# פרק 8. בקרה אופטימאלית: בקר LQR

אנו שבים עתה לנושא העיקרי של הקורס, דהיינו מערכות ובקרים ליניאריים וקבועים בזמן, הפעם בגישת הבקרה האופטימאלית.

בפרק זה נתמקד בבעיה הבסיסית ביותר – תכן רגולטור אופטימאלי עבור מערכת ליניארית עם קריטריון ביצועים ריבועי, וזאת כאשר וקטור המצב המלא ניתן למדידה. הבקר המתקבל נקרא לפיכך בקר LQR – Linear Quadratic Regulator . כפי שנראה, הבקר האופטימאלי המתקבל הינו בקר ליניארי וקבוע בזמן בצורת משוב מצב, המוכר לנו מההרצאות הקודמות.

בפרק מאוחר יותר נדון במקרה בכללי יותר, שבו המדידה אינה כוללת את וקטור המצב המלא (בעיית ב- LQG).

## 7.1. בעיית ה-LQR עבור מערכת SISO

נתונה מערכת מצב לינארית בזמן רציף:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

עם תנאי התחלה $x(0) = x_0$. אנו מניחים פה כי המערכת בעלת כניסה ויציאה סקלריות.

נתמקד בבעיית הרגולציה: הערך הרצוי ליציאה הוא אפס, ומטרת הבקר להבטיח זאת. בפרט, **מטרתנו להביא את אות היציאה $y(t)$ לאפס, תוך הגבלה על גודל אות הבקרה $u(t)$.** נציע לצורך זה את קריטריון הביצועים הבא:

$$J = \int_0^\infty (y(t)^2 + \rho u(t)^2)\, dt .$$

כאשר $\rho > 0$ הינו פרמטר חיובי, הנתון לבחירת המתכנן.
הבקר שמביא למינימום את קריטריון הביצועים הנתון הינו <u>הבקר האופטימאלי</u> (ביחס לקריטריון הבצועים הנתון כמובן).

הקריטריון המוצע מבטא פשרה (tradeoff) בין ה"אנרגיה" הכללית של אות היציאה $y(t)$ עד להתכנסותו לערך הרצוי 0, לבין "האנרגיה" של אות הבקרה $u(t)$. הפרמטר $\rho$ קובע את המשקל היחסי של שני איברים אלה.

הסיבה לשימוש בקריטריון ריבועי הינה הן כדי "להעניש" על סטיות גדולות מדי, ולא פחות מכך – כיוון שקריטריון זה מאפשר פתרון אנליטי לבעיה.

כפי שנראה, הפתרון המתקבל הינו פשוט ביותר. הבקר האופטימאלי יהיה מהצורה:

$$u(t) = -Kx(t)$$

כאשר $K$ וקטור הגברים מתאים. כלומר: הבקר האופטימאלי הינו בצורת משוב מצב!

לווקטור ההגבר $K$ יש ערך אופטימאלי הנקבע על ידי נתוני הבעיה, וכפי שניראה הוא ניתן לחישוב אנליטי.

## 7.2. הבקר האופטימאלי

נניח מעתה כי המערכת $(A,B,C)$ סטביליזבילית ודטקטיבילית, כלומר:

(1) הצמד $(A,B)$ הינו סטביליזבילי

(כל הע"ע הלא יציבים של $A$ הינם קונטרולביליים).

(2) הצמד $(A,C)$ הינו דטקטיבילי.

(כל הע"ע הלא יציבים של $A$ הינם אובזרווביליים).

כפי שראינו, התנאי הראשון חיוני לאפשרות ייצוב המערכת על ידי משוב. התנאי השני דרוש פה גם הוא כדי להבטיח מערכת יציבה בחוג סגור, זאת כיוון כיוון שרק היציאה $y(t)$ (ולא המצב כולו) מופיעה בקריטריון הביצועים שהגדרנו.

משוואה חשובה שתהיה מרכזית בדיון הנוכחי הינה <u>משוואת ריקטי האלגברית</u> (Algebraic Ricatti Equation):

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{\rho} PBB^T P = 0 \qquad \text{(ARE)}$$

כאשר $P$ מטריצה ריבועית וסימטרית במימד המערכת $(n \times n)$. זוהי גרסה מטריצית של משוואה ריבועית באיברי המטריצה $P$. ניתן לראות כי בהשמטת האיבר הריבועי, תתקבל משוואת ליאפונוב האלגברית אותה הכרנו בהקשר של יציבות.

