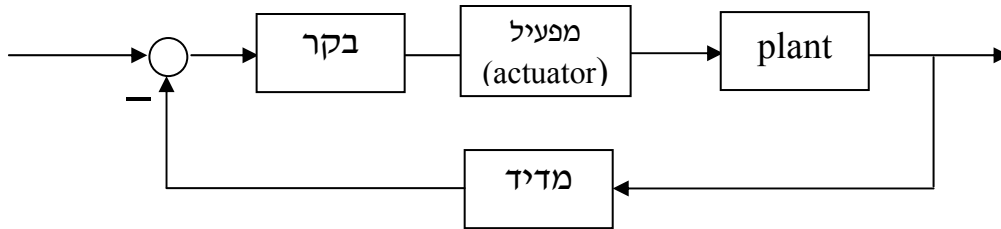


## חלק ב': ניתוח מערכות משוב

כזכור, המשוב מהווה מרכיב חשוב במערכות טבעיות והנדסיות רבות, וכלי בסיסי בתכנון מערכות הבקרה. מערכת משוב בסיסית מוראית בציור הבא:



כל אחד ממרכיבי המערכת עשוי להיות מקור לחוסר לינאריות:

- ה-plant: עקב חוקים פיסיקליים לא-לינאריים.
- המפעיל: קטגוריה זו כוללת רכיבים המתרגצים אות פקודה מהבקר לגודל פיסיקלי, כגון מנועים, מגברי הספק, שרירי הגוף, וכו'. תופעות לא לינאריות טיפוסיות כוללות רוויה, "אזור מת", ואופין לא-לינארי.
- החיישן: עשוי להיות בעל אופין לא-לינארי.
- הבקר: בקרה יעילה של מערכת לא-לינארית מצריכה לעיתים קרובות בקר שהוא עצמו לא לינארי.

בחלק זה של הקורס נתמקד בניתוח תכונות של מערכת משוב נתונה. נתמקד בתכונות הבאות:

1. תנודות מערכות משוב: ניתוח יציבות בשיטת הפונקציה המתארת.
2. יציבות מערכות משוב: משפט ההגבר הקטן, יציבות מוחלטת.

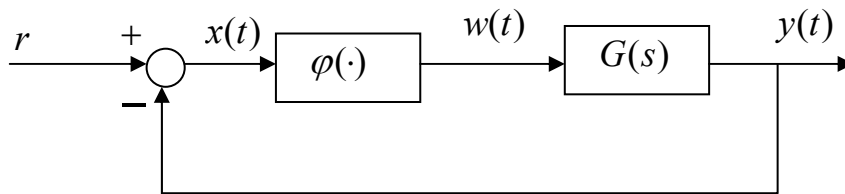
## פרק 5. שיטת הפונקציה המתארת

שיטת הפונקציה המתארת (Describing Function Analysis) הינה שיטה מקורבת, המסתמכת על ניתוח מקורב בתחום בתדר. כזכור, תגובת התדר היא כלי מרכזי לניתוח מערכות לינאריות. אולם כלי זה אינו ישים באופן ישיר למערכות לא-לינאריות (מדוע?).

שיטת הפונקציה המתארת שימושית במיוחד לצורך:

- (1) חישוב מקורב של תגובת מערכת משוב לכניסה מחזורית.
- (2) חיזוי או שלילת תנודות (מחזורי גבול) במערכת משוב.

המערכת הבסיסית שבה נתעניין היא מהצורה:

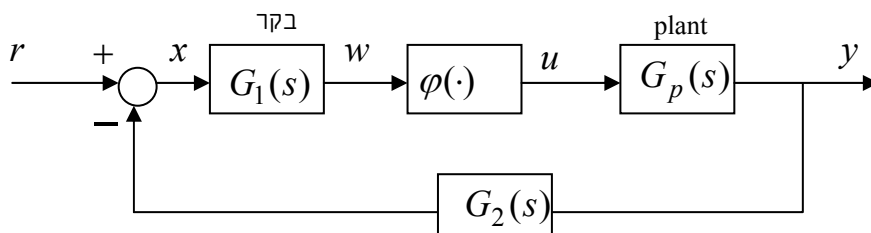


$G(s)$  הינו המרכיב הלינארי של המערכת, ואילו  $\varphi$  הינו המרכיב הלא לינארי.

לדוגמא:  $\varphi(x) = x^3$ , כלומר  $W(t) = \varphi(x(t)) = x(t)^3$ .

