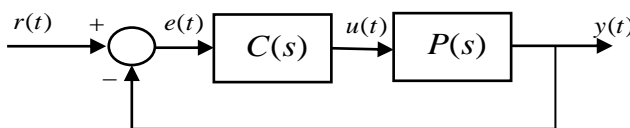
שלבי התכן הם כלהלן:

1. בחירת מיקום רצוי לקטבים הדומיננטיים של החוג הסגור כך שיתקיימו דרישות התגובה הדינאמית. הקטבים הנבחרים הם לרוב צמד קטבים מרוכבים.
2. בדיקה האם בקר הגבר פשוט מקיים את דרישות התכן.
3. באם התגובה איטית מדי (עבור מידת הריסון רצויה) - הוספת בקר **קידום** לעמידה בדרישות הדינאמיות.
4. הוספת בקר **פיגור** לשיפור שגיאות המצב המתמיד (באם נדרש).

בדוגמא הבאה (שתלווה אותנו בהמשך הפרק) נדגים את בחירת מיקום הקטבים הדומיננטיים. מומלץ לחזור פה על תכונות מערכות מסדר שני.

דוגמא: קביעת מיקום קטבים דומיננטיים.

נתבונן במערכת פשוטה של משוב יחידה, עם



$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

דרישות ביצועים לתגובה הדינאמית (תגובה לכניסת מדרגה):

(1) זמן התייצבות $t_s (\pm 2\%)$ קטן מ- 2 שניות.

(2) תגובת יתר קטנה מ- 5% : $O.S. \leq 5\%$.

יש למצוא מיקום מתאים לקטבים הדומיננטיים של החוג הסגור אשר מתאים לדרישות אלו.

פתרון: נניח כי החוג הסגור מתנהג בקירוב כמערכת מסדר שני:

$$T(s) \approx \frac{A}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad p_{1,2}^c = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

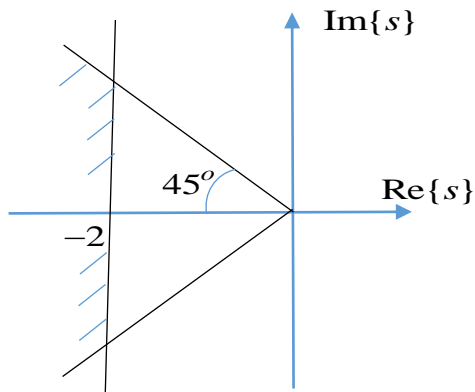
מדרישה (2), ומהגרפים (או נוחת תגובת היתר) של מערכת מסדר שני, נובע כי נדרש בקרוב:

$$\theta \triangleq \cos^{-1}(\zeta) \leq 45^\circ, \quad \underline{\zeta \geq 0.7}$$

כמו כן, ידוע כי $t_s (\pm 2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$. לקיום דרישה (1) נדרש לפיכך: $\zeta\omega_n \geq \frac{4}{t_s} = 2 [s^{-1}]$.

מצירוף שתי הדרישות מתקבל "האזור המותר"

(מקווקו) למיקום הקטבים $p_{1,2}^c$.



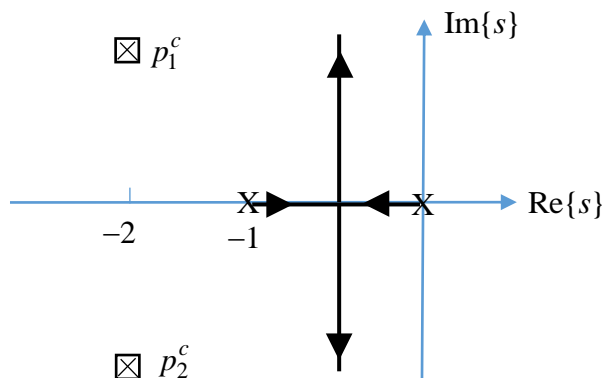
ניתן לבחור למשל $p_{1,2}^c = -2 \pm j2$

נעיר כי אין להגדיל את גודל החלק הממשי יתר על המידה, כיוון שהדבר יתבטא במערכת מהירה יותר אשר דורשת מאמץ בקרה גדול יותר. "כלל אצבע" שהזכרנו הוא כי יש לבחור קטבים מרוכבים, עם חלק מדומה לא זניח (בגבולות הדרישות).

ניתן לקחת מרווח ביטחון מסוים לגבי הריסון ותגובת היתר – נבחר להמשך $p_{1,2}^c = -2 \pm j1.8$

המשך הדוגמא: בקר הגבר

נבדוק עתה אם ניתן להשיג את הקטבים שבחרנו לחוג הסגור באמצעות בקר הגבר בלבד $C(s) = K$. לשם כך נשרטט דיאגרמת-שורשים לפי ההגבר $K > 0$. (עבור $K < 0$ המערכת אינה יציבה).



ניתן לראות כי ענפי דיאגרמת-השורשים עוברים

מימין לקטבים הרצויים. המשמעות: זמן

התייצבות ארוך יותר מהנדרש (לכל K).

בפרט, עבור הקטבים המרוכבים

המתקבלים:

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.5} = 8 \text{ sec}$$

נדרש לפיכך להוסיף בקר קידום.

15.3. תכנ בקר קידום (lead compensator)

כאמור בקר קידום הוא מסנן בעל פונקציית התמסורת $C_{lead}(s) = K \frac{s+Z}{s+P}$, כאשר $\alpha \triangleq \frac{Z}{P} < 1$.

כלומר: הוספת אפס וקוטב לתמסורת החוג, כאשר האפס קרוב יותר לראשית.

השפעה עקרונית:

הגורם הדומיננטי הוא האפס, והא דומה בפעולתו לבקר PD: הוספת ריסון למערכת. ההשפעה הטיפוסית על דיאגרמת השורשים הינה הסטת ענפי הדיאגרמה שמאלה. ניתן להבין זאת באופן מלא באמצעות כלל הזווית. אולם הדרך הפשוטה ביותר היא לבחון את השפעת הבקר על נקודת המפגש של האסימפטוטות.

$$\sigma_0 = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n - m} \quad \text{עבור המערכת המקורית (ללא בקר הקידום):}$$

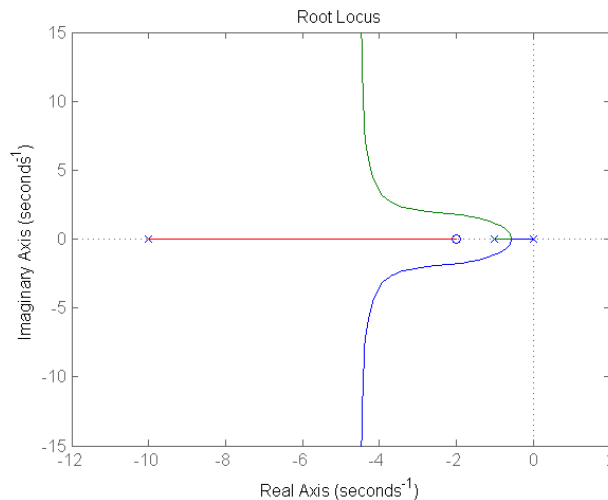
$$\sigma_0 = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j - (P - Z)}{n - m} \quad \text{לאחר הוספת בקר הקידום (קוטב } -P \text{ ואפס } -Z \text{):}$$

$$\frac{P - Z}{n - m} > 0 \quad \text{כלומר, מפגש האסימפטוטות מוסט שמאלה בשיעור}$$

המשך הדוגמא - השפעת בקר הקידום:

נוסיף למערכת המבוקרת $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ בקר קידום $C_{lead}(s) = K \frac{s+2}{s+10}$ ($\alpha = 0.2$).

תמסורת החוג עתה: $L(s) = K \frac{s+2}{s(s+1)(s+10)}$



ניתן לראות כי הענפים המרוכבים אכן הוסטו שמאלה (בהתאם לתזוזה לאסימפטוטות). עם זאת:

1. הענפים עוברים בקרבת הקטבים הרצויים $p_{1,2}^c = -2 \pm j1.8$, אך לא ממש דרכם. נראה מייד כיצד לוודא כי העפים יעברו דרך הקטבים הרצויים.
2. נוצר ענף נוסף – שלישי, המייצג קוטב נוסף של החוג הסגור. יהיה עלינו לוודא שקוטב זה אינו הדומיננטי.

נפרט עתה את שלבי תהליך התכנ.

תכנ בקר קידום:

1. נקבעו מיקום נדרש עבור הקטבים הדומיננטיים $p_{1,2}^c$ של החוג הסגור, לקיום הדרישות לגבי התגובה הדינאמית של המערכת.

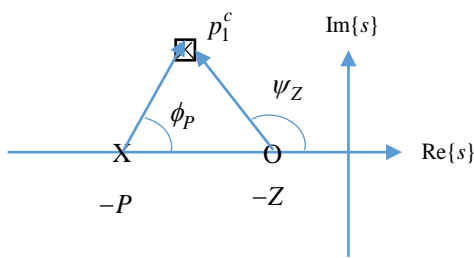
2. שרטטו דיאגרמת שורשים עם בקר הגבר בלבד: $L(s) = KP(s), K > 0$.
באם ענפי דיאגרמת השורשים עוברים מימין לקטבים הרצויים – נוסיף בקר קידום

$$C(s) = K \frac{s + Z}{s + P}$$

3. בחרו את ערכי Z, P כך שיתקיים **כלל הזווית** בנקודות של הקוטב הנדרש: $s_0 = p_1^c$.
נרשום את כלל הזווית ביחס לנקודה זו:

$$\sum_i \phi_i - \sum_j \psi_j + \phi_P - \psi_Z = 180^\circ$$

שני האיברים הראשונים הם הזוויות מהקטבים והאפסים של המערכת הקיימת $P(s)$ אל



הנקודה p_1^c . השניים הנוספים הם תרומת בקר הקידום:

ממשוואת הזוויות נקבל:

$$\psi_Z - \phi_P = \sum_i \phi_i - \sum_j \psi_j - 180^\circ$$

זו "תוספת הזווית" הנדרשת מבקר הקידום לקיום כלל הזווית בנקודה הרצויה.

זו משוואה אחת עם שני נעלמים. נבחר ראשית את Z , ואז נוכל לחשב את P .

- מקובל לבחור את Z מימין לקוטב הדומיננטי, ואת P משמאלו.
- משיקולים שונים נדרש לשמור על היחס $\alpha \triangleq Z/P \geq 0.1$. במידת הצורך ניתן להוסיף שתי חוליות של רשת קידום.

4. חשבו את ההגבר הנדרש K כל ידי הפעלת כלל ההגבר בנקודה p_1^c : $K = 1 / \left| P(s) \frac{s+Z}{s+P} \right|_{s=p_1^c}$

5. בידקו את קיום דרישות התכן (באנליזה וסימולציה). בפרט יש לוודא כי הקטבים $p_{1,2}^c$ הם אכן הדומיננטיים. באם הדרישות לא מתקיימות – יש לבצע תיקון מתאים, או לחזור לשלב 3.

המשך הדוגמא – תכן בקר הקידום: ביצענו כבר את שלבים 1,2. נמשיך בשלב 3 – בחירת את ערכי Z, P . כלל הזוית לנקודה $p_1^c = -2 + j1.8$:

$$\psi_Z - \phi_P = \phi_1 + \phi_2 - 180^\circ$$

$$\phi_1 = 180 - \tan^{-1}\left(\frac{1.8}{2}\right) = 138^\circ, \quad \phi_2 = 180 - \tan^{-1}\left(\frac{1.8}{2-1}\right) = 119^\circ$$

$$\underline{\psi_Z - \phi_P = 77^\circ}$$

נבחר את Z . ברור כי נדרש $\psi_Z > 77^\circ$.

נסה $Z = 2$. $\psi_Z = 90^\circ \Leftarrow$ לחישוב P :

$$\phi_P = \tan^{-1}\left(\frac{1.8}{P-2}\right) = \psi_Z - 77^\circ = 13^\circ$$

$$P = 2 + \tan(13^\circ) / 1.8 = 10$$

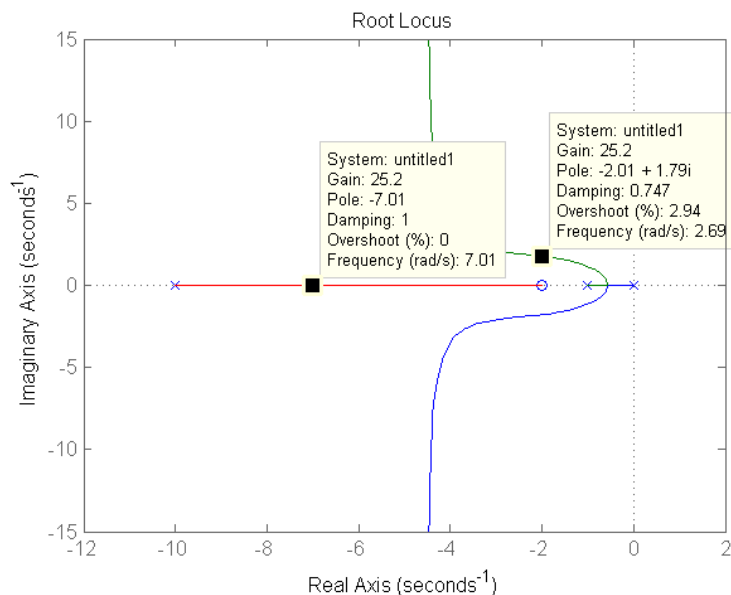
$$C(s) = K \frac{s+2}{s+10} \quad \text{קיבלנו:}$$

שלב 4: את K נחשב מכלל ההגבר:

$$K = 1 / \left| P(s) \frac{s+Z}{s+P} \right|_{s=p_1^c} = \left| s(s+1) \frac{s+10}{s+2} \right|_{s=-2+j1.8} = 25.2$$

שלב 5: בדיקת התכן.

דיאגרמת מיקום הקטבים המתקבלת:

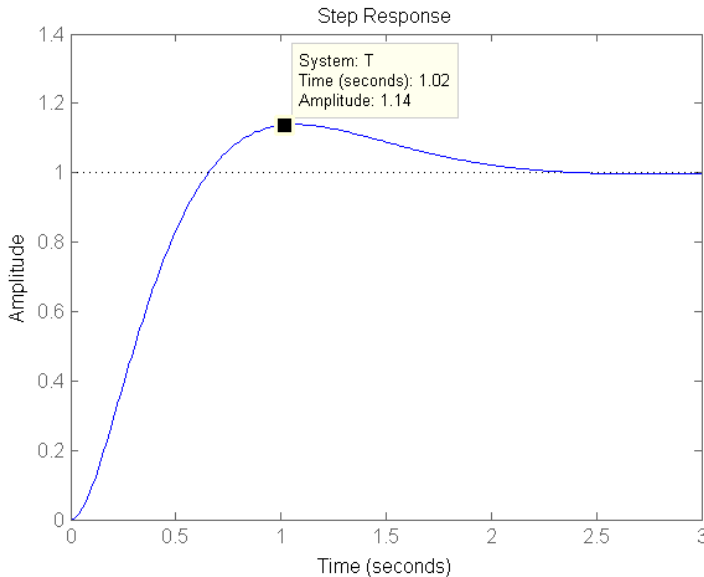


נחשב את ערכי כל הקטבים והאפסים של תמסורת החוג הסגור. ניתן לראות מהדיאגרמה כי מתקבלים שלושה קטבים בחוג סגור, מתוכם שניים בנקודות $p_{1,2}^c = -2 \pm j1.8$ לפי התכנון. את הקוטב השלישי ניתן למצוא פה ע"י פתרון המשוואה האופיינית, או בשימוש בכלל מרכז הכובד :

$$p_1^c + p_2^c + p_3^c = p_1 + p_2 + p_3 = 0 - 1 - 10 = -11 \Rightarrow p_3^c = -7$$

קוטב זה אכן אינו דומיננטי (רחוק במידה סבירה שמאלה ביחס לשני הראשונים). בנוסף לקטבים, לתמסורת החוג הסגור $T(s)$ יהיה גם אפס שזהה לאפס של התמסורת הקדמית, בנקודה (-2). זה האפס שהוספנו בבקר הקידום. אפס זה עשוי להשפיע על התגובה, בכיוון של הגדלת תגובת היתר בתגובה למדרגה. נודא ממצאים אלה – בחישוב ישיר,

$$T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{25.2(s + 2)}{s(s + 1)(s + 10) + 25.2(s + 2)} = \dots$$



נבדוק לבסוף את התגובה למדרגה :

ניתן לראות כי זמן ההתייצבות הוא בערך 2 שניות בנדרש. תגובת היתר היא כ- 14%, כלומר גדולה מדרישת התכן שהינה 5%. ניתן לייחס סטייה זו להשפעת האפס בתמסורת.