הטענה באה מתייחסת לקיום ויחידות הפתרונות למשוואת ריקטי.

**<u>משפט 1</u>** (קיום ויחידות פתרונות למשוואת ריקטי).

בהנחה כי המערכת $(A,B,C)$ סטביליזבילית ודטקטיבילית:

1. ל- (ARE) קיים פתרון יחיד $P$ שהוא אי-שלילי מוגדר, $P \geq 0$.
(יכולים להיות גם פתרונות נוספים, אך רק אחד אי-שלילי מוגדר.)

2. אם מתקיים, בנוסף, כי הצמד $(A,C)$ הינו אובזרווביליל, אזי פתרון זה הינו חיובי-מוגדר: $P > 0$.

לא נוכיח משפט זה. נציין כי פתרון המשוואה ניתן לחישוב אנליטי בשיטות של אלגברה לינארית. ניתן לקבלו במטלב באמצעות פונקציית icare (או care, שאינה מומלצת נומרית).

התוצאה המרכזית של פרק זה היא הבאה.

**<u>משפט 2</u>** (בקר LQR אופטימאלי)

בהנחה כי המערכת $(A,B,C)$ סטביליזבילית ודטקטיבילית:

1. הבקר האופטימאלי הינו בצורת משוב מצב:
$$u(t)=-K^*x(t).$$
וקטור ההגבר האופטימאלי נתון על ידי
$$K^*=\frac{1}{\rho}B^TP,$$
כאשר $P$ פיתרון (כלשהו) של משוואת ריקטי (ARE).
2. המטריצה $(A-BK^*)$, שהינה כזכור מטריצת החוג הסגור עם בקר זה, הינה יציבה-הורוביץ.
3. הערך האופטימאלי של קריטריון הביצועים הינו $J_{\min}=x_0^TPx_0$

<u>הערות</u>:

א. הבקר האופטימאלי מתקבל בצורת משוב מצב קבוע. לפיכך המערכת בחוג הסגור נשארת לינארית וקבועה בזמן (לק״ב).

ב. אנו רואים כי הגבר המשוב האופטימאלי ($K^*$) אינו תלוי בתנאי ההתחלה $x_0$. הערך האופטימאלי של קריטריון הביצועים כמובן כן תלוי בתנאי ההתחלה – כאשר התלות היא ריבועית (כצפוי – מדוע?).

ג. תכונה (2) גוררת כי המערכת בחוג סגור יציבה אסימפטוטית. בפרט,
$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0.$$

ד. משמעות הנחות המשפט:

- הנחת הסטביליזביליות פירושה כי אנו <u>יכולים</u> לייצב את המערכת, ולפיכך לאפס את המצב (אסימפטוטית).
- הנחת הדטקטיביליות גוררת כי <u>נרצה</u> לעשות זאת (אחרת גם היציאה $y(t)$ לא תתאפס, וקריטריון הביצועים יתבדר לאינסוף).

## הוכחת משפט 2

תכונה (2) נובעת מהטיעון הבא: אם $(A-BK^*)$ אינו יציב אזי מתקבל ערך $J=\infty$ עבור הבקר $u(t)=-K^*x(t)$. אבל כיוון שהמערכת סטביליזבילית קיים בקר משוב מצב $u(t)=-Kx(t)$ שעבורו המערכת בחוג סגור יציבה אסימפטוטית, ולכן $J<\infty$. מכאן ש- $u(t)=-K^*x(t)$ אינו אופטימאלי.

נפנה להוכחת (1). קיימות מספר גישות שונות להוכחה, אנו נעשה זאת על ידי השלמה לריבוע של האינטגרנד של $J$. לשם קיצור נכתוב פה $x_t$ במקום $x(t)$, וכולי.