בשלב זה נניח כי המרכיב הלא לינארי הינו סטטי (חסר זכרון). לצורך ניתוח תנודות עצמיות נניח כי  $r(t) = 0$ .

השיטה שנציג ישימה גם למערכות מורכבות יותר כגון:



מבנה זה טיפוסי למערכת משוב לינארית בעיקרה, כאשר  $\varphi(\cdot)$  מציין אלמנט לא לינארי טפילי, כגון: רוויה, חיכוך, "אזור מת", וכו'. אי לינאריות זו נובעת לעיתים קרובות מה"מניע" של המערכת (actuator) – מנוע, מגבר הספק, תמסורת, וכו'.

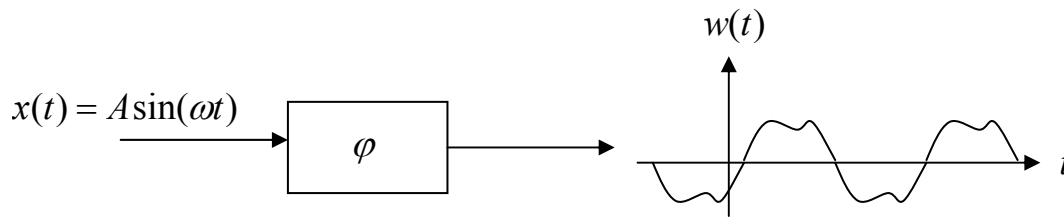
### 5.1 הגדרת הפונקציה המתארת

נניח כי בכניסת הרכיב הלא-ליניארי מצוי אות סינוסי :

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

היציאה  $w(t) = \phi(x(t))$  תהיה באופן כללי אות מחזורי בתדר זהה, וזמן מחזור

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



עקב מחזוריותו ניתן לבטא את האות  $w(t)$  כטור פוריה :

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \sin(k\omega t) dt$$

**הנחת ממוצע אפס:** נניח מעתה כי עבור  $x(t)$  מחזורי בעל ממוצע אפס, נקבל  $w(t)$

(מחזורי) בעל ממוצע אפס, כלומר  $a_0 = 0$  בפרוק פוריה.

תכונה זו תתקיים בפרט כאשר  $\phi$  פונקציה אי-זוגית, כלומר  $\phi(x) = -\phi(-x)$ .

**קרוב ההרמוניה הבסיסית:** הקרוב הבסיסי שנבצע בשיטת הפונקציה המתארת הוא

להתמקד על ההרמוניה הראשונה בלבד ( $k=1$ ), תוך התעלמות מכל ההרמוניות

הגבוהות יותר.

בהתאם להנחות אלה:

$$w(t) \approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

ניתן כמובן לרשום זאת גם כך:

$$w(t) = M \sin(\omega t + \phi)$$

$$Me^{j\phi} = b_1 + ja_1 \quad \text{כאשר}$$

**הגדרת הפונקציה המתארת:** הפונקציה המתארת  $N(A, \omega)$  היא "תגובת התדר" ביחס להרמוניה הראשונה בלבד:

$$N(A, \omega) \doteq \frac{Me^{j\phi}}{A} = \frac{1}{A}(b_1 + ja_1)$$

חשוב להדגיש כי הפונקציה המתארת היא גם פונקציה של משרעת הכניסה  $A$  - כפי שמתחייב מאי-הלינאריות של  $\phi$ .

### מקרים פרטיים

1. כאשר  $\phi(x)$  פונקציה סטטית (חסרת זכרון) נקבל

$$w(t) = \phi(A \sin(\omega t))$$

ולכן

$$\operatorname{Re}\{N(A, \omega)\} \doteq \frac{b_1}{A} = \frac{2}{AT} \int_0^T \phi(A \sin \omega t) \sin(\omega t) dt$$

$$\operatorname{Im}\{N(A, \omega)\} \doteq \frac{a_1}{A} = \frac{2}{AT} \int_0^T \phi(A \sin \omega t) \cos(\omega t) dt$$

במקרה זה מתקבל כי  $N(\omega, A)$  אינו תלוי בתדר:

$$.N(\omega, A) = N(A)$$

ניתן להראות זאת על ידי החלפת משתנים. על ידי הגדרת  $\tau = \omega t$  נקבל:

$$N(A) = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \tau) \sin(\tau) d\tau \\ + j \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \tau) \cos(\tau) d\tau$$