6. אפשרויות לשיפור התכן : כיצד ניתן להקטין את תגובת היתר? נבחן מספר אפשרויות :

א. הקטנת ההגבר. הקטנה כזו תגדיל את זמן ההתייצבות, וההשפעה על תגובת היתר חלשה. לכן נפסול אפשרות זו.

ב. הוספת מסנן מקדים : הוספת מסנן מקדים $F(s) = \frac{2}{s + 2}$ לפני חוג המשוב תבטל את השפעת

האפס, ותקטין בהתאם את תגובת היתר.

ג. העברת החלק הדינאמי של הבקר למשוב (ראו בקר PD) : $C(s) = \frac{25.2}{s}$, $H(s) = \frac{5(s+2)}{s+10}$

אפס של $T(s)$ יעבור עתה לנקודה (-10), והשפעתו תהיה קטנה.

ד. חזרה לשלב 3, או אף לשלב 1 – ביצוע תכן מחודש.

אנו נחזור לשלב 3, ונחפש מיקום מוצלח יותר לאפס ולקוטב של הבקר. קודם החלטנו למקם את האפס של הבקר בנקודה (-2). לאיפה כדאי להזיזו?

בהתאם לכלל האצבע שציינו בהתחלה, ננסה להזיז את האפס מעט ימינה (יחסית לקטבים $p_{1,2}^c$).

במערכת הנוכחית, פתרון פשוט הוא למקם את האפס $-Z$ על הקוטב ב-(-1) של המערכת $P(s)$,

כלומר $Z = 1$. בכך מתקבל (בקרוּב, עד כמה שהמודל מדויק) צמצום בתמסורת הקדמית:

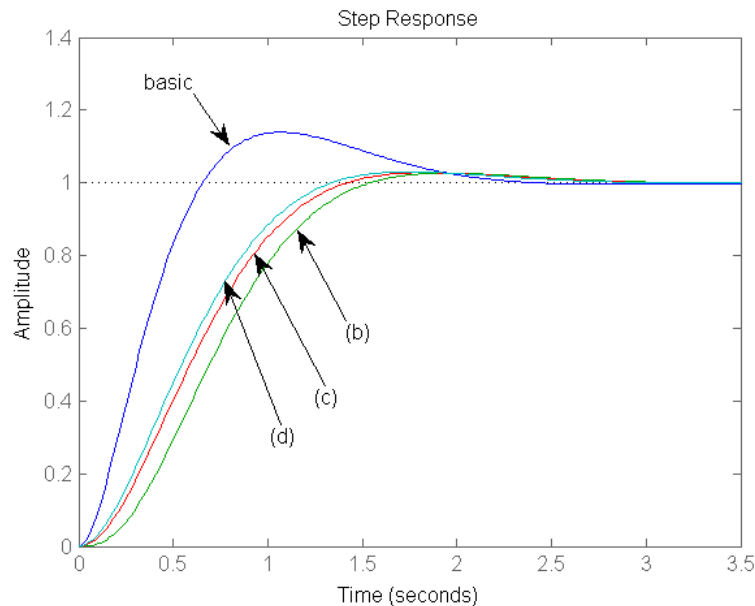
$$C(s)P(s) = K \frac{s+1}{s+P} \frac{1}{s(s+1)} = K \frac{1}{s(s+P)}$$

צמצום כזה מותר כל עוד הקוטב יציב ואינו קרוב "מדי" לציר המדומה.

קיבלנו מערכת פשוטה מסדר שני, קל לראות (בעזרת דיאגרמת הקטבים, או מהמשוואה

האופיינית) שלקבלת הקטבים הנדרשים $p_{1,2}^c = -2 \pm j1.8$ יש לבחור $P = -4$, $K = 7.24$.

התגובה למדרגה המתקבלת עבור שלוש אפשרויות השיפור האחרונות מוראית בציר. כולן עומדות בדרישות התכן.



15.4. תכן בקר פיגור (lag compensator)

בקר פיגור הינו בעל הצורה: $C_{lag}(s) = \frac{s + Z}{s + P}$

כאשר $\alpha \triangleq \frac{Z}{P} > 1$. הוא מתווסף לבקר הגבר (או בקר קידום) על מנת לשפר (להגדיל) את קבועי

שגיאת המצב המתמיד, ואת הגבר המערכת בתדרים הנמוכים. באופן טיפוסי K_{lag} .

הגדלת קבועי שגיאת המתמיד מתקבלת עקב כך ש- $C_{lag}(0) = \frac{Z}{P} = \alpha > 1$. הקבוע הסופי של שגיאת המצב המתמיד (K_p, K_v, K_a או בהתאם לסוג המערכת) יגדל ביחס זה, כלומר פי α , ובהתאם שגיאת המצב המתמיד הסופית תקטן פי α .

נציין כי בקר PI מתקבל כמקרה פרטי של בקר זה, עם $P = 0$ (קוטב בראשית), ובהתאם $\alpha = \infty$. פרט למקרה זה, מומלץ לשמור על $\alpha \leq 10$.

תהליך התכן של רשת פיגור:

1. בצעו תכן של בקר הגבר או בקר קידום (אם צריך) כדי לקיים את דרישות התגובה הדינאמית. נניח קטבים דומיננטיים $p_{1,2}^c$.
2. בידקו אם שגיאות המצב המתמיד (או קבועי השגיאה) עומדות בדרישות התכן. באם לא, יש להוסיף בקר פיגור.
3. נניח שדרושה הגדלת קבוע השגיאה המתאים (הקטנת השגיאה) פי α_0 . נוסיף בקר פיגור עם $\alpha = \alpha_0$.
4. בחירת Z, P : נמקם את Z קרוב לראשית (בערך פי 10, כדקדה) ביחס לקטבים הדומיננטיים $p_{1,2}^c$ של החוג הסגור. מכאן, $P = Z / \alpha$.

כלל 4 נועד להבטיח כי הוספת בקר הפיגור תשנה אך מעט את מיקום הקטבים הדומיננטיים (ואת התגובה הדינאמית). זאת כי כלל הפאזה לא מופר באופן משמעותי ע"י הוספת האפס והקוטב, כיוון שהזוויות משניהם אתל הקוטב הדומיננטי כמעט זהה, ומכיוון שהזוויות מופיעות בסימן הפוך בכלל הזווית הן מבטלות זו את זו בקירוב.

המשך הדוגמא: הוספת רשת פיגור.

נניח כי נוספה דרישת תכן הבאה:

(3) שגיאת המצב המתמיד לכניסת ריצה בשיפוע 10 תהיה קטנה מ-0.5.

נמשיך עם התכן הראשון של רשת הקידום (בהנחה שתגובת יתר של 13% מקובלת), כלומר

$$C_{lead}(s) = 25.2 \frac{s+2}{s+10}, \text{ וקטבים דומיננטיים } p_{1,2}^c = -2 \pm j1.8.$$

נבדוק את קיום דרישה (3). נוח לעבוד עם קבועי השגיאה. לפי הדרישה, נדרש קבוע שגיאת ריצה

$$K_v \geq \frac{10}{0.5} = 20.$$

במערכת שלנו (ללא בקר פיגור), $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, והמערכת מסוג 1. $G(s) = C_{lead}(s)P(s)$

לפיכך

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0^+} sG(s) = 25.2 \frac{2}{10} = 5.04 \text{ sec}^{-1}$$

נדרשת הגדלת קבוע השגיאה פי 4 לפחות. נבחר $\alpha = 5$. כמו כן, בהתייחס לקטבים

הדומיננטיים $p_{1,2}^c = -2 \pm j1.8$ הנוכחיים, נבחר

$$Z = 0.25 \Rightarrow P = Z / \alpha = 0.05$$

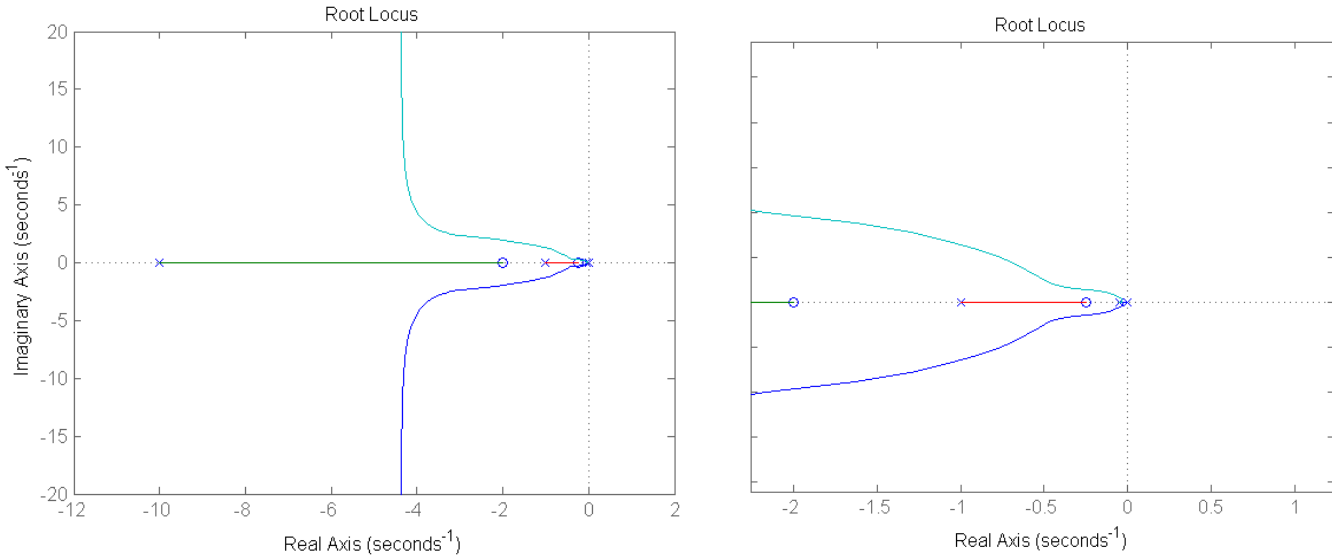
הבקר הכולל שקיבלנו היו:

$$C(s) = C_{lead}(s)C_{lag}(s) = 25.2 \frac{s+2}{s+10} \frac{s+0.25}{s+0.05}$$

תמסורת החוג הסגור הינה כמובן $T(s) = CP / (1 + CP)$

המשך הדוגמה – בדיקת התכן:

דיאגרמת השורשים המתקבלת עתה (מימין הגדלה של אזור ההוספה):



ניתן לראות כי צורת הענפים באזור הקטבים הדומיננטיים לא השתנתה. עם זאת, נוסף קוטב נוסף (רביעי) לחוג הסגור, קרוב לראשית. אנו מצפים שקוטב זה לא יהיה דומיננטי עקב הקירבה לאפס של בקר הפיגור.

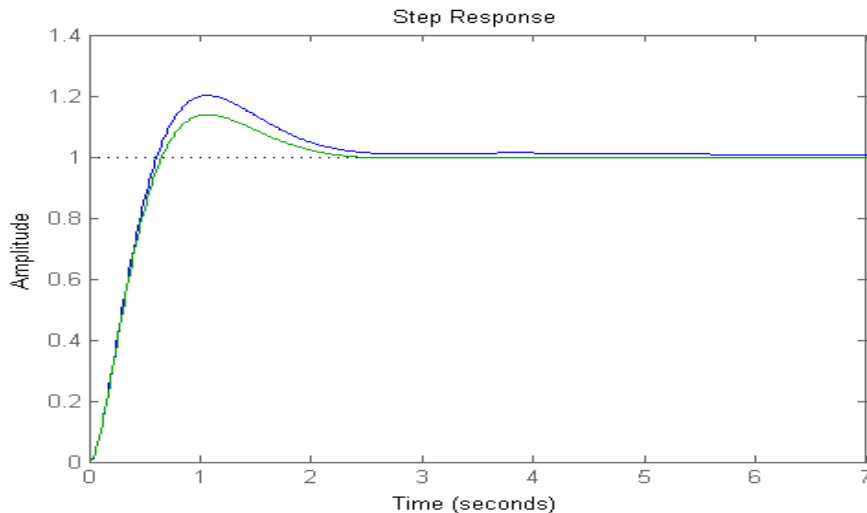
קטבים ואפסים של תמסורת החוג הסגור $T(s)$: הקטבים מתקבלים (ממטלב) בנקודות

$$p_{1,2}^c = -1.82 \pm j1.86, \quad p_3^c = -7.16, \quad p_4^c = -0.259$$

אפסי החוג הסגור זהים לאלה של התמסורת הקדמית: $z_1^c = -2, \quad z_2^c = -0.25$

ניתן רואים תזוזה קטנה של הקטבים הקודמים עקב הוספת בקר הפיגור. הקוטב והאפס החדשים (z_2^c, p_4^c) קרובים ומצטמצמים בקירוב סביר.

תגובה למדרגה: התגובה לפני ואחרי הוספת בקר הפיגור מוראית בציור. ניתן להבחין בהגדלת תגובת היתר. במידה ונדרש להקטינה – יש לשוב לשלבי תכן קודמים.



סיכום הפרק :

- בפרק זה סקרנו גישה (אחת) לתכנון בקרים מסוג פיגור וקידום.
- בקר קידום משמש לצורך שיפור התגובה הדינאמית – הוספת ריסון, אשר מאפשרת הגדלת ההגבר ובכך שיפור מהירות התגובה.
- בקר פיגור מוסיף הגבר בתדרים הנמוכים בלבד, ומשמש לצורך הגדלת קבועי השגיאה תוך השפעה מעטה על התגובה הדינאמית.
- ראינו כיצד ניתן לשלב תכן של שני בקרים אלה לבקר "קידום-פיגור". בגישה שהצגנו בקר הקידום מתוכנן ראשון, ובקר הפיגור נוסף לאחריו.

