שערוך וזיהוי במערכות דינמיות (048825)
<u>גיליון תרגילים 5</u>
זמן רציף, אלגי' RLS

להגשה ב- 23/6/08

1. <u>פיתוח מסנן קלמן בזמן רציף</u>:

א. בעזרת הקירוב בזמן בדיד, הראו כי תהליך החידוש הרציף $\tilde{z}_t$, הוא רעש לבן בעל קוואריאנס $E\left(\tilde{z}_s \tilde{z}_t^T\right) = R_t \delta(t-s)$.

ב. פתחו את משוואות מסנן קלמן בזמן רציף מתוך המסנן בזמן בדיד, בעזרת קרוב בזמן בדיד עם מרווח דגימה שואף ל- 0. הניחו כי קיימת קורלציה בין רעש המצב לרעש המדידה: $E\left(w_s v_t^T\right) = S_t \delta(t-s)$.

2. <u>פתרון משוואת ריקטי בעזרת מערכת לינארית</u>:

נתבונן במשוואת ריקאטי הדיפרנציאלית: $\dot{P}_t = F_t P_t + P_t F_t^T - P_t R_t P_t + Q_t$, עם תנאי התחלה P_0, ובמערכת המשוואות הליניאריות

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_t & Q_t \\ R_t & -F_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix}$$

תהינה A_t ו- B_t פונקציות (מטריצות $n \times n$) הפותרות את המשוואה, עבור תנאי התחלה המקיימים $A_0 B_0^{-1} = P_0$.

א. הוכיחו כי אם B_t הפיכה עבור $t \in [0,T]$ אזי $P_t = A_t B_t^{-1}$. (רמז: הראו שמשוואת ריקאטי מתקיימת).

ב. פתרו מפורשות את משוואת ריקאטי הדיפרנציאלית הסקלארית (P_t סקלר).

3. נתונה מערכת דינמית בעלת משתנה מיקום X_t ומשתנה מהירות V_t, כאשר

$$\begin{cases} \dot{X}_t = V_t \\ \dot{V}_t = -\beta V_t + \omega_t \end{cases}$$

β הינו פרמטר חיובי, ω_t הינו רעש לבן סקלרי בעל צפיפות ספקטרלית σ_ω^2. המדידה הינה
$z_t = X_t + v_t$ כאשר v_t הינו רעש מדידה, לבן גם הוא, בלתי תלוי ב- ω_t, ובעל צפיפות ספקטרלית σ_v^2. מטרתנו לשערך את המהירות V_t.

א. רישמו באופן מפורש (ברישום סקלרי) את משוואות מסנן קלמן לשיערוך המהירות, כולל משוואת ריקטי הדיפרנציאלית.

ב. האם מטריצת הקווריאנס מתכנסת למצב המתמיד? רישמו משוואות אלגבריות עבור איברי מטריצה זו במצב המתמיד.

4. אלגוריתם RLS (Recursive Least Squares):

אלגוריתם RLS הינו אלגוריתם בסיסי לשיערוך רקורסיבי של פרמטרים. נניח כי נתונה מערכת נומינלית בצורה של משוואת רגרסיה: $y_k = \phi_k{}^T \theta$, כאשר θ וקטור פרמטרים (קבועים בזמן), ϕ_k וקטור אותות נמדדים ("וקטור הרגרסיה"), ואילו y_k גם הוא אות נמדד ("היציאה"). לשם פשטות נניח כי y_k אות סקלרי.

משערך מינימום הריבועים, שיסומן $\hat{\theta}_k$, מביא למינימום את פונקציית המחיר הריבועית:

$$J_k(\theta) = (\theta - \hat{\theta}_0)^T P_0{}^{-1}(\theta - \hat{\theta}_0) + \sum_{l=0}^{k-1} | y_l - \phi_l{}^T \theta |^2$$

כאשר $P_0 > 0$ מטריצה נתונה, ו- $\hat{\theta}_0$ ניחוש התחלתי.

א. (דוגמה): רשמו את משוואת הרגרסיה עבור מערכת ARMA מהצורה:

$$y_t + \sum_{i=1}^{N} a_i y_{t-i} = \sum_{j=0}^{M} b_j u_{t-j}$$

ב. מצאו ביטוי עבור $\hat{\theta}_k$ ($k \geq 1$).

ג. בעזרת חישוב ישיר (ולמת היפוך המטריצות), הראו כי מתקיים הקשר הרקורסיבי הבא:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{P_k \phi_k}{1 + \phi_k{}^T P_k \phi_k}[y_k - \phi_k{}^T \hat{\theta}_k] \quad ; \qquad \hat{\theta}_0 = 0$$

כאשר
$$P_{k+1} = P_k - P_k \phi_k \phi_k^T P_k /(1 + \phi_k^T P_k \phi_k)]$$

ד. בעזרת הפרשנות הדטרמיניסטית של מסנן קלמן, תנו לבעיית השיערוך הנ"ל פרשנות כשערוך מצב של מערכת דינמית. רשמו במפורש את מערכת המצב, והסבירו את משמעותה של המטריצה P_0.

ה. נניח עתה כי וקטור הפרמטרים עשוי להשתנות בזמן, באופן בלתי ידוע מראש. הציעו מודל סטוכסטי (פשוט ככל האפשר) המתאים לכך, ורשמו את המשוואות הרקורסיביות המתקבלות עבורו.

ו. פתרון נוסף למקרה של פרמטרים משתנים בזמן הינו משערך RLS עם "היוון" (discounting), אשר ממזער את פונקציית המחיר:

$$J_k(\theta) = \gamma^k (\theta - \hat{\theta}_0)^T P_0^{-1}(\theta - \hat{\theta}_0) + \sum_{l=0}^{k-1} \gamma^{k-1-l} | y_l - \phi_l^T \theta |^2$$

כאשר $0 < \gamma < 1$. הינו מקדם ההיוון. הסבירו מדוע קריטריון זה מתאים למקרה של פרמטרים משתנים בזמן. מצאו את מודל מצב (סטוכסטי) המתאים לקריטריון זה, ורישמו את המשוואות הרקורסיביות.