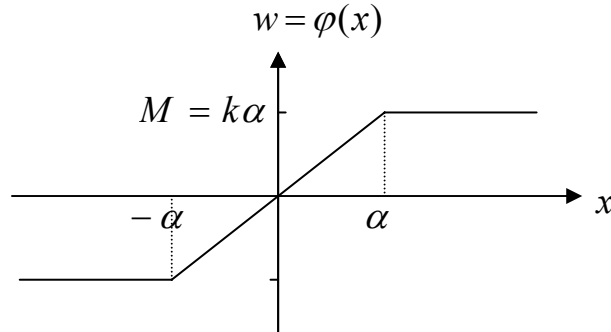
2. נניח, בנוסף, כי  $\varphi(x)$  פונקציה אי-זוגית:  $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ . אזי הינה  $w(t)$  פונקציה אי זוגית של הזמן, ומתקבל  $a_1 = 0$ . לפיכך  $N(A)$  פונקציה ממשית:

$$N(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{AT} \int_0^T \varphi(A \sin \omega t) \sin(\omega t) dt$$

מקרה (2) הוא המקרה הנפוץ ביותר.

### 5.2. חישוב הפונקציה המתארת

נדגים את חישוב הפונקציה המתארת עבור אלמנט רוויה אידיאלי:



הפונקציה  $\varphi$  לינארית בשיפוע  $k$  עבור  $|x| \leq \alpha$ , וקבועה עבור  $|x| > \alpha$ .

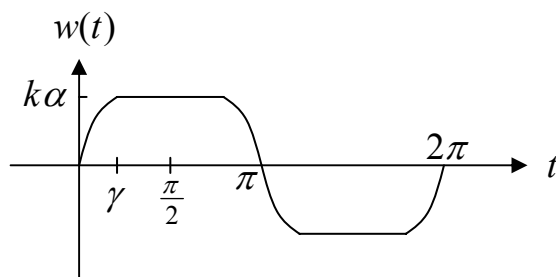
נניח  $x(t) = A \sin(t)$ .

(1) עבור  $A \leq \alpha$ : היציאה לא תגיע לתחום הרוויה, ולכן נקבל  $w(t) = kA \sin(t)$ .

לפיכך:  $N(A) = k$ ,  $0 < A \leq \alpha$

(2) עבור  $A > \alpha$ :

$$w(t) = \begin{cases} kA \sin(t) & : 0 \leq t \leq \gamma \\ k\alpha & : \gamma \leq t \leq \pi/2 \end{cases}$$



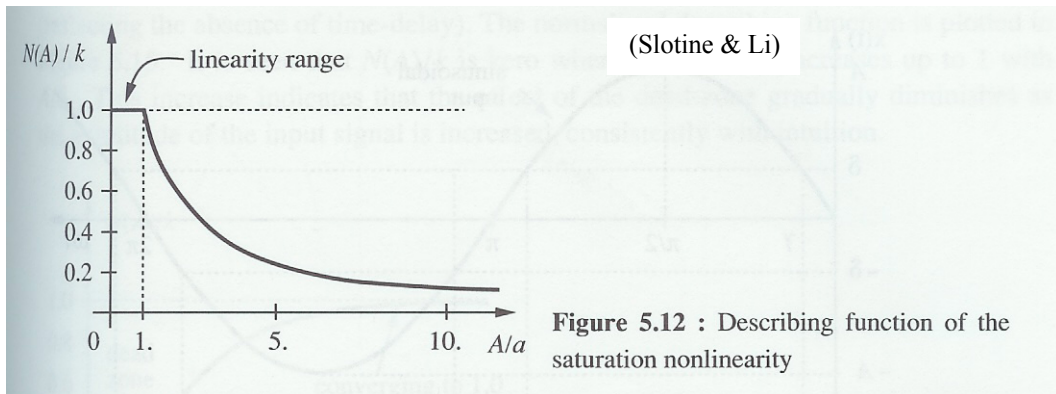
כאשר  $\gamma = \sin^{-1}(\alpha/A)$ . משיקולי סימטריה נקבל:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} w(t) \sin(t) dt = \frac{4}{\pi} \left[ \int_0^{\gamma} kA \sin^2(t) dt + \int_{\gamma}^{\pi/2} k\alpha \sin(t) dt \right]$$