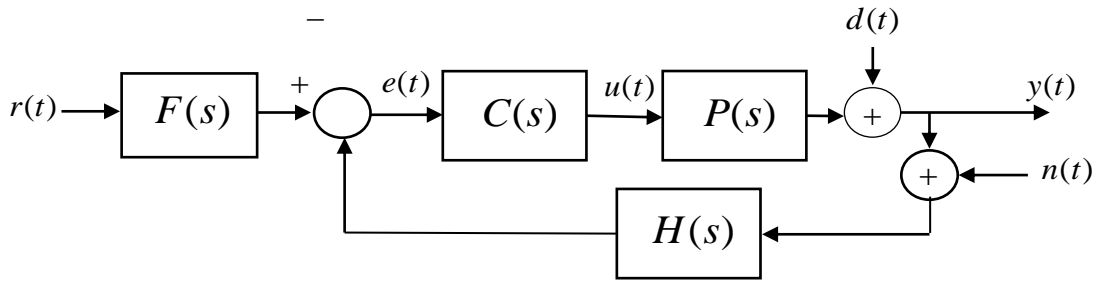
בפרק הבא נתאר את הגישה לתכן בקרים אלה מנקודת הראות של תגובת התדר.

הרצאה 16: תכן בתחום התדר

תכן בתחום התדר מאפשר התייחסות למגוון רחב של תכונות ודרישות ביצועים מהמערכת. קיימות מספר שיטות תכן בתחום התדר, פה נתמקד בשיטה הקלאסית של עיצוב תמסורת החוג – Loop Shaping, וזאת בעזרת דיאגרמת בודה.

16.1. מאפייני ביצועים בתחום התדר.

נתבונן בחוג הבקרה הבסיסי:



נזכיר את הסימונים הבאים:

$$G(s) = C(s)P(s)$$

תמסורת קדמית:

$$L(s) = G(s)H(s)$$

תמסורת החוג:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

פונקציית הרגישות:

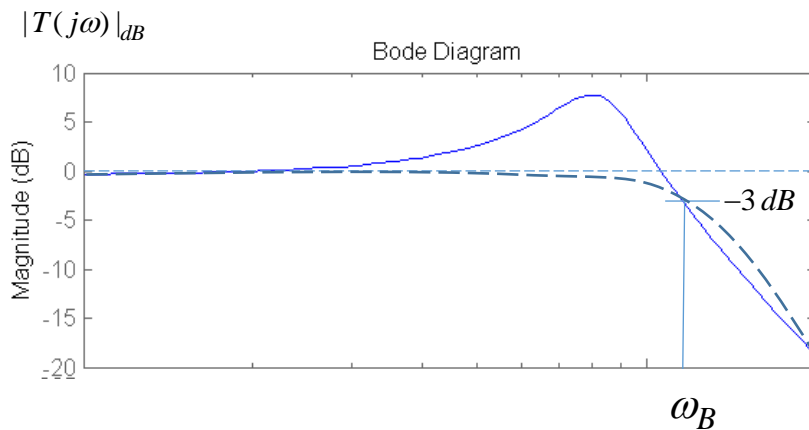
$$T(s) = F(s) \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

תמסורת המערכת:

מטרתנו:

- א. לבטא את תכונות שונות של מערכת עקיבה במונחים של תגובות התדר, בפרט $T(j\omega)$, $S(j\omega)$.
- ב. לתרגם תכונות אלה לדרישות על תמסורת החוג $L(j\omega)$ (או התמסורת הקדמית $G(s)$), אותן נרצה לעצב באמצעות בקרי קידום ופיגור.

(1) רוחב סרט (Bandwidth):



- רוחב הסרט של המערכת (בחוג סגור) ω_B הוא מדד עיקרי למהירות התגובה של המערכת.
- המערכת תעקוב באופן נאמן אחר כניסות $r(t)$ בתחום תדרים עד ω_B , אך לא בתדרים גבוהים יותר.
- ככל שרוחב הסרט גדול יותר, כך אנו מצפים שהתגובה למדרגה תהיה מהירה יותר. כלל האצבע הבא נותן קשר מקורב בין זמן העלייה של התגובה למדרגה, לרוחב הסרט של המערכת:

$$t_r \approx \frac{2}{\omega_B}$$

רוחב הסרט הוא תכונה של תמסורת המערכת (בחוג סגור) $T(s)$. נאפיין עתה (בקירוב) את רוחב הסרט במונחים של התמסורת הקדמית $G(s)$. נשים לב כי:

$$T(j\omega) = F(j\omega) \frac{G(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = \frac{F(j\omega)}{H(j\omega)} \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

$$\approx \frac{F(j\omega)}{H(j\omega)} \cdot \begin{cases} 1 & : |L(j\omega)| \gg 1 \\ L(j\omega) & : |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

מכאן ניתן להסיק:

- בתדרים שבהם $|L(j\omega)| \gg 1$, נקבל $T(j\omega) \approx \frac{F(j\omega)}{H(j\omega)}$

לקבלת $T(j\omega) \approx 1$, נדרוש, בנוסף, כי $F(j\omega) / H(j\omega) \approx 1$ בתדרים אלה (באופן טיפוסי):

$$(H(j\omega) \approx 1, F(j\omega) \approx 1)$$

- התנאי $|L(j\omega)| \gg 1$ חיוני על מנת לקבל תלות חלשה בתמסורת המערכת המבוקרת $P(s)$. תחום התדרים שבו תנאי זה מתקיים הוא התחום שבו יתרונות המשוב באים לידי ביטוי מלא. עקב כך, נדרש

$$\underline{|L(j\omega)| \gg 1, \quad \omega \ll \omega_B} \quad \bullet$$

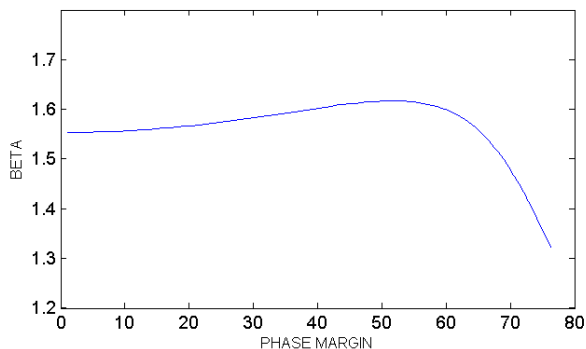
- כאשר $|L(j\omega)| \ll 1$, נקבל $|T(j\omega)| \ll 1$.
- משתי התכונות האחרונות, נסיק כי רוחב הסרט ω_B נמצא ב"אזור המעבר" בין $|L(j\omega)| > 1$ ל- $|L(j\omega)| < 1$. קשר זה ניתן לתיאור כמותי יותר, כלהלן.

כזכור, תדר החציה של חוג המשוב ($\omega_{c.o.}$, cross-over frequency) מוגדר כתדר שבו מתקיים

$$|L(j\omega_{c.o.})| = 1$$

$$\omega_B = \beta \omega_{c.o.}, \quad 1 \leq \beta \leq 2$$

לצורך התכן ניתן להשתמש בהערכה התחלתית של $\beta = 1.6$.



הערכה זו מתקבלת למשל מהקשר הבא שמתקיים במערכת סטנדרטית מסדר שני, בין β לעודף הפאזה של החוג:

- הערה לגבי בחירת רוחב הסרט: נדגיש כי אין להגדיל את רוחב הסרט של מערכת מעבר לנדרש. לפי דרישות הביצועים. הגדלת רוחב הסרט עלולה להיות בעייתית במספר היבטים:
 - מאמץ הבקרה: בתדרים בהם $P(j\omega)$ נמוך (כלומר: המערכת "מתקשה" להגיב במהירות הנדרשת), נדרש אות כניסה $u(t)$ גדול כדי לקבל יציאה משמעותית. לצורך כך יש צורך בהשקעת אנרגיה מרובה ובהתקנת "מפעיל" מתאים (למשל: מנוע סילון למטוס קל...).
 - הגברת רעשי מדידה בתדר גבוה (ראו להלן).
 - עירור "מודים" (כולל כאלה שאינם כלולים במודל) המצויים בתדרים הגבוהים – כגון רזוננסים של מערכות מכניות.

(2) ריסון ועודף פאזה :

עודף הפאזה הוא כזכור תכונה של תמסורת החוג $L(s)$:

$$P.M. = \angle L(j\omega_{c.o.}) + 180^\circ, \quad \omega_{c.o.} : |L(j\omega)| = 1$$

עודף הפאזה קשור לתכונות הבאות של החוג הסגור :

- יציבות : לכך נדרש $P.M. > 0$.
- עמידות (רובוסטיות) לשינויים במערכת : לכך נדרוש באופן טיפוסי $P.M.$ של 40° או יותר.
- **ריסון ותגובת יתר** : "ריסון" הוא איפיון כללי של תנודתיות התגובה למדרגה של המערכת. למעשה הוא מוגדר כמותית רק במערכות מסדר שני, ומורחב איכותית למקרים כללים יותר. מדד כמותי הקשור לריסון הוא תגובת היתר (Overshoot) של התגובה למדרגה.

להגדרת הקשר באופן כמותי אנו משתמשים (בקרום ראשון) בקשר הבא הלקוח ממערכת סטנדרטית מסדר שני :

$$\zeta \approx \frac{P.M.}{100}$$

אופן השימוש : בהינתן דרישה לתגובת יתר (תכונה של החוג הסגור), ניתן לתרגמה לדרישה על מקדם הריסון ζ לפי נוסחאות מערכת מסדר שני, ומכאן לקבל דרישה על עודף הפאזה (שהוא תכונה של $L(s)$).

(3) שגיאות מצב-מתמיד :

כזכור : עבור מערכת משוּב יחידה, קבועי שגיאות המצב המתמיד למדרגה הריצה והתאוצה הינם :

$$K_{p/v/a} = \lim_{s \rightarrow 0^+} s^{0/1/2} G(s)$$

את קבועי השגיאה ניתן לקבל מתוך דיאגרמת בודה, ובפרט מתוך אזור התדרים הנמוכים בדיאגרמת ההגבר $|G(j\omega)|$:

- סוג המערכת נקבע על ידי מספר הקטבים בראשית. במערכת מסוג k , בדיאגרמת בודה של ההגבר $|G(j\omega)|$ נראה שיפוע של $-20k [db/dec]$.
- עבור מערכת מסוג 0 (שבה K_p סופי) מתקיים :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0^+} G(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = G(j0)$$

ערך זה יופיע במפורש בדיאגרמת בודה באזור התדר הנמוך.

- עבור מערכת מסוג 1 (שם K_v סופי) ניתן לרשום :

$$G(s) = \frac{A(1 + s\tau_1) \cdots}{s(1 + s\tau_2) \cdots}$$

כאשר $K_v = A$. לפיכך, דיאגרמת בודה האסימפטוטית בתדרים הנמוכים (לפני תחילת ההשפעה

של הקטבים והאפסים הנוספים) היא לעשה ציור של $\left| \frac{A}{j\omega} \right|$. ברור שניתן לקבל את ערכו של A

מתוך הגבר הדיאגרמה בתדר כלשהו בקטע זה. להמחשה:

$$G(j0.1) = 54dB = 500 = \left| \frac{A}{j0.1} \right| \Rightarrow K_v = A = 500 * 0.1 = 50$$

- החישוב עבור מערכת מסוג 2 הינו דומה.

הערה: כאשר $H(s) \neq 1$ או $F(s) \neq 1$ יש לבצע את החישובים הנ"ל לתמסורת ה"מתוקנת" (ראו פרק שגיאות מצב-מתמיד):

$$\bar{G}(s) = G(s) \frac{F(s)}{1 + G(s)[H(s) - F(s)]}$$

(4) שגיאות עקיבה בתחום התדר:

ניתן להבחין בשני אותות שגיאה הקשורים בכניסת הייחוס $r(t)$:

$$\bar{E}(j\omega) = R(j\omega) - Y(j\omega) \quad \text{שגיאת העקיבה:}$$

$$E(j\omega) = R(j\omega) - H(j\omega)Y(j\omega) \quad \text{שגיאת המשוב:}$$

כאשר $H(j\omega) \approx 1$, שתי השגיאות דומות בגודלן (הן זהות כאשר $H(s) \equiv 1$). נתמקד לשם פשטות בשנייה. מתקיים:

$$\frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{1 + L(j\omega)} \equiv S(j\omega)$$

לשגיאה נמוכה בתדר ω נדרש $|S(j\omega)| \ll 1$, או באופן שקול $|L(j\omega)| \gg 1$.

נעמיד קשר זה על בסיס כמותי. נניח כי נדרש:

$$\left| \frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \leq \frac{1}{A_0} \ll 1, \quad \forall \omega \leq \omega_0$$

$$\left| S(j\omega) \right| \leq \frac{1}{A_0}, \quad \omega \leq \omega_0 \quad \text{דרישה זו שקולה ל:}$$

לצורך זה נדרש $|L(j\omega)| \gg 1$. ניתן לפיכך להזניח את ה-1 במכנה, ונקבל בקירוב את התנאי:

$$\left| L(j\omega) \right| \geq A_0, \quad \omega \leq \omega_0$$

דרישה זו מתורגמת ל"איזור אסור" בתחום התדרים הנמוכים בדיאגרמת בודה של $L(j\omega)$ (ראו להלן).

(5) דחיית הפרעות:

הפרעות חיצוניות מיוצגות בדיאגרמת המערכת על ידי אות ההפרעה $d(t)$. מרבית האנרגיה של ההפרעות (המיוחסות ליציאת המערכת) מרוכזת בתדרים הנמוכים, ואנו מעוניינים בהנחתת הפרעות הנמצאות בתחום רוחב הסרט של המערכת. השגיאה עקב ההפרעה $d(t)$ מחושבת כאשר $r(t) = 0$, ולפיכך הינה $e(t) = r(t) - y(t) = -y(t)$. נקבל

$$\frac{-E(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{1}{1 + L(j\omega)} = S(j\omega)$$

לפיכך, ההפרעה מונחתת באופן משמעותי בתדרים בהם $|L(j\omega)| \gg 1$. כמותית, דרישה של "הנחתה פי $A_1 > 1$ לפחות של הפרעות בתדר עד ω_1 " שקולה בקירוב לדרישה:

$$|L(j\omega)| \geq A_1, \quad \omega \leq \omega_1$$

(6) הנחתת רעשי מדידה:

רעשי המדידה $n(t)$ מרוכזים לרוב בתחום התדרים הגבוהים. מתקיים:

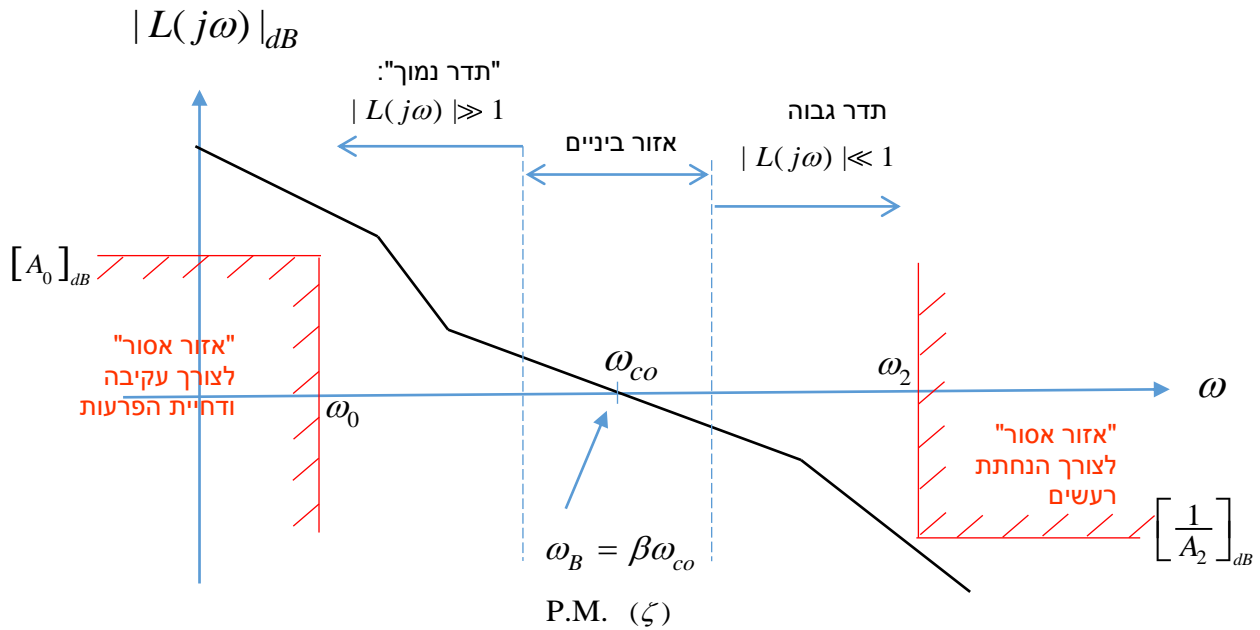
$$\frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

להנחתת הרעשים נדרש $|L(j\omega)| \ll 1$. דרישה זו מנוגדת לדרישה של $|L(j\omega)| \gg 1$ בתחום רוחב הסרט של המערכת, ולפיכך ניתן לקיימה רק בתדרים גבוהים יותר. כמותית, דרישה של "הנחתה פי $A_2 > 1$ לפחות של רעשי מדידה בתדר גבוה מ- ω_2 " שקולה בקירוב לדרישה:

$$|L(j\omega)| \leq \frac{1}{A_2}, \quad \omega \leq \omega_2$$

נציין כי הדרישה $|L(j\omega)| \ll 1$ בתדרים הגבוהים חשובה גם למניעת ערור של דינמיקה נוספת של המערכת המבוקרת שעשויה להתעורר בתדרים אלה, כגון רזוננסים מכניים.