<u>טענת עזר</u>: תהי $P\geq 0$ פתרון של ה- ARE, ונניח כי המערכת פועלת עם חוק בקרה מייצב כלשהו (כלומר, $x_t\to 0$). אזי

$$J=x_0^TPx_0+\int_0^\infty[u_t+\rho^{-1}B^TPx_t]^T\rho\,[u_t+\rho^{-1}B^TPx_t]dt$$

<u>הוכחה</u>: נסמן את הביטוי בטענת המשפט ע"י $\tilde{J}$, ונפתח אותו כלהלן:

$$\tilde{J}=x_0^TPx_0+\int_0^\infty(2x_t^TPBu_t+\rho\,|u_t|^2+\rho^{-1}x_t^TPBB^TPx_t)dt$$

נציב עתה את הגורם $\rho^{-1}PBB^TP$ מתוך משוואת ריקטי:

$$\rho^{-1}PBB^TP=A^TP+PA+C^TC$$

ונקבל:

$$\begin{aligned}\tilde{J}&=x_0^TPx_0+\int_0^\infty(2x_t^TPBu_t+\rho\,|u_t|^2+\rho^{-1}x_t^T(A^TP+PA+C^TC)x_t)dt\\&=x_0^TPx_0+\int_0^\infty(x_t^TC^TCx_t+\rho\,|u_t|^2)dt+2\int_0^\infty x_t^TP(Ax_t+Bu_t)dt\end{aligned}$$

באינטגרל האחרון נשתמש במשוואת המערכת: $\dot{x}_t=Ax_t+Bu$, ונקבל

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty x_t^TP(Ax_t+Bu_t)dt&=2\int_0^\infty x_t^TP\dot{x}_tdt=\int_0^\infty\frac{d}{dt}(x_t^TPx_t)dt\\&=x_t^TPx_t\,\Big|_0^\infty=-x_0^TPx_0\end{aligned}$$

הצבה במשוואה הקודמת נותנת:

$$\tilde{J} = \int_0^\infty (x_t^T C^T C x_t + \rho |u_t|^2) dt = J$$

בכך הוכחנו את טענת העזר. מ.ש.ל.

מטענת העזר מתקבלות המסקנות הבאות:

א. עבור בקר כלשהו, נקבל: $J \geq x_0^T P x_0$.

זאת כיוון שהביטוי תחת סימן האינטגרל הוא ריבוע שלם, ולכן אי-שלילי.

ב. עבור $u_t = -\rho^{-1} B^T P x_t$, נקבל $J = x_0^T P x_0$.

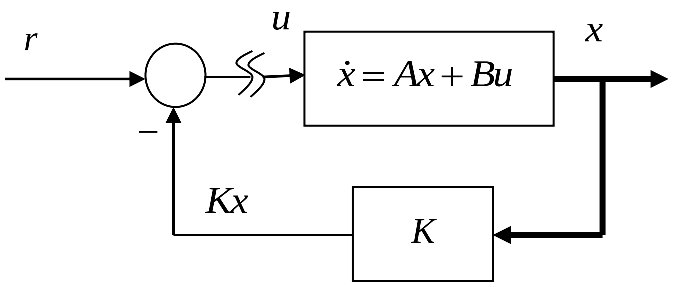
מכאן שהבקר $u_t = -\rho^{-1} B^T P x_t$ הוא הבקר האופטימאלי, והערך המינימאלי של קריטריון הביצועים הוא אכן $J = x_0^T P x_0$. מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: מהוכחה זו של המשפט לא ברור מהיכן "הופיעה" משוואת ריקטי. את מקורה ניתן להבין מתוך הדיון שקיימנו לגבי בקר LQR לאופק זמן סופי.

## 7.3. שולי יציבות עבור הבקר האופטימאלי

כזכור, המשוואה האופיינית של חוג משוב "קלאסי" היא $1+L(s)=0$, כאשר $L(s)="G(s)H(s)"$ היא תמסורת החוג.

עבור מערכת שלנו ניתן לחשב בקלות את $L(s)$ על ידי פתיחת חוג הבקרה במקום המוראה:




נקבל:

$$L(s)=K(sI-A)^{-1}B$$

ניתן לחשב עתה את שולי היציבות (בפרט עודף הפאזה ועודף ההגבר) עבור תמסורת זו.
אנו נוכיח את התוצאה החשובה הבאה:

**<u>משפט 3</u>** (עודף פאזה והגבר של בקר LQR)
עבור המערכת עם משוב מצב אופטימאלי (ובתנאים של המשפטים הקודמים), מתקיים כי $|1+L(j\omega)|\geq 1$ לכל $\omega\geq 0$. מכאן,

א. עודף הפאזה של חוג המשוב הוא $60^\circ$ לפחות
ב. עודף ההגבר הוא $\infty$ (להגדלה), ופחות מ-0.5 (להקטנה).