$$= \frac{2kA}{\pi} \left( \gamma + \frac{\alpha}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2} \right)$$

$$N(A) = \frac{b_1}{A}$$

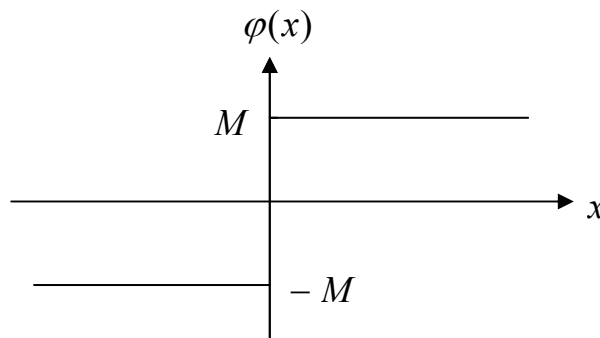
האיור הבא מראה את  $N(A)$  (ביחידות מנורמלות).



הפונקציה המתארת עבור מספר אלמנטים לא-ליניאריים נוספים מצוינת בטבלה המצורפת.

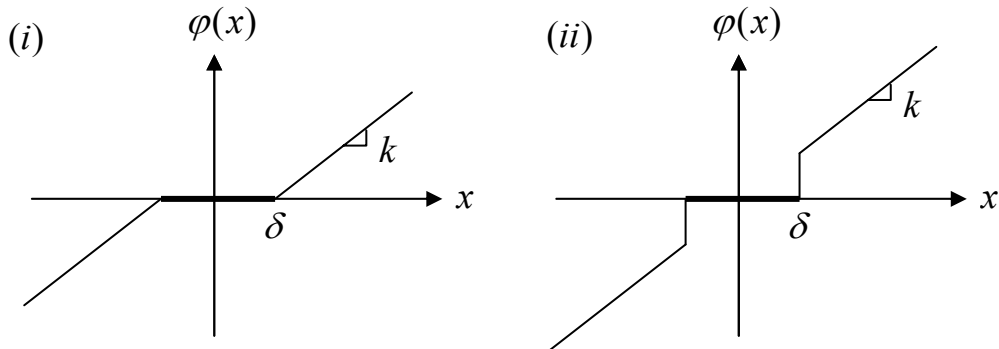
נתעכב בקצרה על התופעות הלא-ליניאריות הבאות :

**א. רווית ON-OFF** : אופין זה מצוי, למשל, בממסר חשמלי, מעגל מיתוג, וכד'.



מכיוון שהיציאה היא גל ריבועי, קל לקבל כי  $N(A) = \frac{4M}{\pi A}$ .

**ב. "אזור מת" (Dead Zone):** בהתקנים מסוימים נדרשת כניסה בעלת גודל מינימלי כדי לקבל תגובה כלשהי של היציאה.



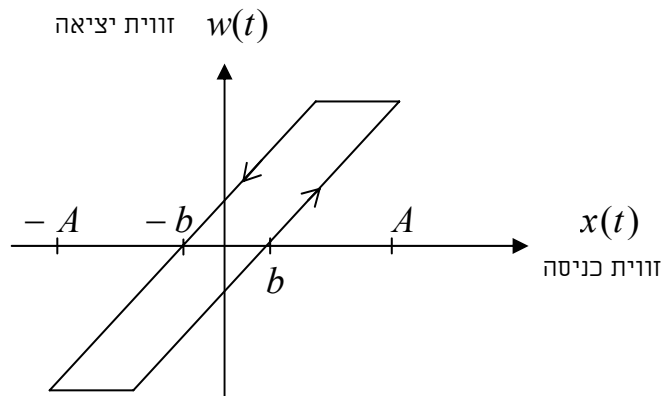
אופיין (ii) מתאר למשל אופיין מהירות-מתח של מנוע חשמלי, עם חכוך "יבש" בעומס.

ההשפעה על מערכת בקרה הינה:

- (1) הקטנה הדיוק.
- (2) אפשרות לנדנודים סביב נקודת האפס.