התמונה הכוללת: ראינו כי מרבית הדרישות קשורות בתמסורת החוג $L(s)$. נסכם דרישות אלו על גבי דיאגרמת ההגבר הבאה:



הערות נוספות:

א. כלל אצבע לתכן – שיפוע עקום ההגבר של $L(j\omega)$ בתדר ω_{co} צריך להיות $-20\text{dB}/\text{dec}$. זאת לצורך עמידות בשינויים במערכת (רובוסטיות).

ב. סיבה נוספת לשמירה על $|S(j\omega)| \ll 1$ (פונקציית רגישות קטנה) בתחום רוחב הסרט היא זו המעניקה לפונקציה זו את שמה – הקטנת הרגישות של התמסורת לשינוי בפרמטרי המערכת. נזכור כי

$$T(s) = F(s) \frac{G(s)}{1+L(s)} = F(s) \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$$

נניח כי חל שינוי ΔP ב- $P(j\omega)$ בתדר מסוים ω . מה יהיה השינוי ΔT ב- $T(j\omega)$? נוח להתייחס לשינויים יחסיים. נחשב בקירוב, עבור סטיות קטנות:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T/T(j\omega)}{\Delta P/P(j\omega)} &\approx \frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = F \frac{(1+CPH)C - CH(CP)}{(1+CPH)^2} \frac{P}{T} \\ &= F \frac{C}{(1+CPH)^2} \frac{P}{T} = \frac{1}{1+CPH} = \frac{1}{1+L} = \underline{S(j\omega)} \end{aligned}$$

לפיכך: $|S(j\omega_0)| \ll 1$ פירושו רגישות יחסית קטנה. לדוגמא: נניח כי $|S(j\omega_0)| = 0.03$, ו-

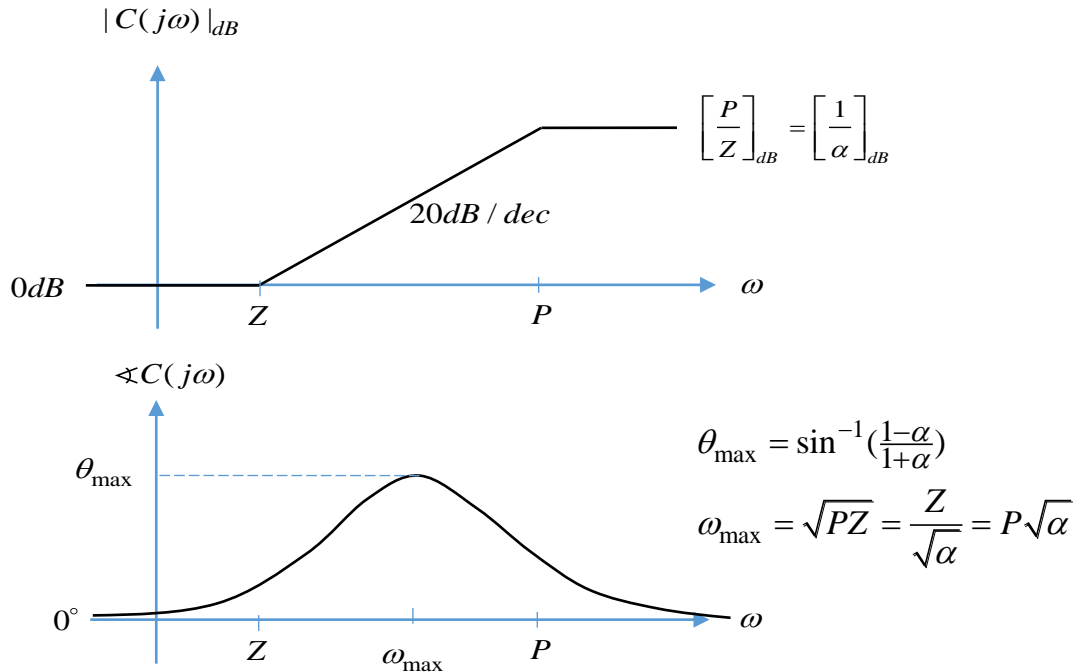
$|P(j\omega_0)|$ השתנה ב-10%. אזי השינוי ב- $|T(j\omega_0)|$ יהיה $10\% \cdot 0.03 = 0.3\%$.

16.2. תכן בקר קידום

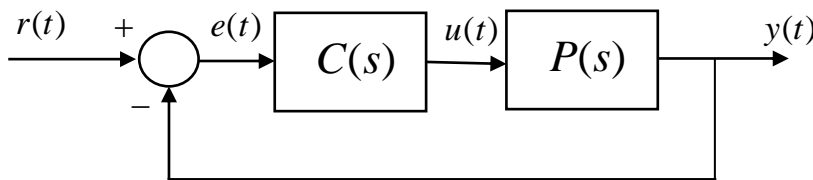
לצורך תכן בתדר נוח לרשום את בקר הקידום (אותו הכרנו בפרק הקודם) באופן הבא:

$$C(s) = K \frac{1+s/Z}{1+s/P}, \quad \alpha \triangleq \frac{Z}{P} < 1$$

עבור הגבר $K = 1$, עקומי בודה של $C(j\omega)$ הינם:



נתייחס למערכת משוב יחידה:



פעולת בקר הקידום בתחום התדר: בקר הקידום מאפשר **הוספת פאזה** בתחום תדרים מסויים. אם נוסיף פאזה זו באיזור ω_{co} (תדר חציית 0_{dB} של תמסורת החוג), נוכל להגדיל את **עודף הפאזה**, ובכך להגדיל את ריסון המערכת בחוג סגור (או אף לייצב מערכת שאינה יציבה).

הפרמטר α קובע את θ_{max} , שהוא שיעור תוספת הפאזה המכסימאלי של הבקר. עבור $\alpha = 0.1$ מתקבל $\theta_{max} \approx 55^\circ$. באם נדרשת תוספת גדולה יותר ניתן להוסיף שתי דרגות קידום בטור.

יש לשים לב שרשת הקידום מוסיפה הגבר בתדרים גבוהים (תופעה בלתי רצויה בד"כ), ויש להתחשב בכך בקביעת ההגבר K .

קיימות מספר גישות אפשריות לתכן בקר בתחום התדר, הנגזרות מאופי דרישות התכן. אנו נניח כי דרישות הביצועים הנתונות הינן: ω_{co} (הנגזר מרוחב הסרט הנדרש), עודף הפאזה (הנגזר מהריסון הנדרש), וקבועי שגיאת המצב המתמיד. התכנון יתבצע בשני שלבים:

א. בעזרת בקר הקידום נוודא את קיום הדרישות עבור ω_{co} ועודף הפאזה.

ב. לאחר מכן נוסיף בקר פיגור, לצורך הגדלת קבועי השגיאה (אם נדרש).

שלבי תכנון רשת קידום:

א. מתוך דרישות הביצועים, נקבע את תדר החציה $\bar{\omega}_{co}$ ועודף הפאזה המינימאלי $\bar{\phi}_M$ הנדרשים.

ב. נבדוק באם ניתן לקיים הדרישות באמצעות בקר הגבר, $C(s) = K$:

באם $\bar{\phi}_M \geq \angle P(\bar{\omega}_{co}) + 180^\circ$: נבחר הגבר K המקיים $|P(\bar{\omega}_{co})| = 1$,

ונקבל $\omega_{co} = \bar{\omega}_{co}$, ועודף פאזה $\phi_M = \angle P(\bar{\omega}_{co}) + 180^\circ \geq \bar{\phi}_M$, כנדרש.

אחרת: נמשיך לתכנון רשת הקידום.

בחירת פרמטרי הבקר:

ג. נחשב את הפאזה החסרה לקיום דרישת עודף הפאזה בתדר $\bar{\omega}_{co}$:

$$\Delta\theta = \bar{\phi}_M - (\angle P(\bar{\omega}_{co}) + 180^\circ)$$

ד. נבחר בקר קידום עם הפרמטרים

$$\theta_{\max} = \Delta\theta \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin(\theta_{\max})}{1 + \sin(\theta_{\max})}$$

$$\omega_{\max} = \bar{\omega}_{co} \Rightarrow P = Z / \alpha, Z = \omega_{\max} \sqrt{\alpha}$$

ה. נבחר לבסוף את ההגבר K של הבקר לקבלת $\omega_{co} = \bar{\omega}_{co}$, כלומר

$K |C(\bar{\omega}_{co})P(\bar{\omega}_{co})| = 1$. נעיר כי אם Z, P אכן נבחרו כך ש: $\bar{\omega}_{co} = \omega_{\max}$, אזי

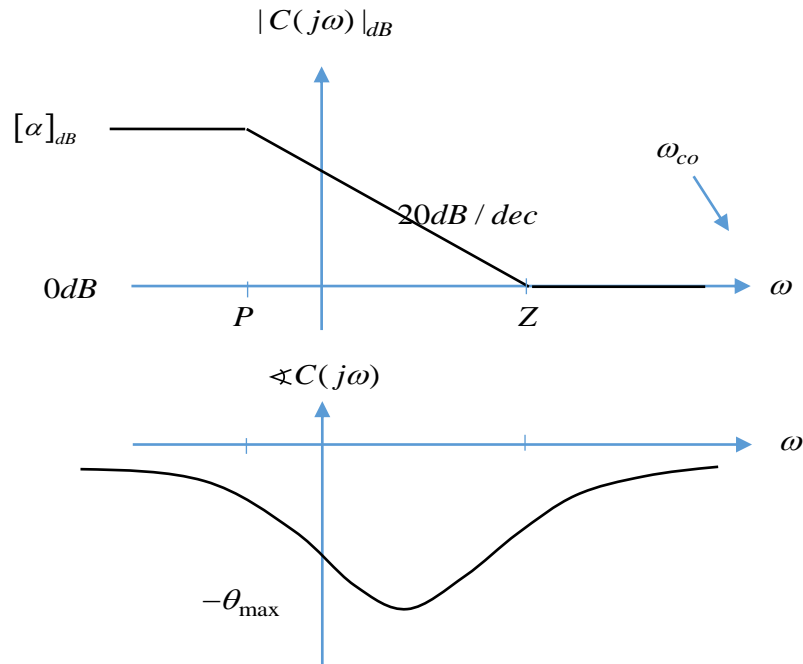
$$|C(\bar{\omega}_{co})| = 1 / \sqrt{\alpha}$$

16.3. תכן בקר פיגור

בקר פיגור פאזה הינו בעל הצורה הבאה :

$$C(s) = \frac{s+Z}{s+P}, \quad \alpha \triangleq \frac{Z}{P} > 1$$

דיאגרמת בודה :



מטרת בקר הפיגור היא הוספת הגבר בתדרים הנמוכים, לשיפור קבועי שגיאת המצב-המתמיד והגדלת הגבר החוג $|L(j\omega)|$ בתדרים אלה. זאת מבלי לשנות באופן משמעותי את התגובה הדינאמית.

ניתן לראות כי רשת הפיגור תורמת פאזה שלילית. פאזה זו עלולה להוריד את עודף הפאזה ולפגוע בריסון. כדי למנוע זאת, נמקם את בקר הפיגור בתדר נמוך יותר מ- ω_{co} (אולם לא נמוך מדי): בחירה

$$\underline{Z = \omega_{co} / 10}$$

בחירת $Z = \omega_{co} / 10$ עדיין משאירה פאזה שלילית של מספר מעלות בתדר ω_{co} : עבור $\alpha = 10$

למשל נקבל $\angle C(\omega_{co}) \cong -5^\circ$. יש לקחת השפעה זו בחשבון על ידי לקיחת "ספר" של מספר מעלות בשלב הקודם של תכנון רשת הקידום.

נסכם את שלבי התכנון של רשת משולבת קידום-פיגור :

א. דרישות תכן : ω_{co}, ϕ_M הגבר דרוש בתדרים נמוכים (באמצעות דרישה על קבועי שגיאת המצב המתמיד $K_p / K_v / K_a$, או דרישה מפורשת – "אזור אסור").

ב. נתכנן בקר קידום $C_{lead}(s)$ לקבלת ω_{co}, ϕ_M הנדרשים.

ג. נבדוק את ההגבר של תמסורת החוג $L(j\omega) = C_{lead}(j\omega)P(j\omega)$ בתדרים הנמוכים. בפרט ניתן לחשב קבועי שגיאה :

$$K_x = \lim_{s \rightarrow 0^+} s^i C_{lead}(s)P(s)$$

אם נדרשת תוספת הגבר – נוסף בקר פיגור פאזה.

ד. הוספת בקר פיגור : נחזור לשלב (ב'), ונתכנן את בקר הקידום עם הוספת "ספר" של כ- 5° לעודף הפאזה הנדרש.

ה. בחירת פרמטרי בקר הפיגור : נבדוק פי כמה נדרש להגדיל את קבוע השגיאה, ונבחר את α בהתאם (למשל : אם נדרש להגדיל את K_p או K_v פי 5 נבחר $\alpha = 5$). נקבע לבסוף

$$P = Z / \alpha, \quad Z = \omega_{co} / 10$$

הערה : באם נדרשת הגדלת סוג המערכת (מספר הקטבים בראשית), יש להוסיף בקר PI, שהוא למעשה בקר פיגור עם $P = 0$ גישת התכן דומה למקרה הקודם.

הרצאות 17, 18 : חסרות

ה. מבוא לתורת המערכות במרחב המצב

הרצאה 19: קונטרולביליות ואובזרווביליות

19.1. תכונות בסיסיות של משוואות מצב - חזרה

נתבונן במערכת לק"ב (לינארית וקבועה בזמן) במרחב המצב:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

כאשר: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ הינו וקטור המצב,

$u(t), y(t)$ אותות כניסה ויציאה סקלריים (מערכת SISO).

