

**שערוך וזיהוי במערכות דינמיות (048825)  
גיליון תרגילים 2**

**מסנן קלמן: המשוואות הבסיסיות**

להגשה ב- 9/5/16

1. מסנן קלמן עם תלות בין רעש המדידה לרעש המצב:
- א. פתחו את מסנן קלמן למקרה הגאוס (על ידי חישוב ישיר של התוחלות המותנות) כאשר הפעם תיתכן קורלציה בין רעש המצב והמדידה.
- ב. פיתוח המסנן על ידי רדוקציה למקרה חסר הקורלציה: הראו כי ניתן לבצע רדוקציה כזו על ידי הוספת איבר מהצורה  $J_k(z_k - H_k x_k - v_k)$  למשוואת המצב (שימו לב שערכו של איבר זה הוא אפס, והמדידה  $z_k$  ידועה). חשבו את המטריצה  $J_k$  הנדרשת לביטול הקורלציה, ורישמו את המשוואות המתקבלות לפי מודל זה.

2. נתון מודל המצב הלינארי (לשם פשטות נניח שאינו תלוי בזמן):
- $$x_{k+1} = Fx_k + Gw_k, \quad k \geq 0; \quad z_k = Hx_k + v_k$$
- כאשר הרעשים  $\{w_k, v_k\}$  סקלריים, אך לא בהכרח לבנים. מטרתנו לבצע הרחבה של מודל המצב כך שיתאים למודל הסטנדרטי עם רעשים לבנים.
- נניח כי הרעשים הנתונים ניתנים לביטוי כתהליכי ARMA המונעים על ידי רעשים לבנים, כלומר מקיימים את המשוואות הבאות:

$$w_k = -\sum_{i=1}^{n_w} a_i w_{k-i} + \sum_{j=1}^{n_w} b_j \bar{w}_{k-j}$$

$$v_k = -\sum_{i=1}^{n_v} c_i v_{k-i} + \sum_{j=1}^{n_v} d_j \bar{v}_{k-j}$$

- כאשר התהליך הדו-מימדי  $\{\bar{w}_k, \bar{v}_k\}$  הינו לבן וסטציונרי (במובן הרחב), בעל ממוצע אפס, חסר קורלציה עם תנאי ההתחלה  $x_0$ , ובעל מטריצת קווריאנס  $N$  (לאו דווקא אלכסונית).
- א. חשבו את צפיפות ההספק הספקטרלית של התהליך  $\{w_k, v_k\}$  [סעיף זה אינו נדרש לפתרון הסעיפים הבאים].
- ב. מצאו מימוש מצב לתהליך  $\{w_k\}$  (דהיינו משוואת מצב שכניסתה רעש לבן ויציאתה  $w_k$ ). הערה: יש למצוא מימוש מסדר  $n_w$ . רצוי להיעזר בידע מקורסים קודמים.
- ג. הראו כי ניתן להרחיב את מערכת המצב הנתונה על ידי הוספת מצבים מתאימים (state augmentation), כך שתקיים את ההנחות הנדרשות למסנן קלמן. רשמו את משוואות המצב המתקבלות, ואת תנאי ההתחלה למסנן.

3. א. הוכיחו את למת היפוך המטריצה (עמ' 21 ברשימות). רמז:  $MM^{-1} = I \dots$
- ב. הוכיחו את נוסחת ה- Information Form עבור עדכון מטריצת הקווריאנס במסנן קלמן.

4. פיתוח מסנן קלמן בזמן רציף:

א. בעזרת הקירוב בזמן בדיד, הראו כי תהליך החידוש הרציף  $\tilde{z}_t$ , הוא רעש לבן בעל

$$E(\tilde{z}_s \tilde{z}_t^T) = R_t \delta(t-s)$$

ב. פתחו את משוואות מסנן קלמן בזמן רציף מתוך המסנן בזמן בדיד, בעזרת קרוב בזמן בדיד עם מרווח דגימה שואף ל-0. הניחו כי קיימת קורלציה בין רעש המצב לרעש

$$E(w_s v_t^T) = S_t \delta(t-s) \text{ : המדידה}$$

5. עיינו במאמר המקורי של קלמן:

R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems",  
*Transactions of the ASME*, vol. 82 (Series D), pp. 35-45, 1960.

הסבירו בקצרה את גישת המאמר לפיתוח המסנן האופטימאלי.