**ג. Backlash:** תופעה זו אופיינית לתמסורות מכניות (למשל גלגלי שיניים) ונגרמת עקב מרווחים וחופש בתשלובת.

תרשים כניסה-יציאה (עבור כניסה סינוסית במשרעת  $A$ ) הינו:

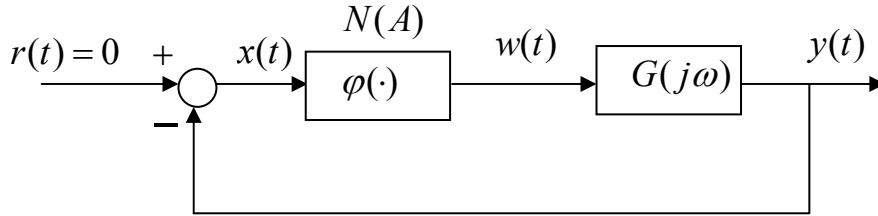


נציין כי אלמנט זה איננו לגמרי "סטטי" ואף לא "אי-זוגי". למרות זאת  $N(A)$  איננו תלוי בתדר, אך הוא יהיה מרוכב (ניתן לראות כי היציאה "מפגרת" אחר הכניסה).



### 5.3. שימוש לניתוח תנודות

נתבונן במערכת הבסיסית בחוג סגור :



נניח כי קיימת תנודה בעלת זמן מחזור  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

נבצע ניתוח מקורב בתחום התדר עם ההרמוניה הראשונה (בתדר  $\omega$ ) בלבד.

יהיו  $X, W, Y$  הפאזורים המתאימים לאותות  $x(t), w(t), y(t)$ .

אזי :

$$X = -Y$$

$$W = N(A)X$$

$$Y = G(j\omega)W$$

ולפיכך :

$$Y = -G(j\omega)N(A)Y$$

כלומר :

$$\boxed{1 + G(j\omega)N(A) = 0}$$

זוהי "המשוואה האופיינית" של המערכת!

ניתן לראות באיבר  $G(j\omega)N(A)$  "הגבר חוג" מקורב.

מכיוון שמדובר בגדלים מרוכבים, במשוואה האופיינית כוללת למעשה שתי משוואות

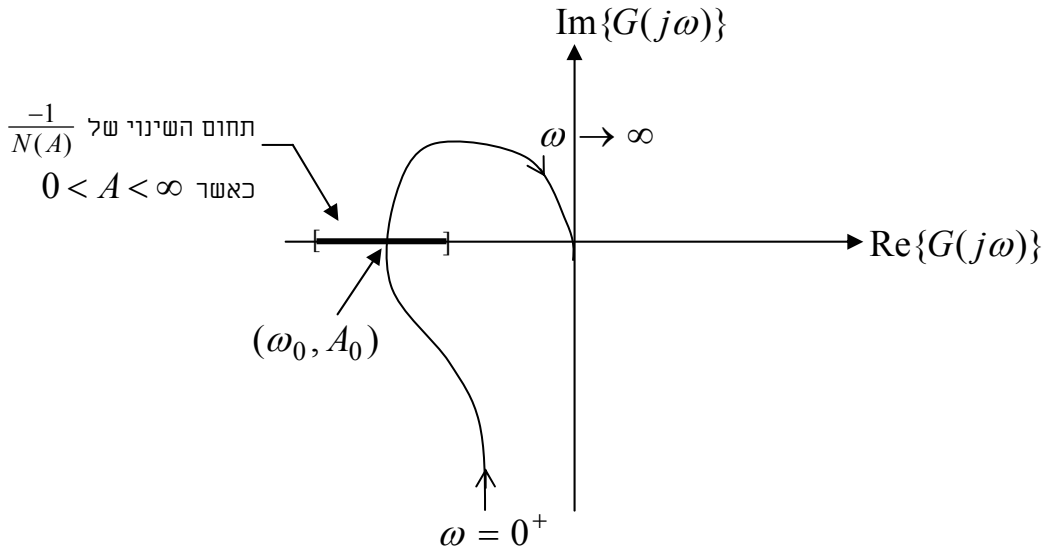
ממשיות, אשר מאפשרות לחשב את  $A$  ו- $\omega$  (משרעת ותדר התנודה החזויה).