פתרון בתחום הזמן:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = \dots$$

המטריצה e^{At} הינה מטריצת המעבר (Transition Matrix) של המערכת, בעלת מימד $n \times n$, ומוגדרת על ידי הטור המטריצי:

$$e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

פתרון במישור לפלס:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$
$$= C(sI - A)^{-1}x_0 + H(s)U(s)$$

כאשר I היא מטריצת היחידה, ואילו $H(s)$ היא פונקציית התמסורת של המערכת:

$$H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$$

מבנה פונקציית התמסורת : מהביטוי הנ"ל נובע כי

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

כאשר $a(s) = \det(sI - A) := s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ הוא הפולינום האופייני.

שרשי הפולינום האופייני הם הערכים העצמיים של A , הם נקראים גם הערכים האופייניים \ הקטבים הנומינליים \ המודים (modes) של המערכת.

תכונות המטריצה e^{At} :

$$(1) \quad e^{At} \Big|_{t=0} = I$$

$$(2) \quad e^{At} e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)} \quad [\Rightarrow \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}]$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

מהשוואת הפתרונות בתחום הזמן והתדר ניתן לראות כי :

$$e^{At} \mathbf{1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

דרך אחרת לחשב את e^{At} הינה באמצעות לכסון (באם ניתן) :

$$A = T^{-1} \Lambda T \quad \Rightarrow \quad e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T$$

כאשר

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

מערכות מצב בזמן בדיד : משוואות המצב של מערכת לק"ב בזמן בדיד הינן :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

הפתרון בתחום הזמן (ע"י הצבה חוזרת) :

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} Bu(m)$$

ובמונחים של התמרת Z :

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z x_0 + (zI - A)^{-1} BU(s)$$

פונקציית התמסורת :

$$H(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

נפנה עתה לדיון בתכונות מבניות של מערכות מצב. תכונות אלה קשורות לשאלות הבאות :

- האם ניתן לשלוט על ערך המצב כרצוננו באמצעות אות הכניסה? (קונטרולביליות).
- האם ניתן לדעת מהו מצב המערכת מתוך מדידות היציאה בלבד? (אובזרווביליות).

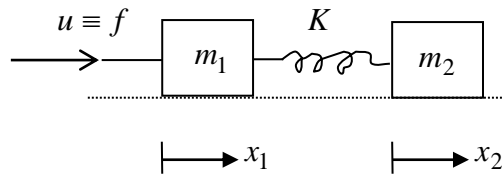
לשאלות אלו חשיבות רבה בתורת הבקרה, ובתורת המערכות בכלל.

מושגים אלה פותחו לראשונה בשנות השישים של המאה ה-20, ע"י Rudolf Kalman.

19.2. קונטרולביליות

הגדרה: מערכת מצב (בזמן בדיד או רציף) תקרא קונטרולבילית אם עבור כל מצב התחלתי $x(0) = x_0$ ומצב סופי רצוי x_f , קיים אות כניסה $\{u(t), 0 \leq t \leq T\}$ כך שמצב המערכת יהיה x_f בזמן T (סופי) כלשהו.

דוגמא: נתבונן במערכת של שתי מסות הקשורות בקפיץ, כאשר ניתן להפעיל כח חיצוני f על המסה השמאלית בלבד:



מצב המערכת הינו $x = (x_1, v_1, x_2, v_2)$. האם המערכת קונטרולבילית – כלומר האם ניתן ע"י הפעלת כוח מתאים על המסה הראשונה בלבד להביא את שתי המסות למיקום ומהירות רצויים?

ברור כי תכונת הקונטרולביליות קשורה אך ורק למשוואת דינמיקת המצב:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{או} \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

(כלומר למטריצות (A, B) , מכיוון שהיציאה אינה מופיעה כלל בהגדרה).

נפנה עתה לאפיון אלגברי של תכונת הקונטרולביליות, במונחים של המטריצות A, B .

משפט 1:

מערכת המצב (בזמן רציף או בדיד) הינה קונטרולבילית אם ורק אם המטריצה הבאה הינה בעלת דרגת שורות מלאה (כומר, בעלת דרגה n):

$$C := [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

המטריצה C נקראת מטריצת הקונטרולביליות של המערכת. כאשר המערכת בעלת כניסה אחת, מטריצה זו הינה ריבועית במימד $n \times n$, כאשר עמודותיה הן n הווקטורים $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. במקרה זה הדרישה לדרגה מלאה פירושה שהמטריצה אינה סינגולרית, $\det(C) \neq 0$.

משפט בסיסי זה נובע מהטענה הבאה:

משפט 2:

אוסף כל המצבים $x \in \mathbb{R}^n$ שאליהם ניתן להגיע (בזמן סופי) ממצב התחלתי $x_0 = 0$ הינו תת-המרחב הלינארי הנפרש על ידי עמודות המטריצה \mathcal{C} .

הוכחה:

נתחיל בזמן בדיד, עבורו ההוכחה פשוטה יותר.

עבור $x_0 = 0$ נקבל, מתוך פתרון משוואת המצב, עבור $k \geq 1$ כלשהו:

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(n-i-1)$$

ניתן לראות שכום זה כצרוף לינארי של הוקטורים $B, AB, \dots, A^{k-1}B$, כאשר המקדמים $u(i)$ הם משתני הכניסה ונתונים לבחירתנו! לפיכך אוסף כל המצבים אותם ניתן לקבל בזמן k הינו תת-

המרחב הנפרש על ידי $B, AB, \dots, A^{k-1}B$,

נתבונן ראשית בזמן $k = n$. ברור מהנ"ל כי אוסף כל המצבים אותם ניתן לקבל בזמן זה הינו תת-המרחב הנפרש על ידי $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. כלומר ע"י עמודות \mathcal{C} .

נבדוק עתה האם עבור זמן גדול יותר ($k > n$) ניתן להגיע למצבים נוספים. התשובה שלילית! כפי שנראה מייד כל וקטור מהצורה $A^i B$ (עם $i \geq n$) ניתן לביטוי כצרוף לינארי של n הוקטורים $B, AB, \dots, A^{n-1}B$, ומכאן נובע כי הוספת וקטורים נוספים מעבר ל- n הראשונים אינה מגדילה את תת-המרחב הנפרש על ידם.

הטענה לגבי הוקטורים $A^i B$ ($i > n$) נובעת מתוך משפט Caley-Hamilton מתורת המטריצות. לפי משפט זה כל מטריצה ריבועית A מקיימת את הפולינום האופייני שלה, כלומר, מתקיים:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

הכפלה בוקטור B והעברת אגפים נותנת

$$A^n B = -a_1 A^{n-1} B - \dots - a_{n-1} AB - a_n B$$

כלומר: הוקטור $A^n B$ הינו אכן צרוף לינארי של הוקטורים $B, AB, \dots, A^{n-1}B$.

ניתן עתה להראות בצורה רקורסיבית כי טענה זו נכונה גם עבור כל $i > n$. בכך הושלמה הוכחת המשפט עבור זמן בדיד.

בזמן רציף: נתאר באופן כללי בלבד. עבור $x_0 = 0$ נקבל עתה:

$$x(t) = \int_0^t e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau$$

מהגדרת $e^{A\tau}$, ועל ידי שימוש דומה לני"ל במשפט Caley-Hamilton, נובע כי

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_0^t h_i(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] \cdot A^i B := \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) \cdot A^i B$$

זהו שוב צרוף לינארי של עמודות C !

נותר עדיין להראות כי ניתן לקבל מקדמים $\beta_i(t)$ כרצוננו על ידי בחירה מתאימה של הכניסה u , לכך לא ניכנס פה.

מ.ש.ל.

מסקנה מעניינת מההוכחה :

בזמן בדיד : באם ניתן להגיע למצב כלשהו, ניתן לעשות זאת תוך n צעדים לכל היותר.

בזמן רציף : באם ניתן להגיע למצב כלשהו, ניתן לעשות זאת תוך זמן קצר כרצוננו.

משפט 1 נובע עתה ממשפט 2 :

\Leftarrow : באם C אינה סינגולרית, אזי עמודותיה פורשות את המרחב \mathbb{R}^n כולו. לפיכך ניתן להגיע מ-
 $x_0 = 0$ למצב x_f כרצוננו.

אם $x_0 \neq 0$, ניתן לקזז את השפעתו : מתוך $x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-i-1)$ נובע כי הגעה

ממצב $x(0) = x_0$ למצב $x(k) = x_f$ שקולה (מבחינת האפשרות והכניסה הדרושה) להגעה ממצב

$$x(0) = 0 \text{ למצב } x(k) = x_f - A^k x_0.$$

\Rightarrow : באם C סינגולרית, אזי ניתן להגיע ממצב התחלתי 0 אך ורק לתת מרחב של מרחב המצבים, שדרגתו קטנה מ- n .

מ.ש.ל.

חישוב הכניסה הדרושה (בזמן בדיד):

נניח כי המערכת קונטרולבילית. מהי הכניסה הדרושה על מנת להגיע ממצב התחלתי

$$x(0) = x_0 \text{ למצב } x(n) = x_f ?$$

נרשום שוב:

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B u(n-i-1) \\ &= A^n x_0 + [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

המטריצה המכפילה את וקטור הכניסה היא כמובן מטריצת הקונטרולביליות \mathcal{C} , והיא אינה סינגולרית כאשר המערכת קונטרולבילית. לפיכך, הכניסה הדרושה היא:

$$\begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathcal{C}^{-1} (x(n) - A^n x_0)$$

נציין כי ניתן להגיע למצבים מסויימים תוך פחות מ- n צעדים, לצורך זה יש למצוא צרוף לינארי של העמודות המתאימות (אין נוסחה סגורה).

חישוב הכניסה הדרושה (בזמן רציף):

עבור מערכת קונטרולבילית בזמן רציף: מהי הכניסה הדרושה על מנת להגיע ממצב התחלתי

$$x(0) = x_0 \text{ למצב } x(t_f) = x_f \text{ (עבור } t_f > 0 \text{ כלשהו)?}$$

פה קיימים אינסוף אותות כניסה שונים שיבצעו את הנדרש. נביא פה לשם השלמות פתרון מסוים (ללא פיתוח):

$$\begin{aligned} u(t) &= B^T e^{A^T(t_f-t)} W(t_f)^{-1} (x_f - e^{At_f} x_0) \\ W(t_f) &= \int_0^{t_f} e^{A(t_f-t)} B B^T e^{A^T(t_f-t)} d\tau \end{aligned}$$

ניתן לוודא כי המטריצה $W(t_f)$ אינה סינגולרית (למעשה חיובית-מוגדרת), ולכן ההפכי קיים. מטריצה זו נקראת "גרמיאן הקונטרולביליות".

ניתן לוודא כי כניסה זו מקיימת את הנדרש, ע"י הצבתה בנוסחת הפתרון של המצב:

$$x(t_f) = e^{At_f} x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

נעיר לבסוף כי זו הכניסה בעלת האנרגיה המינימלית המקיימת את הדרוש, כאשר האנרגיה מוגדרת על

$$\int_0^{t_f} \|u(\tau)\|^2 d\tau \text{ ידי}$$

19.3. אובזרווביליות

הגדרה : מערכת מצב (בזמן בדיד או רציף) תקרא אובזרוובילית אם ניתן לחשב ("לשחזר") את וקטור המצב התחלתי $x(0) = x_0$ מתוך מדידת $\{u(t), y(t) : 0 \leq t \leq T\}$, עבור זמן T (סופי) כלשהו.

משפט 3:

המערכת הינה אובזרוובילית אם ורק אם המטריצה הבאה הינה בעלת דרגת עמודות מלאה (כלומר, בעלת דרגה n):

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

המטריצה \mathcal{O} נקראת מטריצת האובזרווביליות של המערכת. כאשר המערכת בעלת יציאה אחת, מטריצה זו הינה ריבועית במימד $n \times n$, כאשר שורותיה הן n וקטורי השורה C, CA, \dots, CA^{n-1} . במקרה זה הדרישה לדרגה מלאה פירושה שהמטריצה אינה סינגולרית, $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

הוכחה (לזמן בדיד):

מספיקות : נניח ראשית כי \mathcal{O} בעלת דרגה מלאה, ונראה כי ניתן לשחזר את המצב ההתחלתי x_0 מתוך

המדידות $\{u(k), y(k) : 0 \leq k \leq T\}$ עם $T = n - 1$.

מהפתרון המפורש למשוואת המצב נקבל

$$y(k) \triangleq CA^k x_0 + v(k)$$

$$v(k) \triangleq \sum_{i=1}^k CA^{i-1} B u(k-i) + Du(k) \quad \text{כאשר:}$$

לפיכך:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ v(n-1) \end{bmatrix}$$

בכתיב מקוצר:

$$Y_n = \mathcal{O}x_0 + V_n$$

הוקטור V_n ניתן לחישוב מתוך הכניסות בלבד. לפיכך, אם נתונות המדידות $\{u(k), y(k) : 0 \leq k \leq n-1\}$, ניתן לראות את המשוואה האחרונה כמערכת משוואות לינאריות עבור ווקטור הנעלמים x_0 . כאשר דרגת מטריצת האובזרווביליות \mathcal{O} הינה מלאה, למשוואה זו פתרון יחיד (לכל היות). בפרט, כאשר \mathcal{O} ריבועית (מערכת עם יציאה אחת בלבד), נקבל:

$$x_0 = \mathcal{O}^{-1}(Y_{0:n-1} - V_{0:n-1})$$

הכרחיות: נותר להראות כי אם \mathcal{O} אינה בעלת דרגה מלאה (n), אזי לא ניתן לקבוע את x_0 באופן יחיד מתוך מדידת $\{u(k), y(k) : 0 \leq k \leq T\}$, וזאת עבור T כלשהו. ראשית, עבור $T = n-1$, נתבונן שוב במשוואה $Y_n = \mathcal{O}x_0 + V_n$ (אשר מתארת את הקשר בין הכניסות ליציאות). באם אינה מדרגה מלאה אזי הפתרון של משוואה זו אינו יחיד, ולכן לא ניתן לקבוע את x_0 חד-משמעית. בנוסף, עבור T גדול יותר, אנו יודעים כי הוספת שורות CA^n, CA^{n+1}, \dots למטריצה \mathcal{O} לא תגדיל את דרגתה (מדוע?), ולכן לא תסייע לקביעת x_0 .

מ.ש.ל.

ההוכחה בזמן רציף מעט מורכבת יותר אך מבוססת על עיקרון דומה, ולא נפרט פה.

דוגמאות:

1. במערכת בזמן בדיד עם $A = (1, 1; 0, 1)$, $B = (2; 3)$, $C = (1, 1)$ התקבלה היציאה $y(0) = 6$, $y(1) = 11$ עבור כניסה 0. מהו המצב ההתחלתי?
1. מה מסקנתך אם במדידה נוספת התקבל $y(2) = 15$?
2. במערכת עם $A = (3, 1; 0, 2)$, $B = (2; 3)$, $C = (1, 1)$ התקבלה היציאה $y(0) = 3$, $y(1) = 9$ עבור כניסה 0. מהו המצב ההתחלתי?
3. דוגמה 1, כאשר המערכת בזמן רציף.

דואליות בין קונטרולביליות ואובזרווביליות:

מערכת מצב S מוגדרת על ידי המטריצות (A, B, C, D) . נרשום $S = (A, B, C, D)$, או $S = (A, B, C)$ כאשר $D = 0$.

ראינו כי קונטרולביליות היא תכונה של צמד המטריצות (A, B) בלבד: המערכת קונטרולבילית אם מטריצת הקונטרולביליות $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, B)$ היא בעלת דרגה n . במקרה זה נגיד כי המטריצות (A, B) הינן צמד קונטרולבילי.