<u>הוכחה:</u> נראה ראשית כי $|1+L(j\omega)|\geq 1$. לשם כך נעזר בתוצאה הבאה:

<u>למה</u> (נוסחת KYP: קלמן-יעקובוביץ-פופוב):

נסמן $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$, $L(s)$ כנ"ל. אזי מתקיים, עבור הבקר האופטימאלי:

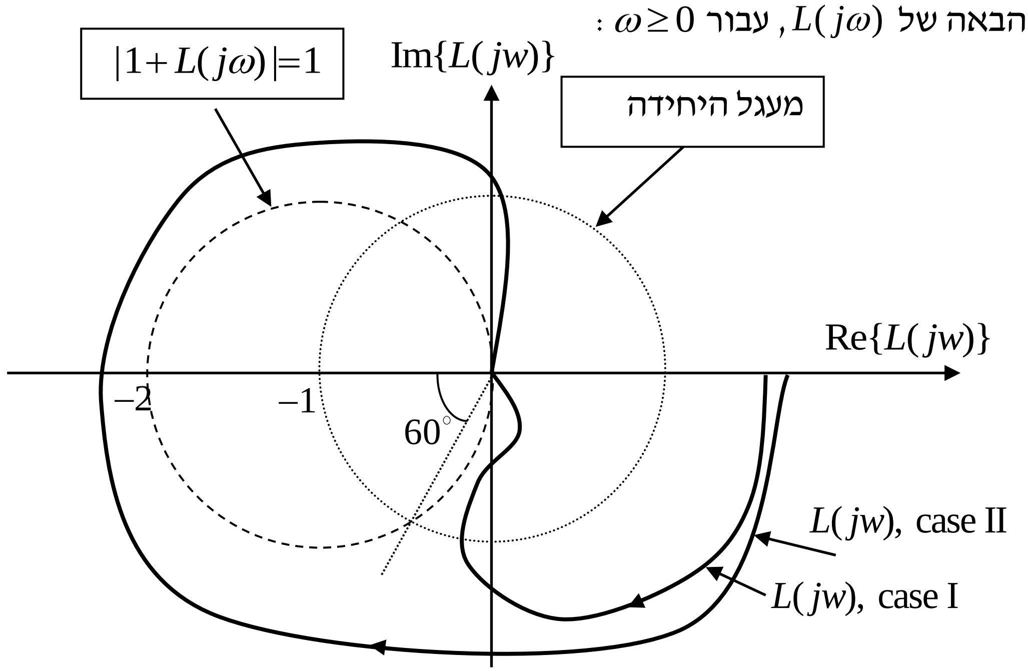
$$\rho+G(-s)G(s)=(1+L(-s))\rho(1+L(s))$$

הוכחת הלמה (המסתמכת כמובן על נוסחת ההגבר האופטימאלי) היא אלגברית, ומובאת כנספח בסוף הפרק.

המשך הוכחת משפט 3: הצבת $s = j\omega$, $G(-j\omega)=\overline{G(j\omega)}$ בנוסחה האחרונה נותנת

$$|1+L(j\omega)|^2=1+\rho^{-1}|G(j\omega)|^2\geq 1$$

את ההשלכות לגבי עודף הפאזה ועודף ההגבר ניתן להבין מתוך דיאגרמת נייקויסט הבאה של $L(j\omega)$, עבור $\omega\geq 0$:




מתוך $|1+L(j\omega)|\geq 1$ נובע כי עקום נייקויסט של $L(j\omega)$ חייב לעבור מחוץ למעגל המסומן ב- $|1+L(j\omega)|=1$.

בציור מוראות שתי אפשרויות לעקום נייקויסט של $L(j\omega)$: באחת (מקרה I) העקום לא מקיף את הנקודה (1-), ובשנייה (מקרה II) כן.

ניתן לראות כי כדי לשנות את מספר ההקפות של הנקודה (1-) ע"י הורדת פאזה בלבד, נדרשת גריעת פאזה בשיעור של $60^\circ$ לפחות (בשני המקרים).