**פתרון המשוואה האופיינית באמצעות תרשים נייקויסט:**

נניח ראשית כי הפונקציה המתארת  $N(A)$  הינה ממשית. נרשום את המשוואה האופיינית כך:

$$(**) \quad G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

נשרטט עתה עקום נייקויסט של פונקציה התמסורת  $G(j\omega)$ , עבור  $0 < \omega < \infty$ :



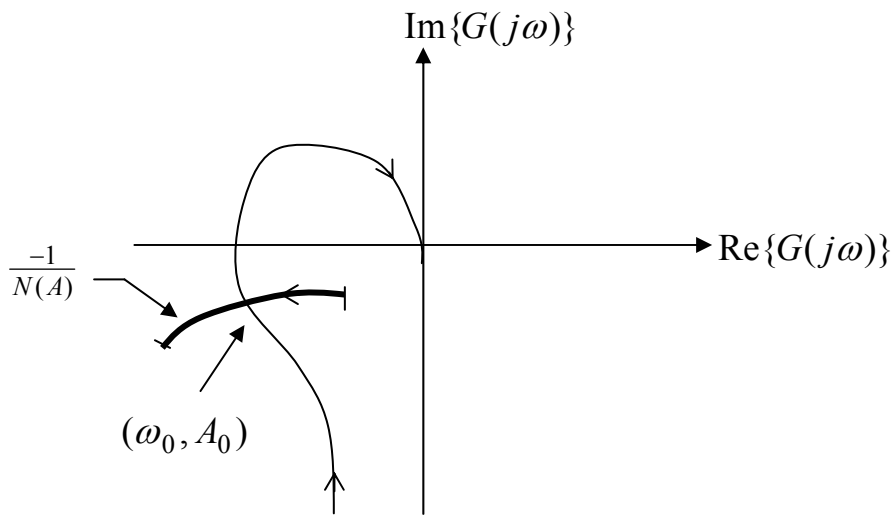
נשרטט כמו כן את תחום השינוי של  $-\frac{1}{N(A)}$  כאשר  $0 < A < \infty$ .

המשוואה האופיינית (\*\*\*) תתקיים כאשר  $G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$  נפגשים. כאשר  $N(A)$  ממשי, פגישה זו אפשרית רק על הציר הממשי ( $\text{Im}G(j\omega) = 0$ ).

לפיכך:

- (1) נקודות חיתוך אפשריות הן נקודות החיתוך של  $G(j\omega)$  עם הציר הממשי.
- (2) תדר התנודה ( $\omega_0$ ) ייקבע לפי התדר של  $G(j\omega)$  המתאים לנקודת החיתוך.
- (3) משרעת התנודה ( $A_0$ ) תקבע לפי הערך של  $-\frac{1}{N(A)}$  המתאים לנקודת החיתוך.

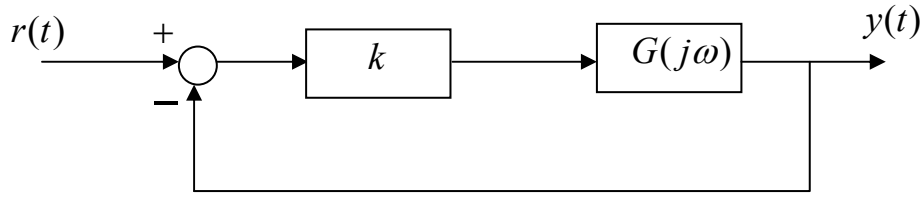
כאשר  $N(A)$  אינו ממשי נקבל את התמונה הבאה :



פה יידרש בדרך כלל פתרון נומרי.

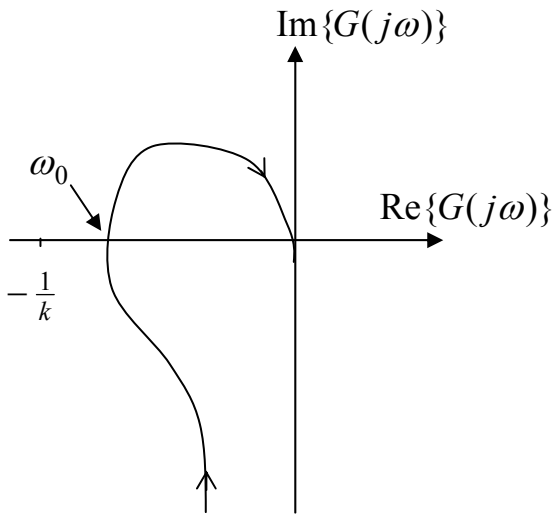
**הקשר לקריטריון נייקויסט:**

נזכור כי עבור מערכת משוב לינארית:



יציבות המערכת נקבעת לפי מספר ההקפות של הנקודה  $-\frac{1}{k}$ .

