

**שערוך וזיהוי במערכות דינמיות**  
**גיליון תרגילים 2**

להגשה ב- 5/5

מסנן וינר

1. א. חיזרו על פיתוח מסנן וינר הסיבתי (בשתי הגישות) עבור בעיית הסינון בזמן רציף.  
ב. פתחו את נוסחת השגיאה (MSE) במישור ההתמרה.

2. א. הוכיחו את הטענה הבאה (עמ' 15 ברשימות ההרצאה). עבור בעיית הסינון הסקלרית בזמן רציף:

$$y_t = s_t + n_t, \quad n \perp s, \quad S_n(s) = \rho^2$$

ובהנחה כי  $S_s(\infty) = 0$ , מסנן וינר הסיבתי נתון על ידי:

$$H(s) = 1 - \frac{\rho}{S_y^+(s)}$$

- ב. כיצד ישתנה המסנן כאשר  $S_s(\infty) = c > 0$  (כלומר, קיים רכיב "לבן" באות).

3. נתון תהליך המדידה:  $y_k = s_k + n_k$ , כאשר  $n_k$  ו-  $s_k$  אותות בלתי-תלויים בזמן בדיד בעלי פונקציות קוריאנס:

$$R_s(k) = 10 \cdot (0.5)^{|k|}, \quad R_n(k) = \delta(k)$$

- א. מצאו את מסנן וינר הבלתי-סיבתי ואת מסנן וינר הסיבתי לבעיה זו. חשבו (מספרית) את שגיאת השיערוך (MSE) המתקבלת בשני המקרים והשוו.  
ב. ציירו את תגובת התדר של שני המסננים. הסבירו עקרונית את צורתה לאור התכולה התדרית של האות והרעש.

4. א. עבור הבעייה מהשאלה הקודמת, נדרש לחשב את מסנן ה-FIR האופטימאלי מהצורה:

$$\hat{s}_k = \sum_{i=0}^N h_i y_{k-i}$$

- רשמו המשוואות לחישוב המקדמים האופטימאליים. חשבו (מספרית) את שגיאת השיערוך עבור  $N = 0, 1, \dots, N_0$  (עם  $N_0$  מתאים לבחירתכם), ציירו, והשוו בקצרה למסנן וינר.

- ב. חיזרו על הסעיף הקודם עבור מסנני FIR מהצורה:  $\hat{s}_k = \sum_{i=-N}^N h_i y_{k-i}$

5. נתון אות סטציונרי  $s(t)$  בזמן רציף, בעל צפיפות הספק ספקטרלית

$$S_s(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)}$$

- מצאו את החזאי האופטימלי עבור אות זה ליחידת זמן אחת קדימה, כלומר שערוך מיטבי של  $s(t+1)$  מתוך  $\{s(\tau), \tau \leq t\}$ .