פרק 10. תכן רובוסטי בגישת ליאפונוב

תכן רובוסטי (=איתן,עמיד) מיועד להשיג ביצועים קבילים גם בנוכחות הפרעות חיצוניות ושינויים במודל המערכת.
תכן רובוסטי של מערכות לא-לינאריות מבוסס לרוב על שימוש בפונקצית ליאפונוב מתאימה. בפרק זה נתאר שתי שיטות מסוג זה: גישת התכן-מחדש (Lyapunov Redesign) אשר תדגים את הטכניקה של שימוש בפונקציית ליאפונוב ל״ביטול״ איבר שגיאה או הפרעה; וגישה שנייה של ״בקרת משטח החלקה״.

10.1 תכן-מחדש מבוסס ליאפונוב

נתבונן במערכת הבאה

$$\dot{x} = f(x) + G(x)[u + \delta(x,u)],\ \ x \in \Re^n, u \in \Re^p$$

כאשר δ מייצג איבר ״הפרעה״, שאינו ידוע מראש. איבר זה יכול לייצג הבדל בין מודל התכן למודל האמיתי, אי וודאות בפרמטרי המודל, הפרעה חיצונית בלי מדידה. וכו׳.

<u>הנחה חשובה</u> במודל הנתון הוא כי הפרעה אדיטיבית לבקרה, כלומר משפיעה ״באותו אופן״ כמו הכניסה. זו הנחה מרכזית להפעלת השיטה הנדונה.

<u>מטרת הבקר</u> הינה ייצוב המצב סביב $x^* = 0$.

נתבונן ראשית במערכת הנומינלית ($\delta = 0$):

$$S_{nom}: \quad \dot{x} = f(x) + G(x)u$$

<u>הנחות לגבי המערכת הנומינאלית</u>:

1. נניח כי מצאנו (בשיטה כלשהי) בקר משוב $u = u_0(x)$ אשר מייצב את הראשית של המערכת הנומינאלית. כלומר, הראשית של המערכת הבאה הינה יציבה אסימפטוטית:

$$S_0: \quad \dot{x} = f(x) + G(x)u_0(x)$$

2. כמו כן נניח כי מצאנו פונקציית ליאפונוב $V(x)$ עבור S_0, דהיינו פונקציה חיובית-מוגדרת שעבורה

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + G(x)u_0(x)] \le -\alpha(x) < 0 \qquad (x \ne 0)$$

<u>הנחה לגבי איבר אי-הוודאות</u>:

3. נניח כי ידוע החסם הבא:

$$\| \delta(x,u) \| \le \rho(x) + k \| u \|$$

כאשר $\rho(x)$ פונקציה אי-שלילית ורציפה, ואילו $0 \le k < 1$. הנורמה $\| \cdot \|$ היא הנורמה האאוקלידית (נורמת-2).

מטרתנו לתכנן בקר מהצורה

$$u(x) = u_0(x) + v(x)$$

אשר מייצב את הראשית של המערכת הכוללת (עם איבר אי-הוודאות).

תכן האיבר הנוסף $v = v(x)$ של הבקר נקרא Lyapunov Redesign.

<u>תהליך התכן</u> : עבור הבקר בצורה המוצעת נקבל

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u_0(x) + G(x)[v(x) + \delta(x, u_0(x) + v(x))]$$

ולפיכך

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}[f + Gu_0 + G(v+\delta)] \le -\alpha(x) + w^T(v+\delta)$$

כאשר $w^T(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x}G(x)$. על מנת להבטיח כי $\dot{V} < 0$, נבחר את $v(x)$ כך שהאיבר האחרון במשוואה יהיה שלילי. לפי החסם הנתון על ההפרעה :

$$\|\delta(x, u_0(x) + v)\| \le \rho(x) + k\|u_0(x)\| + k\|v\| := \rho_0(x) + k\|v\|$$

$$\Rightarrow \quad w^T(v+\delta) \le w^T v + \|w\|\|\delta\| \le w^T v + \|w\|[\rho_0(x) + k\|v\|]$$

נבחר לפיכך

$$v(x) = -\frac{\eta(x)}{(1-k)}\frac{w(x)}{\|w(x)\|}$$

כאשר $\eta(x) \ge \rho_0(x)$. קל לראות כי בחירה זו נותנת $w^T(v+\delta) \le 0$. לפיכך $V(x)$ תהיה פונקציית ליאפונוב גם עבור המערכת הכוללת עם בקר זה.