באופן דומה, אובזרווביליות היא תכונה של צמד המטריצות (A, C) בלבד: המערכת אובזרוובילית אם מטריצת האובזרווביליות $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A, C)$ היא בעלת דרגה n . במקרה זה נגיד כי המטריצות (A, C) הינן צמד אובזרוובילי.

קיימת דואליות בין תכונות האובזרווביליות והקונטרולביליות, כלהלן.

1. הצמד (A, B) הוא קונטרולבילי אם הצמד $(\tilde{A}, \tilde{C}) \triangleq (A^T, B^T)$ הוא אובזרוובילי.

2. הצמד (A, C) הוא אובזרוובילי אם הצמד $(\tilde{A}, \tilde{B}) \triangleq (A^T, C^T)$ הוא קונטרולבילי.

תכונות אלו מתקבלות על ידי חישוב מטריצות הקוני' אובז' המתאימות, ובדיקה כי מתקיים:

$$\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{C})^T, \quad \mathcal{O}(A, C) = \mathcal{C}(\tilde{A}, \tilde{B})^T$$

בהתאם לכך, המערכת $S = (A, B, C)$ היא קונטרולבילית [בהתאמה, אובזרוובילית] אם המערכת

$\tilde{S} = (A^T, C^T, B^T)$ היא אובזרוובילית (בהתאמה, קונטרולבילית). מערכת אלו נקראות דואליות.

(שאלה: מה הקשר בין פונקציות התמסורת של שתי מערכות אלה?)

19.4. מינימאליות

נראה עתה כי קיים קשר הדוק בין תכונות הקונטי' ואובז', לבין צמצומים בפונקציית התמסורת של הצערכת.

פונקציית התמסורת הנומינאלית של המערכת $S = (A, B, C, D)$ בזמן רציף, עם כניסה אחת ויציאה אחת, נתונה כזכור על ידי

$$C(sI - A)^{-1}B + D \triangleq \frac{b(s)}{a(s)}, \quad a(s) = \det(sI - A)$$

בזמן בדיד ההגדרה זהה כאשר z את s .

הגדרה: המערכת $S = (A, B, C, D)$ תיקרא **מינימאלית** אם אין צמצום בין המונה למכנה של פונקציית התמסורת הנומינאלית.

משפט: המערכת $S = (A, B, C, D)$ היא מינימאלית אם ורק אם היא קונטרולבילית ואובזרווביליות.

מכאן: אם קיים צמצום (אחד או יותר) בפונקציית התמסורת, אזי המערכת אינה קונטרולבילית, או שאינה אובזרוובילית (או שניהם).

נוכיח משפט זה בהמשך, אך רק למקרה זבו המטריצה A ניתנת לליכסון.

נציין כי המשפט נכון גם למערכות מרובות כניסות ויציאות (MIMO), אך יש להגדיר בצורה נכונה את האפסים של **מטריצת** התמסורת המתקבלת.

הרצאה 20: מימושים קנוניים והתמרות שקילות

20.1. מימושים וצורות קנוניות

תהי $H(s)$ פונקציית תמסורת רציונלית ונאותה ממש (strictly proper), מסדר n :

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

אנו מרשים גורמים משותפים בין המונה למכנה.

מימוש של $H(s)$ הינו מערכת מצב כלשהי $S = (A, B, C)$, בעלת פונקציית תמסורת נומינאלית $H(s)$, כלומר:

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad \det(sI - A) = a(s)$$

נשים לב כי מערכת המצב היא מסדר n (A מטריצה בגודל $n \times n$, וכו').

הערה: אם $H(s)$ נאותה אך לא ממש ($m = n$), ניתן לרשום אותה בצורה: $H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + d$.

במקרה זה המימוש יהיה $S = (A, B, C, D)$, כאשר (A, B, C) מימוש של $\frac{b(s)}{a(s)}$, ו- $D = d$.

כללית, לפונקציית תמסורת נתונה יהיו אינסוף מימושים אפשריים. קיימות מספר צורות קנוניות של מערכות מצב שהן נוחות במיוחד למימוש, וכן בעלות תכונות מועילות נוספות. נעבור פה על הצורות הקנוניות הבאות של משוואות מצב:

- צורה קנונית של קונטרולר

- צורה קנונית של אובזרוור

- צורה קנונית אלכסונית

א. צורה קנונית של קונטרולר (controller canonical form)

נגדיר:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [b_1, \dots, b_n]$$

טענה 1: פונקציית התמסורת של המערכת $S = (A_c, B_c, C_c)$ הינה:

$$C_c (sI - A_c)^{-1} B_c = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \equiv H(s)$$

לפיכך, הצורה הקנונית של קונטרולר מהווה מימוש של פונקציית התמסורת $H(s)$.

ניתן להוכיח את הטענה על ידי חישוב אלגברי ישיר. תחת זאת נביא בנייה של מערכת המצב מתוך פונקציית התמסורת, דבר שאף יבהיר את זהות משתני המצב.

נזכור שפונקציית התמסורת $H(s)$ מייצגת את הקשר:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} U(s)$$

ובתחום הזמן:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t)$$

נתבונן ראשית באות $z(t)$ המוגדר על ידי המשוואה הפשוטה יותר:

$$z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + a_n z(t) = u(t)$$

נגדיר את וקטור משתני המצב $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ לפי:

$$x_i(t) = z^{(n-i)}(t)$$

נבנה עתה את משוואות המצב.

נגזרות משתני המצב:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= z^{(n)} = -a_1 z^{(n-1)} - \dots - a_n z + u \\ &= -a_1 x_1 - \dots - a_n x_n + u \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = z^{(n-1)} = x_1$$

⋮

$$\dot{x}_n = z^{(1)} = x_{n-1}$$

משוואת היציאה : מהגדרת $z(t)$ נובע כי $Z(s) = U(s) / a(s)$. מהגדרת היציאה $Y(s)$ נקבל

$$Y(s) = (b_1 s^{n-1} + \dots + b_n) \frac{U(s)}{a(s)}$$

ולפיכך

$$\begin{aligned} y(t) &= b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z \\ &= b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \end{aligned}$$

נסכם : אם נבטא משוואות אלו בצורה מטריצית נקבל :

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c x(t)$$

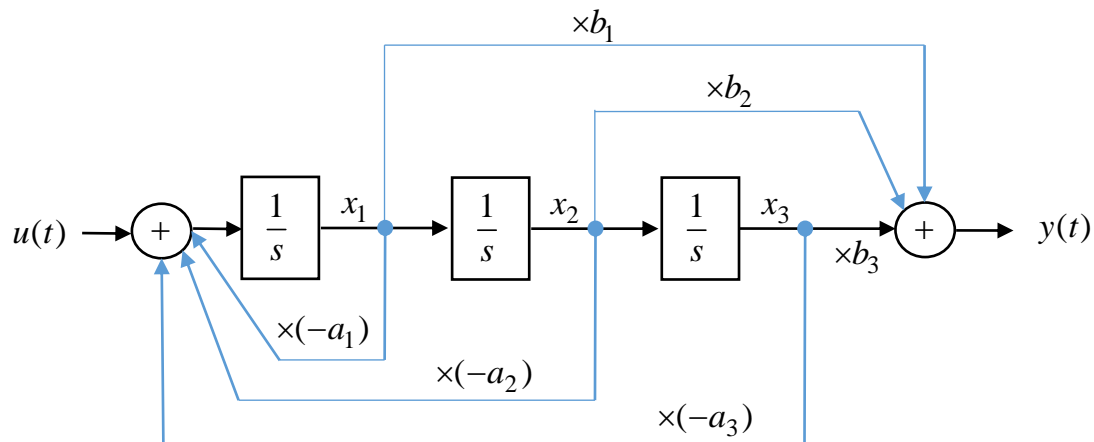
זוהי מערכת המצב $S = (A_c, B_c, C_c)$ בצורה הקנונית של קונטרולר.

הערות :

- לפי הבניה, פונקציית התמסורת של המערכת $S = (A_c, B_c, C_c)$ היא $H(s)$. מערכת זו נקראת גם מימוש קונטרולר של $H(s)$.
- מימוש קונטרולר הוא פשוט ביותר לביצוע – פשוט הצבת המקדמים של פונקציית התמסורת. אין פה צורך לחשב שורשי הפולינומים (כמו בצורה האלכסונית למשל).
- המטריצה A_c היא בעלת צורה הנקראת companion form. הפולינום האופייני הוא כמובן $a(s)$:

$$\det(sI - A_c) = a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

ניתן לתאר את מימוש קונטרולר באופן סכמטי כלהלן (התרשים עבור $n = 3$) :



התוצאה הבאה מסבירה (חלקית) את מקור השם "קונטרולר" לצורה קנונית זו.

טענה 2 :

א. מטריצת הקונטרולביליות של המערכת בצורה קנונית של קונטרולר הינה

$$C_c \triangleq C(A_c, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

ב. לפיכך, מערכת בצורה קנונית של קונטרולר הינה תמיד קונטרולבילית : $\det(C_c) = 1$.

הוכחת הטענה היא על ידי חישוב אלגברי שלא נפרט פה.

ב. צורה קנונית של אובזרוור (observer canonical form)

נגדיר :

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C_o = [1, 0, \dots, 0]$$

ניתן לראות כי צורה זו הינה דואלית לצורה קנונית של קונטרולר :

$$A_o = (A_c)^T, \quad B_o = (C_c)^T, \quad C_o = (B_c)^T$$

טענה 3 : פונקציית התמסורת של המערכת $S = (A_c, B_c, C_c)$ הינה :

$$C_o(sI - A_o)^{-1}B_o = \frac{b_1s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \equiv H(s)$$

הוכחה : ניתן לקבל תוצאה זו מתוך הדואליות לצורה קנונית של קונטרולר :

$$C_o(sI - A_o)^{-1}B_o = (C_o(sI - A_o)^{-1}B_o)^T = \dots = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c = H(s)$$

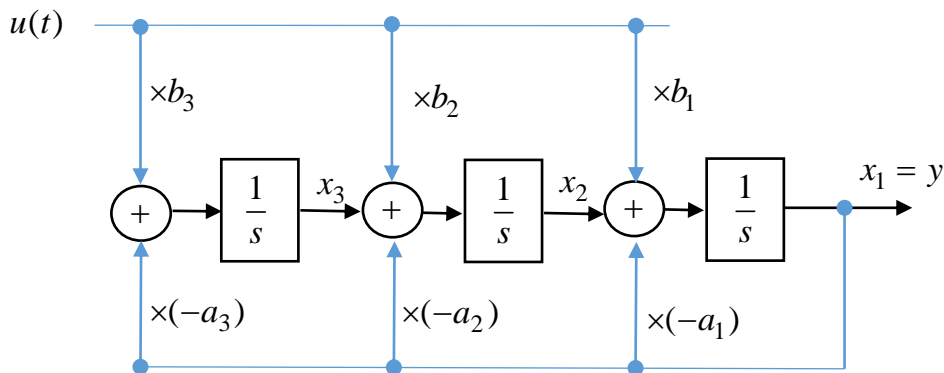
משתני המצב: נזהה את משתני המצב במונחים של u ו- y . רישום סקלרי של המשוואה
 $\dot{x} = A_o x + B_o u$ נותן:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= -a_{n-1} x_{n-1} + x_n + b_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_n x_n + b_n u \end{aligned}$$

בנוסף, ממשוואת היציאה: $y = C_o x = x_1$. הצבה חוזרת במשוואות המצב נותנת:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{x}_1 + a_1 x_1 - b_1 u \\ &= \dot{y} + a_1 y - b_1 u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y - (b_1 u^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} u) \end{aligned}$$

תאור סכמטי של משוואות המצב (עבור $n = 3$):



התוצאה הבאה מסבירה (חלקית) את מקור השם "אובזרוור" לצורה קנונית זו.

טענה 4:

א. מטריצת האובזרווביליות של המערכת בצורה קנונית של אובזרוור הינה

$$\mathcal{O}_o \triangleq \mathcal{O}(A_o, C_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \cdot 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

ב. לפיכך, מערכת בצורה קנונית של אובזרוור הינה תמיד אובזרוובילית: $\det(\mathcal{O}_o) = 1$.

נציין כי $\mathcal{O}_o = (C_c)^T$, עקב הדואליות שהוזכרה לעיל. האובזרווביליות של מערכת זו אינה מפתיעה, לאור כך שניתן לרשום את משתני המצב כפונקציה מפורשת של הכניסה והיציאה (ונגזרותיהם), כפי שראינו.

ג. מימוש בצורה קנונית אלכסונית

נניח כי ניתן לפרק את $H(s)$ לשברים חלקיים מסדר ראשון:

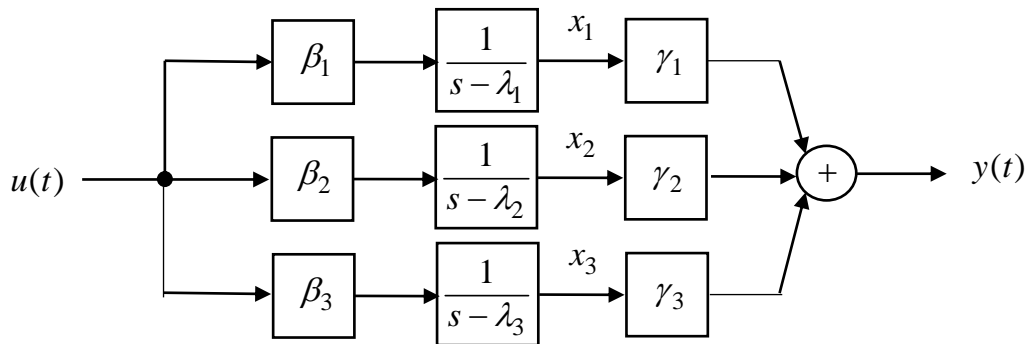
$$H(s) \equiv \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n}$$

כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שורשי $a(s)$.

נזכיר כי פרוק כזה תמיד אפשרי כאשר (λ_i) שונים זה מזה, ואחרת לא בהכרח (למשל $H(s) = \frac{1}{s^2}$).

נבחר מספרים כלשהם (β_i, γ_i) כך ש- $\beta_i \gamma_i = \alpha_i$. פונקציית התמסורת $H(s)$ ממומשת בדיאגרמה

הבאה:



נבחר את משתני המצב המסומנים בציור:

$$X_i(s) = \frac{\beta_i}{s - \lambda_i} U(s)$$

ונקבל:

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + \beta_i u(t), \quad i = 1, \dots, n$$

וכן:

$$y(t) = \gamma_1 x_1(t) + \dots + \gamma_n x_n(t)$$

בצורה מטריצית, קיבלנו:

$$\dot{x}(t) = A_d x(t) + B_d u(t)$$

$$y(t) = C_d x(t)$$

כאשר

$$A_d = \text{diag}\{\lambda_i\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad C_d = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$$

פונקציית התמסורת של מערכת זו הינה $H(s)$, לפי בנייה.

הערות :

1. במימוש הנ"ל אפשרנו שימוש במספרים מרוכבים, לשם פשטות. אם נגביל למספרים ממשיים, ניתן לקבל מימוש כמעט אלכסוני על ידי החלפת משתני מצב. בפרט, תמסורת תת-המערכת

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}, C = [1, 1]; \quad \lambda = \sigma + j\omega, \alpha = \alpha_R + j\alpha_I$$

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha_R + \alpha_I \\ \alpha_R - \alpha_I \end{bmatrix}, C = [1, 1] \quad \text{זהו לזו של:}$$

2. כאשר יש קוטב בעל ריבוי גדול מ-1, פרוק לאיברים מסדר ראשון אפשרי רק אם יש צמצום בין המונה למכנה. אם אין פרוק כזה, אין מימוש אלכסוני אלא רק מימוש "כמעט אלכסוני" בצורת גיורדן. לא ניכנס לכך.