ניתן גם לראות כי הגדלת ההגבר בשיעור כלשהו לא תשנה את מספר ההקפות. לעומת זאת, הורדת הגבר פי 2 לפחות עשויה לשנות זאת במקרה של עקום II. (במקרה I אין הגבלה על שיעור הורדת הגבר המשוב. מה זה אומר על המערכת המבוקרת?).

■

## 7.4. מיקום קטבי החוג הסגור, דיאגרמת Root Locus סימטרי

עבור הבקר האופטימאלי $u(t)=-K^*x(t)$, מטריצת המערכת המתקבלת בחוג סגור הינה $(A-BK^*)$, עם פולינום אופייני $\alpha(s)\triangleq\det(sI-A+BK^*)$.

הנוסחה הבאה מאפשרת לחשב ישירות את הפולינום האופייני $\alpha(s)$, ללא צורך לפתור את משוואת ריקטי.

**<u>משפט 4</u>** (נוסחת הפולינום האופייני עם הבקר האופטימאלי)

תהי $G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\dfrac{b(s)}{a(s)}$ פונקציית התמסורת של המערכת המבוקרת.

אזי מתקיים

$$\underline{\alpha(s)\alpha(-s)\triangleq a(s)a(-s)+\rho^{-1}b(s)b(-s)} \qquad (*)$$

<u>הוכחה</u>: נחזור לנוסחת KYP לעיל:

$$\rho+G(-s)G(s)=\rho(1+L(-s))(1+L(s)) \qquad (**)$$

כאשר $L(s)=K(sI-A)^{-1}B$. עתה,

$$\begin{aligned}1+L(s)&=1+K(sI-A)^{-1}B=\det(I+BK(sI-A)^{-1})\\&=\det(sI-A+BK)\det(sI-A)^{-1}=\frac{\alpha(s)}{a(s)}\end{aligned}$$

כאשר השיוויון השני נובע מהזהות האלגברית $\det(I+MN)=\det(I+NM)$.

הצבה ב-(**) נותנת:

$$\rho+\frac{b(-s)b(s)}{a(-s)a(s)}=\rho\frac{\alpha(-s)\alpha(s)}{a(-s)a(s)}$$

הכפלה במכנה נותנת את הדרוש. ■

המשוואה האחרונה מאפשרת שימוש בתהליך הבא למציאת הפולינום האופייני $\alpha(s)$ וההגבר האופטימאלי $K$, כאמור ללא צורך לפתור את משואת ריקטי:

א. נפתור את המשוואה הפולינומיאלית $a(s)a(-s)+\rho^{-1}b(s)b(-s)=0$. למשוואה זו $2n$ שורשים, ובגלל הסימטריה לכל שורש $\lambda_i$ מתאים שורש $\lambda_{i+n}=-\lambda_i$. לכן, בהנחה שאין שורשים על הציר המדומה, יהיו בדיוק $n$ שורשים בחצי המישור הימני, ו-$n$ שורשים בחצי המישור השמאלי.

ב. נאסוף את $n$ השורשים בחצי המישור השמאלי, ונבנה מהם את הפולינום $\alpha(s)$. שרשי הפולינום הזה הם קטבי החוג הסגור.
הסיבה שלוקחים רק את השורשים בחצי המישור השמאלי היא כיוון שהחוג הסגור האופטימאלי הוא יציב! מאותה סיבה בדיוק לא ייתכנו קטבים על הציר המדומה.

ג. עתה ניתן להשתמש בנוסחת בס-גורה (למשל) לחישוב ההגבר $K$ הנדרש לקבלת $\alpha(s)$ שחישבנו: $K=(\underline{\alpha}-\underline{a})\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^{-1}$. הגבר זה הינו ההגבר האופטימאלי.

## <u>Root Locus סימטרי</u>

לעיתים קרובות המתכנן אינו יודע בביטחון את הערך המתאים של הפרמטר $\rho$ במדד הביצועים, ומעוניין לבדוק כיצד משתנה החוג הסגור כתלות בפרמטר זה. בפרט, נרצה לדעת כיצד משתנים קטבי החוג הסגור (שורשי $\alpha(s)$) כתלות ב- $\rho$.