נובע כי הראשית של המערכת הכוללת עם הבקר המוצע יציבה אסימפטוטית, עבור כל איבר הפרעה $\delta(x,u)$ המקיים את החסם שהנחנו לגביו.

הערות :

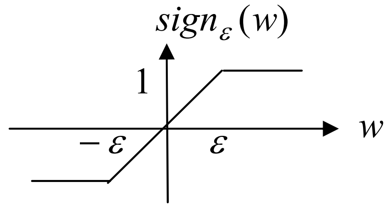
1. במקרה שבו הבקרה סקלרית w הינו סקלרי גם כן, ולכן

$$v(x) = -\frac{\eta(x)}{(1-k)} sign(w(x))$$

2. באם החסם על $\delta(x)$ נתון במונחי נורמת המכסימום $\|\cdot\|_\infty$ (במקום הנורמה האאוקלידית), אזי ניתן לבחור גם במקרה הוקטורי

$$v(x) = -\frac{\eta(x)}{(1-k)} sign(w(x))$$

3. חוק הבקרה המתקבל הינו בלתי רציף, עקב שינוי הסימן של $v(x)$ מסביב לנקודה $w=0$. הדבר עשוי לגרום לריטוטים (chattering) מערכת. פתרון אפשרי ומקובל הינו "החלקת" פונקציית הסימן באזור הראשית :



במקרה זה עשויה להתקבל סטייה קטנה מהראשית בשיווי משקל.

<u>דוגמא</u> : נתבונן במערכת המטוטלת :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin(x_1) - bx_2 + cu$$

ונניח כי קיימת אי ודאות בפרמטרים :

$$a = a_0 + \Delta a$$
$$b = b_0 + \Delta b$$
$$c = c_0 + \Delta c$$

כאשר ידועים חסמים על איברי הטעות : $|\Delta a| \le \Delta a_{\max}$, וכו'.

איבר השגיאה : המערכת הנתונה ניתנת לכתיבה בצורה :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_0\sin(x_1) - b_0 x_2 + c_0[u + \delta(x,u)]$$

כאשר

$$\delta(x,u) = -\frac{\Delta a}{c_0}\sin x_1 - \frac{\Delta b}{c_0}x_{2+}\frac{\Delta c}{c_0}u$$

מערכת זו הינה בצורה הדרושה, כאשר

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

באם החסם על Δc מקיים

$$\left|\frac{\Delta c_{\max}}{c_0}\right| \le k < 1$$

אזי ניתן לראות כי מתקיימת דרישה (3), דהיינו $|\delta(x,u)| \le \rho(x) + k|u|$, כאשר

$$\rho(x) = \left|\frac{\Delta a_{\max}}{c_0}\sin x_1\right| + \left|\frac{\Delta b_{\max}}{c_0}x_2\right|$$

בקר נומינלי : עבור המערכת הנומינלית (עם פרמטרים a_0, b_0, c_0) ניתן לבחור

$$u = \frac{1}{c_0}[a_0 \sin x_1 + k_1 x_1 + k_2 x_2] := u_0(x)$$

כך שנקבל בחוג סגור את המערכת הלינארית:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 + (k_2 - b)x_2 \end{aligned}$$

ניתן כמובן לבחור עתה את k_1, k_2 לקבלת יציבות וקטבים נדרשים. ניתן גם למצוא פונקציית ליאפונוב מתאימה, מהצורה $V(x) = x^T P x$.