מקרה טיפוסי, המוראה בציור, הינו:



מערכת יציבה :  $-\frac{1}{k} < G(j\omega_0)$

מערכת לא יציבה :  $-\frac{1}{k} > G(j\omega_0)$

סף יציבות :  $\frac{1}{k} = G(j\omega_0)$

מצב סף היציבות הוא זה שבו תתכן תנודה.

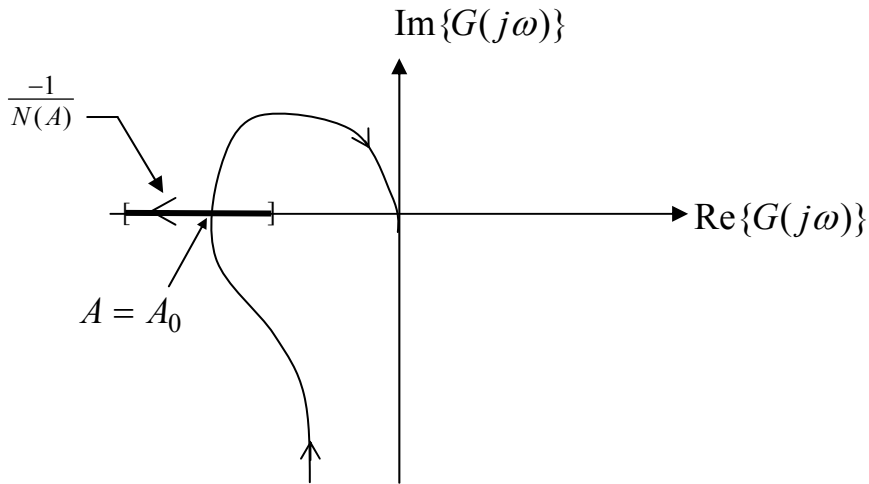
במקרה הלא לינארי, ניתן לראות בפונקציה המתארת  $N(A)$  "הגבר משתנה" התלוי במשרעת  $A$ .

התנאי לתנודות, כפי שמתבטא במשוואה האופיינית (\*\*), דומה לתנאי סף היציבות הנ"ל.

**יציבות התנודה:**

התנודה תהיה "יציבה" אם, עבור סטיות קטנות במשרעת, נחזור למשרעת הנומינלית. ניתן לחזות יציבות התנודה מתוך קריטריון הנייקויסט.

מצב אופייני של תנודה יציבה:



(1) כאשר  $A = A_0$  גדל מעט,  $-\frac{1}{N(A)}$  נע שמאלה, לפיכך מספר ההקפות קטן,

המערכת הופכת ליציבה, ו-  $A$  קטן בחזרה לכיוון  $A_0$ .

(2) כאשר  $A = A_0$  קטן מעט,  $-\frac{1}{N(A)}$  נע ימינה, ונוספת הקפה. המערכת הופכת

להיות לא יציבה, ולכן  $A$  יגדל, לכיוון  $A_0$ .

התנאי ליציבות התנודה ביחס לשינויים במשרעת הוא, אם כן:

(1)  $A$  קטן (ביחס ל-  $A_0$ ): המערכת עם הגבר  $K = N(A)$  הופכת להיות לא יציבה.

(2)  $A$  גדל (ביחס ל-  $A_0$ ): המערכת עם הגבר  $K = N(A)$  הופכת להיות יציבה.

**הערות לגבי תקפות הניתוח באמצעות פונקציה מתארת:**

הניתוח שהצגנו לעיל הוא ניתוח מקורב – הוא שימושי במקרים רבים, אולם יש לזכור את הנקודות הבאות:

(1) הערכים החזויים  $A_0$  ו- $\omega_0$  עבור התנודה אינם מדויקים.

(2) ייתכן שהתנודה החזויה אינה קיימת כלל בפועל.

(3) ייתכן שקיימת תנודה למרות שלא נחזתה בשיטה זו.

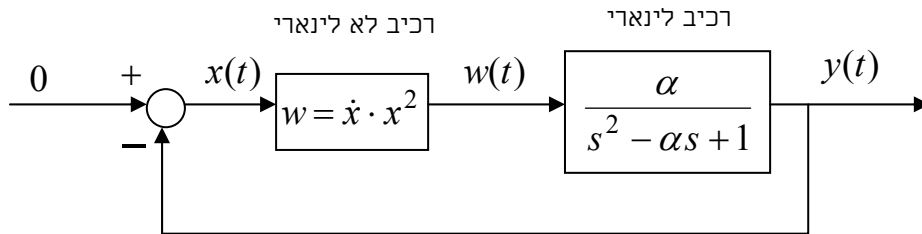
נציין כי קיימים חסמים תיאורטיים שונים לגבי גודל ואפשרות הטעות (פרוט והפניות מצויים בספרי הלימוד).