קונטרולביליות של צורה אלכסונית: חישוב ישיר של מטריצת הקונטרולביליות נותן:

$$\mathcal{C}_d \triangleq \mathcal{C}(A_d, B_d) = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \triangleq \text{diag}\{\beta_i\} \cdot L$$

המטריצה L נקראת מטריצת Vandermonde. ידוע כי L אינה סינגולרית אם ורק אם כל ערכי (λ_i) שונים זה מזה. (הוכחה: הכפלת המטריצה מימין בוקטור v , ושימוש במשפט היסודי של האלגברה...).

מכאן נקבל את המסקנה הבאה:

הצמד A_d, B_d הוא **קונטרולבילי** אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $\beta_i \neq 0$ לכל $i = 1, \dots, n$.

ב. כל הערכים העצמיים λ_i שונים זה מזה.

הסבר אינטואיטיבי:

$\beta_i = 0$ פירושו שמשתנה המצב x_i אינו מושפע כלל מהכניסה.

$\lambda_i = \lambda_j$ משמעותו שהמשתנים x_i, x_j אינם ניתנים לשינוי באופן בלתי תלוי (עבור תנאי התחלה 0,

היחס ביניהם יישאר קבוע לפי היחס $\beta_i : \beta_j$).

אובזרווביליות של צורה אלכסונית: חישוב דומה של מטריצת האובזרווביליות נותן:

$$\mathcal{O}_d \triangleq \mathcal{O}(A_d, C_d) = L^T \cdot \text{diag}\{\gamma_i\}$$

מכאן שהצמד A_d, C_d הוא **אובזרוובילי** אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $\gamma_i \neq 0$ לכל $i = 1, \dots, n$.

ב. כל הערכים העצמיים λ_i שונים זה מזה.

הסבר אינטואיטיבי:

$\gamma_i = 0$ פירושו כי אין השפעה כלשהי של משתנה המצב x_i על היציאה.

$\lambda_i = \lambda_j$ משמעותו שלא ניתן יהיה להפריד בין המשתנים x_i, x_j לפי השפעתם על היציאה כיוון שהשתנותם הזמנית זהה.

מינימליות:

נראה עתה את הקשר בין מינימליות המערכת (פונקציית תמסורת ללא צמצומים) לבין תכונות הקונטרולביליות והאובזרווביליות. נראה זאת עבור מערכת אלכסונית, אולם התוצאה המתקבלת ניתנת להרחבה מיידית לכל מערכת הניתנת ללכסון, ע"י שימוש בהתמרת שקילות (שנגדיר להלן). ההרחבה לכלל המערכות נכונה אך ההוכחה מורכבת יותר ולא ניכנס לכך.

נתבונן במערכת $S = (A_d, B_d, C_d)$ מסדר n . פונקציית התמסורת היא:

$$H(s) \equiv \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{\beta_1 \gamma_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_n \gamma_n}{s - \lambda_n}$$

לפי התנאים לעיל המערכת קונטרולבילית ואובזרוובילית אם ורק אם:

א. $\beta_i \gamma_i \neq 0$ לכל $i = 1, \dots, n$.

ב. כל הערכים העצמיים λ_i שונים זה מזה.

במידה ותנאים אלה מתקיימים, הרי אין צמצומים בין המונה והמכנה בצד שמאל. לעומת זאת, אם התנאים אינם מתקיימים הרי הסכום מימין כולל אפקטיבית פחות מ- n איברים שונים, ולכן חייב להיות צמצום בין המונה והמכנה משמאל.

קיבלנו את התוצאה שהזכרנו בסוף הפרק הקודם: המערכת היא מינימלית אם ורק אם היא קונטרולבילית ואובזרוובילית!

20.2. התמרות שקילות

א. התמרת שקילות – הגדרה ותכונות בסיסיות

נתונה המערכת הבאה במרחב המצב, בעלת מימד n :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

שתסומן על ידי

$$S = (A, B, C, D)$$

ניתן לקבל ייצוג שונה של מערכת זו, אשר משמר את תכונותיה העיקריות, על ידי מעבר למשתני מצב חדשים באמצעות ההתמרה הבאה :

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

כאשר T מטריצה ריבועית ($n \times n$) לא סינגולרית. מכאן נקבל כמובן כי :

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$

ניתן לראות בהתמרה זו של משתני מעין "שינוי בסיס" של ייצוג המערכת.

המערכת השקולה : נפתח עתה את משוואות המצב המתקבלות עבור וקטור המצב $\bar{x}(t)$. הרעיון הוא להחליף את $x(t)$ ב- $\bar{x}(t)$ באמצעות הקשרים הנ"ל, כאשר אות הכניסה $u(t)$ ואות היציאה $y(t)$ נשארים ללא שינוי.

נחשב ראשית את הנגזרת של $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) &= \frac{d}{dt} (T^{-1}x(t)) = T^{-1} \frac{d}{dt} x(t) \\ &= T^{-1} [Ax(t) + Bu(t)] \\ &= T^{-1} A(T\bar{x}(t)) + T^{-1} Bu(t) \\ &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \end{aligned}$$

כאשר הגדרנו :

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B$$

נעבור למשוואת היציאה :

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= C(T\bar{x}(t)) + Du(t) \\ &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned}$$

כאשר הגדרנו :

$$\bar{C} = CT, \quad \bar{D} = D$$

בסה"כ קיבלנו את משוואות המצב השקולות עבור ווקטור המצב $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned}$$

כאשר :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B \\ \bar{C} &= CT, \quad \bar{D} = D \end{aligned}$$

במערכת $\bar{S} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ נקראת המערכת השקולה ל- $S = (A, B, C, D)$, באמצעות התמרת השקילות T .

הערה : התמרת השקילות מוגדרת באופן זהה למערכות בזמן בדיד. כל האמור להלן נכון למערכות הזמן רציף ובזמן בדיד ללא שינוי.

ב. תכונות המערכת השקולה:

כאמור המערכת השקולה משמרת תכונות עיקריות של המערכת המקורית. בפרט:

1. למערכת השקולה \bar{S} פונקציית תמסורת זהה לזו של המערכת המקורית S .

הוכחה: התכונה נובעת למעשה לפי הבנייה שלנו: אותות הכניסה והיציאה לא השתנו, ולכן הקשר ביניהם (הנתון ע"י פונקציית התמסורת) לא השתנה. נוכיח זאת גם באופן אלגברי:

$$\begin{aligned} \bar{H}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \\ &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= C(T(sI - T^{-1}AT)T^{-1})^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= H(s) \end{aligned}$$

2. הקשר בין מטריצת הקונטרולביליות של שתי המערכות הינו: $\bar{C} = T^{-1}C$.

מכאן: המערכת השקולה \bar{S} קונטרולבילית אם ורק אם המערכת המקורית S קונטרולבילית.

הוכחה: נחשב את מטריצת הקונטרולביליות

$$\bar{C} := [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$$

נשים לב כי:

$$\bar{A}^k = (T^{-1}AT)^k = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) \cdot \dots \cdot (T^{-1}AT) = T^{-1}A^kT$$

ולכן

$$\bar{A}^k \bar{B} = (T^{-1}A^kT)(T^{-1}B) = T^{-1}A^k B$$

ומכאן

$$\bar{C} = [T^{-1}B, T^{-1}AB, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = T^{-1}C$$

קיבלנו כי $\bar{C} = T^{-1}C$ כנדרש.

עתה, מכיוון ש- T^{-1} מטריצה לא סינגולרית נובע כי דרגת \bar{C} זהה לדרגת C . מכאן שנשמרת תכונת הקונטרולביליות (דרגה מלאה של מטריצת הקונטרולביליות).

3. הקשר בין מטריצת האובזרווביליות של שתי המערכות הינו: $\bar{O} = OT$.

מכאן: המערכת השקולה \bar{S} אובזרוובילית אם ורק אם המערכת המקורית S אובזרוובילית.

הוכחה: באופן דומה לתכונה 2.

מסקנות: שתי מערכות השונות בתכונות הקונטרולביליות שלהן (אחת קונט' והשניה לא) או בתכונות האובזרווביליות שלהן (אחת אובז' והשניה לא) אינן שקולות, אפילו אם פונקציית התמסורת שלהן זהה.

ג. התמרת שקילות בין מערכות קונטרולביליות

משפט 1: כל שתי מערכות קונטרולביליות בעלות פונקציית תמסורת נומינאלית זהה הן שקולות.

ביתר פרוט:

יהיו $S_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ ו- $S_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ שתי מערכות בעלות פונקציית תמסורת נומינאלית זהה (כלומר: לפני צמצומים).

א. אם שתי המערכות קונטרולביליות, אזי הן שקולות.

ב. במקרה זה, התמרת השקילות בין S_1 ל- S_2 נתונה על ידי $T \equiv T_{1 \rightarrow 2} = C_1(C_2)^{-1}$.

(כלומר: $A_2 = T^{-1}A_1T$, וכו'), כאשר C_1, C_2 הן מטריצות הקונטרולביליות המתאימות.

הוכחה (חלקית):

טענה ב' נובעת ישירות מתכונות התמרת השקילות. בתכונה 2 לעיל ראינו כי אם מערכת S_1 שקולה

למערכת S_2 עם התמרת שקילות T , אזי $C_2 = T^{-1}C_1$. אולם C_2 אינה סינגולרית אם S_1

קונטרולבילית, ולכן $T = C_1(C_2)^{-1}$.

את טענה א' ניתן להוכיח על ידי חישוב אלגברי ישיר, אשר מראה כי עבור התמרת השקילות שמצאנו

אכן מתקיימים הקשרים הדרושים: $A_2 = T^{-1}A_1T$, $B_2 = T^{-1}B_1$, $C_2 = C_1T$.

לא נפרט חישוב זה פה.

מקרה פרטי של משפט זה נקבל באם ניקח את המערכת S_2 בצורה קנונית של קונטרולר (שהיא

קונטרולבילית כידוע). עקב חשיבותה נציין תוצאה זו במפורש:

משפט 1: כל מערכת $S = (A, B, C, D)$ שהינה קונטרולבילית הינה שקולה למערכת המצב $S_c = (A_c, B_c, C_c, D)$ בצורה קנונית של קונטרולר (עם פרמטרים המתאימים לפונקציית התמסורת של S).

התמרת השקילות בין S ל- S_c הינה: $T = C(C_c)^{-1}$

כאשר C הינה מטריצת הקונטרולביליות של S : $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$, ואילו C_c הינה מטריצת הקונטרולביליות של מימוש קונטרולר עבור פונקציית התמסורת

$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ של S , דהיינו,

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

סיכום ביניים: כל המערכות הקונטרולביליות בעלות תמסורת נומינאלית זהה שקולות זו לזו, וניתן לייצג את כולן (עד כדי התמרת שקילות) ע"י המערכת בצורה קנונית קונטרולבילית.

ד. התמרת שקילות בין מערכות אובזרווביליות

משפט 2: כל שתי מערכות אובזרווביליות בעלות פונקציית תמסורת נומינאלית זהה הן שקולות.

ביתר פרוט:

יהיו $S_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ ו- $S_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ שתי מערכות בעלות פונקציית תמסורת נומינאלית זהה (כלומר: לפני צמצומים).

א. אם שתי המערכות אובזרווביליות, אזי הן שקולות.

ב. במקרה זה, התמרת השקילות בין S_1 ל- S_2 נתונה על ידי $T \equiv T_{1 \rightarrow 2} = (O_1)^{-1}O_2$.

(כלומר: $A_2 = T^{-1}A_1T$, וכו'), כאשר O_1, O_2 הן מטריצות האובזרווביליות המתאימות.

תוצאה זו הינה דואלית למשפט 1, וההוכחה דומה 1.

מקרה פרטי של משפט זה נקבל באם ניקח את המערכת S_2 בצורה קנונית של אובזרוור (שהיא אובזרוובילית כזכור).

משפט 2': כל מערכת $S = (A, B, C, D)$ שהינה אובזרוובילית הינה שקולה למערכת המצב $S_o = (A_o, B_o, C_o, D)$ בצורה קנונית של אובזרוובר (עם פרמטרים המתאימים לפונקציית התמסורת של S).

התמרת השקילות בין S ל- S_c הינה: $T = \mathcal{O}^{-1} \mathcal{O}_{obs}$

כאשר \mathcal{O} הינה מטריצת האובזרווביליות של S , ואילו \mathcal{O}_{obs} הינה מטריצת האובזרווביליות של מימוש אובזרוור עבור פונקציית התמסורת

$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ של S , דהיינו,

$$\mathcal{O}_{obs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

סיכום ביניים: כל המערכות האובזרווביליות בעלות תמסורת נומינאלית זהה שקולות זו לזו, וניתן לייצג את כולן (עד כדי התמרת שקילות) ע"י המערכת בצורה קנונית אובזרוובילית.

ה. סיכום – התמרות שקילות

1. התמרות שקילות משמרות את התכונות הבסיסיות של מערכת מצב: ביניהן פונקציית התמסורת, קונטרולביליות, אובזרווביליות.

2. כל שתי מערכות מצב קונטרולביליות בעלות תמסורת נומינאלית זהה הינן שקולות, כאשר התמרת השקילות הינה: $T_{1 \rightarrow 2} = C_1(C_2)^{-1}$.
בפרט, כל מערכת מצב קונטרולבילית שקולה לצורת קונטרולר המתאימה.

3. כל שתי מערכות מצב אובזרווביליות בעלות תמסורת נומינאלית זהה הינן שקולות, כאשר התמרת השקילות הינה: $T_{1 \rightarrow 2} = (O_1)^{-1}O_2$.
בפרט, כל מערכת מצב אובזרוובילית שקולה לצורת אובזרוור המתאימה.

כזכור, ראינו כי מערכת מצב הינה מינימאלית (ללא צמצומים בפונקציית התמסורת) אם ורק אם היא קונטרולבילית ואובזרוובילית. מכאן נובע מיידית (לפי 2 או 3 לעיל) כי:

4. כל זוג מערכות מצב בעלות תמסורת זהה ומינימאלית (ללא צמצומים) הינן שקולות זו לזו.

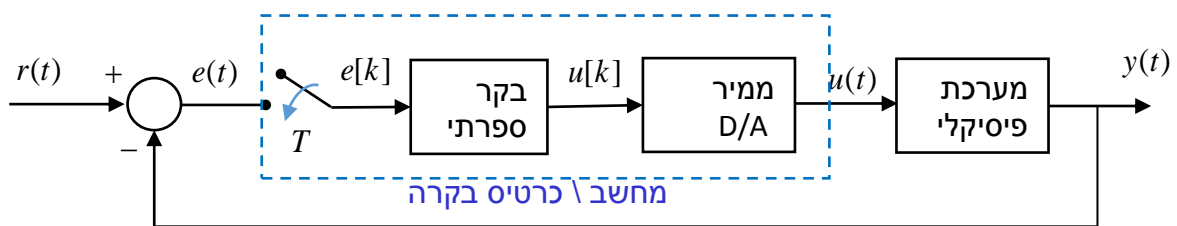
הרצאה 21 : חסר

הרצאה 22: מבוא לבקרה ספרתית

המערכות אותן אנו מבקרים הן ברובן מערכות פיזיקליות בזמן רציף. לעומת זאת, מרבית הבקרים כיום ממומשים באופן ספרתי, בעזרת מחשב או כרטיס אלקטרוני המיועד לכך. בפרק זה נראה כיצד משלבים את המערכת האנאלוגית עם הבקר הספרתי, מהי השפעת הבקר הספרתי, וכיצד ניתן לתכנן אותו. כמובן, נביא פה רק מבוא לנושא.