תכן רובוסטי : נחשב ראשית

$$w^T = \frac{\partial V}{\partial x} G = (2x^T P)\begin{bmatrix} 0 \\ c_0 \end{bmatrix} = 2c_0(x_1 P_{12} + x_2 P_{22})$$

ניתן עתה להמשיך ולחשב את $\rho_0(x) = \rho(x) + k\|u_0(x)\|$, לבחור $\eta(x) \ge \rho_0(x)$, ונקבל את הבקר:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + v(x) \\ v(x) &= -\frac{\eta(x)}{1-k} sign(w) = \frac{\eta(x)}{1-k} sign(c_0) sign(x_1 P_{12} + x_2 P_{22}) \end{aligned}$$

10.2 תכן בגישת משטח-החלקה (Sliding Mode Control)

תמצית הרעיון : נניח כי מערכת המצב (הנומינאלית) הינה בצורה

$$\dot{x}_a = f_1(x) \equiv f_1(x_a, x_b)$$

$$\dot{x}_b = f_2(x) + G_2(x)u, \quad u \in \Re^p$$

כאשר $G_2(x)$ ריבועית והפיכה. נניח כמו כן כי

(1) קיים מיפוי $x_b = \phi(x_a)$, עם $\phi(0) = 0$, כך שהחלק העליון של המערכת, דהיינו $\dot{x}_a = f_1(x_a, \phi(x_a))$, יציב אסימפטוטית (ביחס ל- $x_a = 0$).

(2) ע"י בחירה מתאימה של u ניתן "להביא" את x_b ל- $\phi(x_a)$, דהיינו להבטיח כי $x_b = \phi(x_a)$ החל מזמן סופי.

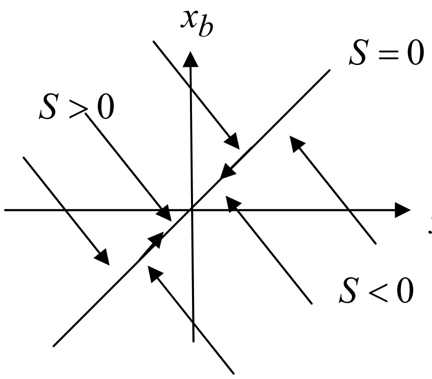
אזי החל מזמן זה המערכת העליונה בעלת דינמיקה יציבה כך ש- $x_a(t) \to 0$, ומתוך $x_b = \phi(x_a)$ נקבל גם כי $x_b(t) \to 0$.

המשוואה $x_b = \phi(x_a)$ כוללת p משוואות סקלריות, ולכן מגדירה "משטח" $n - p$ מימדי במרחב המצב $\Re^n$. משטח זה נקרא "משטח ההחלקה" של המערכת.

לעיתים קרובות בוחרים במשטח החלקה לינארי, כלומר $x_b = Fx_a$.

לשם קיצור נסמן $S(x) = x_b - \phi(x_a)$, כך שמשטח ההחלקה נתון ע"י $S = 0$.

הרעיון כולו מודגם בציור הבא:



הערות:

1. ניתן לראות את הבקר המתקבל כבעל מבנה שונה על משטח ההחלקה ומחוצה לו. בהתאם, שיטת בקרה זו קרויה גם Variable Structure Control.

2. את המיפוי $x_b = \phi(x_a)$ ניתן למצוא בעזרת שיטה כלשהי של תכן לייצוב מערכת x_a, כאשר x_b משמש כמשתנה הבקרה.

3. עבור מערכת בצורה הכללית יותר:

$$\dot{z} = f(z) + G(z)u, \quad u \in \Re^p$$

ניתן בתנאים מתאימים למצוא טרנספורמציית מצב $x = T(z)$ אשר מביאה את המערכת לצורה הדרושה. טרנספורמציה זו נדרשת לקיים

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} G(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ G_2(z) \end{bmatrix}$$

<u>תכן הבקר להגעה למשטח ההחלקה</u> :

מטרתנו עתה לתכנן בקר $u=u(x)$ המביא את המצב למשטח ההחלקה $S(x)=0$.