### 5.4. דוגמא: מתנד Van der Pol ([Slotine]).

נתבונן במשוואת המתנד :

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

נבדוק קיום מחזור גבול באמצעות שיטת הפונקציה המתארת. לשם כך, נייצג את משוואת המערכת בצורת משוב, כמוראה בצויר :



האלמנט הלא לינארי איננו סטטי במקרה זה :

$$w(t) = \dot{x}(t) x(t)^2$$

עבור  $x(t) = A \sin(\omega t)$  נקבל :

$$\begin{aligned} w(t) &= x^2(t) \dot{x}(t) = A^2 \sin^2(\omega t) \cdot A \omega \cos(\omega t) \\ &= \frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\omega t) = \frac{A^3 \omega}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \end{aligned}$$

בהזנחת ההרמוניה השלישית, נקבל :

$$w(t) \approx \frac{A^3 \omega}{4} \cos \omega t$$

ולפיכך :

$$a_1 = \frac{A^3 \omega}{4}, \quad b_1 = 0$$

$$N(A, \omega) = \frac{1}{A} (b_1 + ja_1) = \frac{A^2}{4} (j\omega)$$

נציין כי את  $a_1$  ו-  $b_1$  אפשר לקבל כמובן גם באמצעות הנוסחאות האינטגרליות (בדוק!).

המשוואה האופיינית :

$$1 + N(\omega, A) G(j\omega) = 0$$

$$1 + \frac{A^2(j\omega)}{4} \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

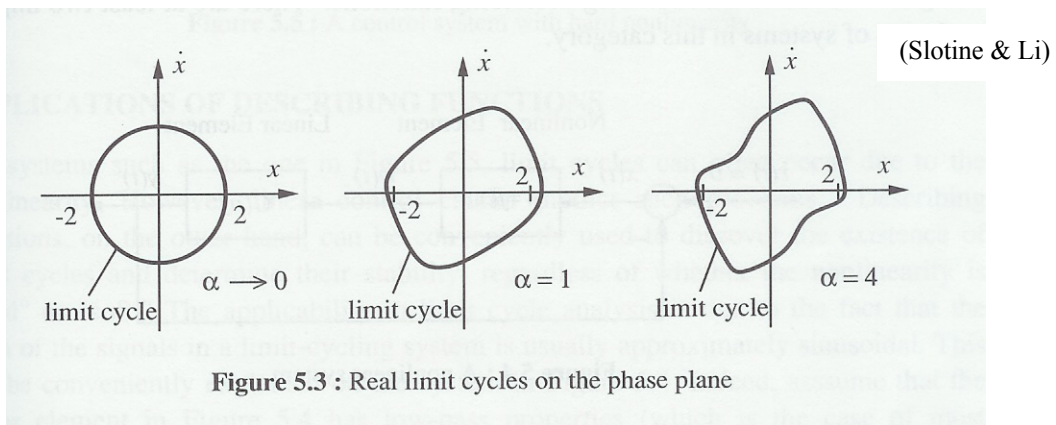
שתי המשוואות המתקבלות :

$$-\omega^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 1$$

$$j(-\alpha\omega + \frac{\alpha A^2 \omega}{4}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = 2$$

מעניין לציין כי פרמטרים אלה אינם תלויים ב- $\alpha$ .

התנודה המתקבלת עבור ערכים שונים של  $\alpha$  מוראית בציור. ככל ש- $\alpha$  גדל, אי-הלינאריות יותר מודגשת והדיוק קטן.



**יצירת התנודה:** נתבונן במשוואה האופיינית, הפעם במישור  $s$  (לפס) :

$$1 + \frac{A^2 s}{4} \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1} = 0$$

$$s^2 + \alpha \left( \frac{A^2}{4} - 1 \right) s + 1 = 0$$

עבור  $A = 2$  המערכת על סף יציבות.

עבור  $A < 2$  המערכת בלתי יציבה  $\leftarrow A$  גדל.

עבור  $A > 2$  המערכת יציבה  $\leftarrow A$  קטן.

מכאן נצפה כי התנודה תהיה יציבה (לגבי שינויים במשרעת).