22.1. מבנה בסיסי של מערכת בקרה דגומה

סכמה עקרונית המתארת את השילוב של מערכת מבוקרת בזמן רציף עם בקר ספרתי מוראית בציור:



הרכיבים הספרתיים הינם הבאים.

דוגם: ממיר אות אנלוגי בזמן רציף, $e(t)$, לאות ספרתי בזמן בדיד, $e[k]$:

$$e[k] = e(kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

הדוגם כולל גם פעולת A/D, כך שהדגימה $e[k]$ מיוצגת כערך ספרתי בעל אורך מילה סופי.

בקר ספרתי: הבקר ממומש כתוכנית מחשב.

בכל זמן $t = kT$ הבקר מקבל דגימה $e[k]$ ומחשב ערך בקרה $u[k]$.

החלק הלינארי של הבקר ממומש באופן טיפוסי על ידי משוואת הפרש:

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - \dots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + \dots + b_m e_{k-m}$$

משוואה זו ממשמשת את פונקציית התמסורת הבאה במישור Z :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

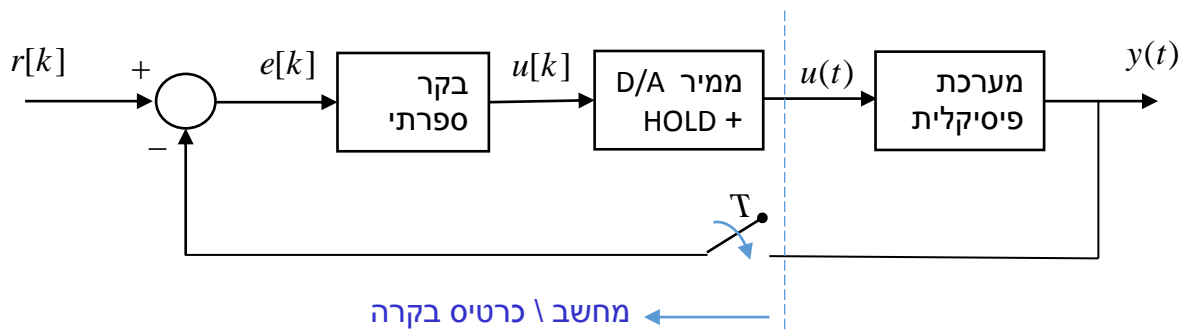
ממיר D/A + Hold: רכיב זה הופך את האות הספרתי $u[k]$ לאות אנלוגי $u(t)$.

המעבר מזמן בדיד לזמן רציף מתבצע על ידי אינטרפולציה בין הדגמים הבדידים. שיטת האינטרפולציה הנפוצה ביותר היא הפשוטה ביותר – Zero-Order Hold :

$$u(t) = u[k] \text{ for } t \in [kT, (k+1)T)$$

האות המתקבל הוא בצורת מדרגות (קבוע-למקוטעין). ניתן להעביר אות זה במסנן מעביר נמוכים (בער רוחב סרט גבוה משמעותית מזה של המערכת) כדי להחליק את הקפיצות, או להסתפק באפקט ההחלקה (סינון אפקטיבי) של המערכת הפיסיקלית עצמה.

המערכת שתיארנו הינה בעלת כניסת ייחוס רציפה, $r(t)$, אשר נדגמת בהמשך. בחלופה הבאה אות כניסת-הייחוס הינו אות ספרתי מלכתחילה :



שתי המערכות זהות מבחינת תגובתן, כיוון שהאות $e[k]$ בשתייהן הינו זהה: $e[k] = r[k] - y[k]$.

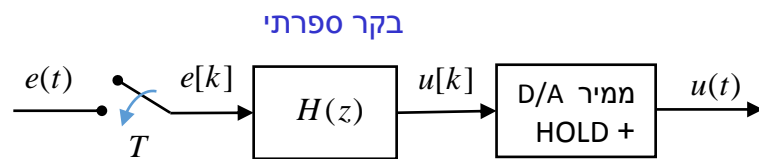
22.2. גישות לניתוח המערכת

נתייחס למערכת הדגומה שתוארה בציור הראשון. מערכת זו הינה מערכת בזמן רציף, בין כניסת הייחוס $r(t)$ ליציאה $y(t)$. קיימות שתי גישות משלימות לניתוח המערכת:

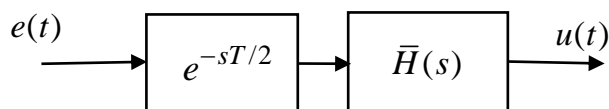
א. כמערכת בזמן רציף. ניתן לראות כי מערכת זו איננה קבועה בזמן. לפיכך לא ניתן לחשב עבורה פונקציית תמסורת $T(s)$ או תגובת תדר $T(j\omega)$. הגישה פה תהיה למצוא פונקציית תמסורת מקורבת, כלומר מערכת לק"ב בזמן רציף אשר מקרבת את הקשר המדויק בין $r(t)$ ליציאה $y(t)$.

ב. כמערכת בזמן בדיד: ניתן להראות כי הקשר המתקבל בין האותו הדגומים $r[k]$ ו- $y[k]$ ניתן לתאור (מדויק) על ידי מערכת לק"ב בזמן בדיד, אשר ניתנת לחישוב מפורש. גישה זו לניתוח המערכת נקראת "גישת השקול הבדיד". נציין כי בגישה זו איננו מקבלים במפורש את ערכי היציאה $y(t)$ בין רגעי הדגימה.

אנו נמשיך פה את הניתוח בגישה הראשונה. בפרט, נראה כי החלק הספרתי של המערכת:



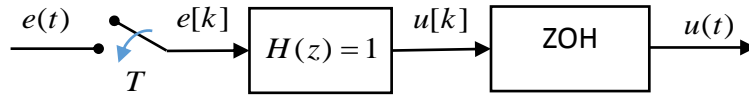
ניתן תיאור מקורב על ידי המערכת הבאה בזמן רציף:



כאשר $\bar{H}(s)$ הינה פונקציית תמסורת מתאימה המתקבלת מתוך $H(z)$.

22.3. השפעת הדגימה ובחירת זמן הדגימה

כדי לבדוד את השפעת הדגימה, נתבונן בחלק הספרתי עם פונקציית התמסורת הטריוויאלית: $H(z) = 1$.



נדגיש שוב שמערכת זו איננה קבועה בזמן (מדוע?).

א. השהיה אפקטיבית:

נבחן את יציאת המערכת עבור מספר כניסות אופייניות, כגון כניסת ריצה וכניסת סינוס. נניח כי האות משתנה לאט יחסית לזמן הדגימה. ניתן לראות כי ההשפעה העיקרית על אות היציאה, לאחר החלקת הקפיצות, הינה השהיה של $T/2$, כמחצית מזמן הדגימה.

ב. קיפול תדרים (aliasing):

כזכור מאותות ומערכות, כל מרכיב של האות $e(t)$ בתדר גבוה מ- $\frac{\pi}{T}$ (תדר ניקוויסט) מתקפל (או "מתחזה") לאות בפס הבסיס $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$.

מכאן שהמערכת הכוללת אינה יכולה לעקוב אחר אותות בתדר גבוה מ- $\frac{\pi}{T}$. דבר זה מהווה הגבלה חד-

משמעית על רוחב הסרט של המערכת הכוללת: $\omega_B \leq \frac{\pi}{T}$.

למעשה המגבלה חמורה יותר, כיוון שיש למנוע כניסת אותות כלשהם בעלי משרעת משמעותית בתחום התדרים $\omega > \frac{\pi}{T}$. אותות אלה "יתחזו" לאותות כניסה בפס הבסיס לאחר הדגימה, וישפיעו בהתאם על היציאה בתחום תדרים זה. כדי למנוע זאת יש לשקול הוספת מסנן מעביר-נמוכים מתאים לפני הדוגם, הנקרא מסנן anti-aliasing.

רוחב הסרט של מסנן זה צריך להיקבע במרווח בין ω_B ל- $\frac{\pi}{T}$: הוא צריך להיות רחב מספיק כדי שהשפעתו על ביצועי המערכת בתחום רוחב הסרט שלה תהיה קטנה, ומצד שני צר מספיק כדי להנחית את התדרים מעבר ל- $\frac{\pi}{T}$. את השפעת המסנן על ביצועי המערכת ניתן לקחת בחשבון בזמן התכן על ידי הכללתו בתמסורת מערכת המבוקרת.

בחירת זמן הדגימה:

נניח כי רוחב הסרט הנדרש של המערכת הכוללת הוא $\omega_B = 2\pi f_B$.

כדי למנוע קיפול תדרים, נדרש לפחות $T \leq \frac{\pi}{\omega_B} = \frac{1}{2f_B}$. אקוויולנטית, $f_s \triangleq \frac{1}{T} \geq 2f_B$.

למעשה נבחר זמן דגימה קטן יותר פי 5 עד 10 לפחות, כלומר:

$$f_s \approx 10 \div 20 f_B \quad \text{או} \quad T \approx \frac{1}{10 f_B} \div \frac{1}{20 f_B}$$

ניתן להבין זאת במספר היבטים:

1. עקרונית: לעקיבה סבירה נדרשת השתנות קטנה יחסית של האות בין רגעי הדגימה.
2. מניעת קיפול תדרים: ראו הדיון לעיל לגבי התחזות ומסנן מניעת-התחזות.
3. השפעת ההשהיה על עודף הפאזה: לפעולת הדגימה השפעה על ביצועי המערכת, כאשר ההשפעה העיקרית היא על עודף הפאזה (כלומר, על הריסון והיציבות). כפי שראינו הדגימה מוסיפה בקרוב השהיה של $T/2$, כלומר גורם $e^{-sT/2}$ המוסיף פאזה שלילית של $-\omega T/2$. כזכור את עודף הפאזה אנו מודדים ב- ω_{co} , והורדת הפאזה בתדר זה הינה:

$$\Delta\varphi = \omega_{co} T / 2 = 2\pi f_{co} T \cdot (180 / 4\pi) = 90^\circ f_{co} / f_s$$

כדי למנוע השפעה מהותית של ההשהיה על עודף הפאזה רצוי להגביל את $\Delta\varphi$ לערך של מספר מעלות.

עבור $\Delta\varphi \approx 3 \div 6^\circ$ נקבל: $f_s \approx 15 \div 30 f_{co}$

מכיוון שבאופן טיפוסי $f_B = \beta f_{co} \approx 1.5 f_{co}$, נקבל $f_s \approx 10 \div 20 f_B$

22.4. קירוב דיסקרטי של תמסורת רציפה

נתבונן במערכת $H(s)$ כלשהי בזמן רציף, בעלת תמסורת $H(s)$, כניסה $u(t)$ ויציאה $y(t)$.
 נתבונן במקביל במערכת בזמן בדיד, בעלת תמסורת $\bar{H}(z)$, כניסה $u[k] = u(kT)$, ויציאה $\bar{y}[k]$.

כיצד יש לבחור את $\bar{H}(z)$ על מנת שתגובת שתי המערכות תהיה דומה, כלומר $\bar{y}[k] \approx y(kT)$?

התשובה לשאלה זו אינה חד משמעית כיוון שמדובר בקירוב. קיימות מספר אפשרויות, ביניהן:

1. שימוש בקירוב אוילר לאינטגרציה (פחות נפוץ).
2. שימוש בקירוב הטרפזי לאינטגרציה.
3. שמירה על ערכי קטבים ואפסים (לאחר התמרה מתאימה בין מישור s למישור z).

4. קירוב ZOH : מחושב בהנחה שערכי $u(t)$ קבועים בין רגעי הדגימה.

אפשרות 2 נותנת לרוב קירוב טוב של תגובת התדר. אנו נתאר פה את אפשרויות 1 (להדגמה) ו-2.

באפשרויות 1 ו-2 מתקבלות על ידי קירוב הפעולה הבסיסית של אינטגרציה בזמן רציף, על ידי פעולות מתאימות בזמן בדיד.

נניח כי $H_I(s) = 1/s$, כלומר: $y(t) = \int^t u(\tau) d\tau$.

1. קירוב אוילר לאינטגרל נותן: $y[k+1] = y[k] + Tu[k]$

$$\bar{H}_I(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{z-1} \quad \text{לאחר התמרת } z$$

קירוב זה מתקבל על ידי החלפת המשתנה s (פעולת הנגזרת) בזמן הרציף בגורם $\frac{z-1}{T}$. ניתן להרחיב שיקול זה לפונקציית תמסורת כללית, ולקבל את הקירוב:

$$\bar{H}(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

2. הקירוב הטרפזי לאינטגרל הינו: $y[k+1] = y[k] + T \frac{u[k] + u[k+1]}{2}$

$$\bar{H}_I(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad \text{לאחר התמרת } z$$

קירוב זה מתקבל על ידי החלפת המשתנה s (פעולת הנגזרת) בזמן הרציף בגורם $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$. לפונקציית תמסורת כללית, נקבל את ההמרה:

$$\bar{H}(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

קירוב זה נקרא קירוב בי-לינארי, או שיטת Tustin.

• קוד מטלב:

```
>> s=tf('s'); H=(s+2)/(s^2+5*s+3); T=0.1;
>> Hd=c2d(H,T,'tustin');
>> step(H,Hd) % compare the step responses
```

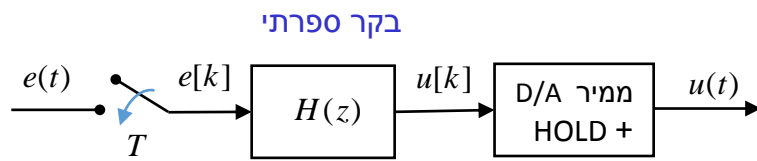
22.5. תכן בקר ספרתי: גישת הקירוב הרציף

על ידי שילוב המרכיבים שתוארו לעיל, ניתן לקבל את גישת התכן הבאה עבור הבקר הבדיד $H(z)$.

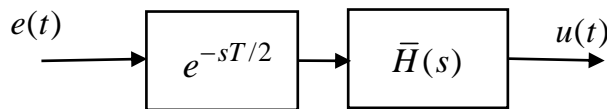
1. נבחר את זמן הדגימה T לפי רוחב הסרט הרצוי של המערכת הכוללת. במידת האפשר, יש לבחור

$$f_s \triangleq \frac{1}{T} \geq 20 f_B$$

2. נחליף את החלק הספרתי של המערכת:



במערכת הבאה בזמן רציף:



ההשהיה בשיעור $T/2$ מייצגת את השפעת ה-ZOH. לצרכים מסוימים (למשל שרטוט RL) נוח

להחליף השהיה זו בקירוב רציונלי כגון: $e^{-sT/2} \approx \frac{1}{1 + sT/2}$.

3. נתכנן בקר רציף $\bar{H}(s)$, בעזרת אחת השיטות שלמדנו לתכן בקר רציף.

4. נחשב את הבקר הבדיד על ידי קירוב מתאים – למשל הבי-לינארי:

$$\bar{H}(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

הערה: במידה ומוסיפים לפני הדוגם מסנן anti-aliasing שהשפעתו בתדר ω_B אינה זניחה, יש לקחת

השפעה זו בחשבון על ידי הכללת תמסורת המסנן בתמסורת המערכת המבוקרת $P(s)$.