נגדיר $s(t)=S(x(t))$, ונקבל :

$$\dot{s}=\dot{x}_b-\frac{\partial\phi}{\partial x_a}\dot{x}_a=f_2(x)+G_2(x)u-\frac{\partial\phi}{\partial x_a}f_1(x)$$

נבחר

$$u=G_2^{-1}[-f_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_a}f_1+v]:=u_0+G_2^{-1}v$$

ונקבל :

$$\dot{s}=v$$

לקבלת $s(t)\to 0$ בזמן סופי, נציע את הבקר הבא :

$$v_i=-\beta_i(x)sign(s_i)\equiv-\beta_i(x)sign(x_b-\phi(x_a))_i$$

כאשר $\beta_i(x)$ פונקציה חיובית : $\beta_i(x)\geq\varepsilon_i>0$. את גודלה של פונקציה זו ניתן לקבוע משיקולי רובוסטיות.

בקר זה אכן מביא את $s(t)$ לאפס בזמן סופי : עבור $s_i>0$ נקבל $\dot{s}_i=-\beta_i(x)<-\varepsilon_i$, ולפיכך $s_i(t)\leq s_i(0)-\varepsilon_i t$ (ירידה לאפס בקצב לינארי), ובאופן דומה כאשר $s_i<0$.

נשים לב כי הבקר שמצאנו אינו רציף בסביבת משטח ההחלקה (עקב הקפיצה בפונקצית הסימן), דבר שעשוי לגרום לריטוטים (Chattering) באות הבקרה. כדי למנוע זאת ניתן "להחליק" מעט את פונקצית הסימן סביב האפס, כפי שכבר ראינו.

<u>דוגמא</u> (Khalil 13.12) : נתבונן שוב במודל המטוטלת, כאשר המטרה הפעם לייצב את הזווית θ סביב $\theta=\delta_1$. נגדיר משתני מצב $x_1=\theta-\delta_1, x_2=\dot{\theta}$, ומומנט כניסה u.
המודל המתקבל:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1+\delta_1)-bx_2+cu\end{aligned}$$

הגדרת משטח החלקה: המערכת כבר בצורה הדרושה, כאשר נזהה $x_a=x_1$, $x_b=x_2$.
נתבונן בחלק העליון: $\dot{x}_1=x_2$. ברור כי הבחירה $x_2=-\mu x_1$ (עם $\mu>0$ כלשהו) תוביל למערכת יציבה עבור x_1. משטח ההחלקה הוא לפיכך $x_2+\mu x_1=0$.
כלומר: $\phi(x_1)=-\mu x_1$, $S(x)=x_2+\mu x_1$.
לחישוב הבקר לפי הנוסחה לעיל נזהה ראשית:

$$\begin{aligned}&f_1(x)=x_2, \quad f_2(x)=-a\sin(x_1+\delta_1)-bx_2\\ &G_2(x)=c, \quad \phi(x_1)=-\mu x_1, \quad S(x)=x_2+\mu x_1\end{aligned}$$

לפיכך

$$u_0(x)=G_2^{-1}[-f_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_1}f_1]=\frac{1}{c}[a\sin(x_1+\delta_1)+bx_2-\mu x_2]$$

$$v(x)=-\beta(x)sign(s)=-\beta(x)sign(x_b+\mu x_a)$$

והבקר כולו הוא

$$u(x)=u_0(x)+G_2^{-1}v(x)=u_0(x)+c^{-1}v(x).$$

נציין כי במונחי המשתנים המקוריים, משטח ההחלקה הוא $S=\dot{\theta}+\mu(\theta-\delta_1)$, והמיתוג מתבצע בהתאם לסימנו.

<u>מקרה פרטי</u>: מערכת המבוטאת במשתני פאזה ("צורת קונטרולר").

מקרה פרטי מעניין מתקבל כאשר המערכת נתונה בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a(x) + b(x)u, \quad u \in \Re \end{aligned}$$

$$y = x_1$$

המטרה: <u>עקיבה</u> של היציאה y אחר אות ייחוס r.

<u>מערכת השגיאה</u>: נניח כי נתונות (או ניתן לחשב) גם נגזרות r. נבצע שינוי משתנים כלהלן:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - r \\ &\vdots \\ e_n &= x_n - r^{(n)} \end{aligned}$$

ונקבל

$$"x_a": \quad \begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n \end{cases}$$

$$"x_b": \quad \dot{e}_n = a(x) + b(x)u - r^{(n-1)}$$

המטרה עתה להבטיח כי $e_i(t) \to 0$.

<u>משטח ההחלקה</u>: יש לבחור $e_n = \phi(e_1,\dots,e_{n-1})$ אשר ייצב את המערכת העליונה.

בחירה נוחה היא:

$$e_n = -(k_1 e_1 + \dots + k_{n-1} e_{n-1})$$

כאשר המקדמים (k_i) נבחרים כך שהפולינום $k(s) = s^{n-1} + k_{n-1}s^{n-2} + \dots + k_1$ הינו יציב-הורוביץ. משטח ההחלקה המתקבל הוא

$$S(e) = e_n + k_{n-1}e_{n-1} + \dots + k_1 e_1 = 0$$

או, אקוויולנטית,

$$e_1^{(n-1)} + k_{n-1}e_1^{(n-2)} + \dots + k_1 e_1 = 0$$

ברור כי יציבות $k(s)$ גוררת $e_1(t) \to 0$, ולכן $e_i(t) \to 0$ עבור $1 \le i \le n-1$.

הבקר המתקבל במקרה זה (תרגיל):

$$u(x)=\frac{1}{b(x)}[-a(x)+r^{(n)}-(k_1e_2+\ldots+k_{n-1}e_n)+v]$$

כאשר

$$v(x)=-\beta(x)sign(s)$$

<u>תכן רובוסטי</u>

בקר משטח-החלקה הינו בקר רובוסטי מטבעו, בעיקר עקב השימוש בבקרה שאינה דועכת (פונקצית הסימן) אשר מבטיחה היצמדות למשטח ההחלקה. ניתן גם לבצע עבורו תכן רובוסטי מפורש אשר מתגבר על הפרעות חסומות, וזאת בעזרת בחירה מתאימה של ההגברים $\beta_i(x)$. נדגים זאת עבור המקרה האחרון (מערכת בצורת פאזה), כאשר נוסף איבר הפרעה למשוואה האחרונה:

$$\dot{x}_n=a(x)+b(x)u+\delta(x)$$

לפיכך:

$$\dot{e}_n=a(x)+b(x)u+\delta(x)-r^{(n)}$$

צורת הבקר תהיה זהה לקודם, וההתנהגות על משטח ההחלקה אינה משתנה. מחוץ למשטח, במקום $\dot{s}=v$ נקבל עתה:

$$\dot{s}=v+\delta(x)$$

נניח כי ידוע החסם $|\delta(x)|\le\delta_{\max}(x)$. נבחר $v(x)=-\beta(x)sign(s)$, כאשר

$$\beta(x)\ge\delta_{\max}(x)+\varepsilon\qquad(\varepsilon>0)$$

אזי, עבור $s>0$ נקבל: $\dot{s}=-\beta(x)+\delta(x)\le-\varepsilon$, ובאופן דומה $\dot{s}>\varepsilon$ עבור $s<0$, כך שמתקבלת ההתכנסות הדרושה $s(t)\to 0$ בזמן סופי.

<u>* הכללת תכן רובוסטי</u>: באופן כללי יותר, ניתן לבצע תכן רובוסטי דומה במערכת מהצורה הבאה:

$$\dot{x}_a=f_1(x)+\delta_1(x)$$
$$\dot{x}_b=f_2(x)+G_2(x)[u+\delta_2(x,u)]$$

הבקר הדרוש עדיין יהיה בצורה הנ"ל, כאשר הדרישה היחידה תהיה לגבי גודל המקדמים $\beta_i(x)$. הפרטים – בספר הלימוד (Khalil).