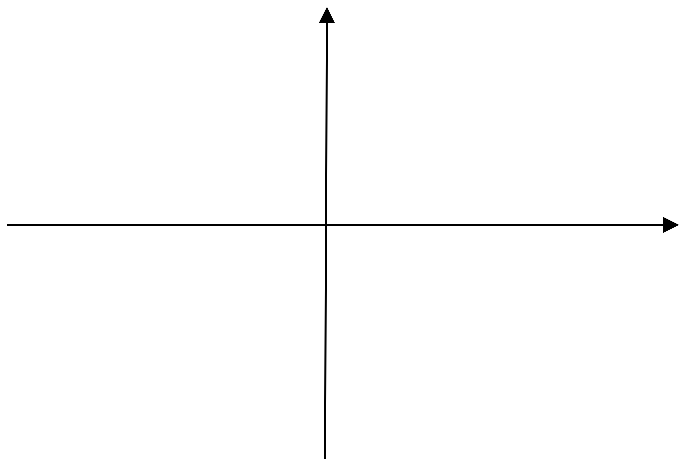
כפי שראינו, ממשוואה (*) נובע כי שורשי $\alpha(s)$ הם השורשים היציבים של המשוואה $a(s)a(-s)+\rho^{-1}b(s)b(-s)=0$, או (באופן שקול) של המשוואה

$$1+\rho^{-1}\frac{b(s)b(-s)}{a(s)a(-s)}\equiv 1+\rho^{-1}G(s)G(-s)=0.$$

נשרטט Root Locus עבור משוואה זו, כפונקציה של "ההגבר" $\rho^{-1}>0$. כאן פונקצית התמסורת $G(s)G(-s)$ תופסת את מקום "$GH$" ב-RL הרגיל. בגלל ההופעה הסימטרית של האפסים והקטבים, שרטוט ה- RL המתקבל יהיה אף הוא סימטרי סביב הציר המדומה, כאשר רק הקטבים בחצי המישור השמאלי שייכים ל- $\alpha(s)$.

<u>דוגמא</u>:
$$G(s)=\frac{1}{s^2+4s+5} \quad ; \qquad s_{1,2}=-2\pm j$$

(השלימו:)



עתה ניתן להפעיל שיקולים נוספים כדי לבחור את הערך הרצוי לפרמטר $\rho$, לפי המיקום הרצוי של קטבי החוג הסגור. כעיקרון, הבעיה של בחירת מיקום עבור $n$ קטבי החוג הסגור הצטמצמה לבחירה ערכו של פרמטר סקלרי אחד.

**<u>מקרי קיצון</u>:** מעניין לחקור את הקטבים המתקבל בשני מקרי הקיצון הבאים.

א. $\rho\to\infty$. במקרה זה ה"קנס" על בקרה גדולה הוא מירבי, כך שהבקר האופטימאלי שואף להפעיל בקרה "חלשה" ככל האפשר, כמובן תוך שמירת יציבות החוג הסגור. מתוך ה-RL ניתן לקראות שבקר זה משאיר את כל הקטבים היציבים של המערכת $G(s)$ במקומם, ו"משקף" את הקטבים הלא יציבים לחצי המישור השמאלי.

ב. $\rho\to 0$. פה הבקרה "זולה", ולכן הדגש הוא על דעיכה מהירה של היציאה $y(t)$. אנו רואים שבקר זה משאיף חלק מהקטבים של החוג הסגור <u>לאפסים ה"יציבים"</u> של החוג הפתוח (זו הדרך הזולה ביותר לבטל השפעתם של קטבים אלה – ע"י צמצום עם אפסים), או לשיקופם (במקרה של אפסים "לא יציבים", בחצי המישור הימני). יתר הקטבים מתרחקים שמאלה לאורך האסימפטוטות, כך שהם הופכים להיות בעלי מודים מהירים יותר.

## 7.5. הרחבה למערכות מרובות כניסות ויציאות (MIMO)

כזכור, קריטריון הביצועים שלנו היה עד כה $J=\int (y(t)^2+\rho u(t)^2)dt$ . קריטריון זה מתאים למקרה של כניסה ויציאה סקלרים.
במקרה של מערכת מרובת כניסות ויציאות, נתייחס לקריטריון הביצועים הריבועי הבא

$$J=\int_0^\infty \left( x(t)^T Qx(t)+u(t)^T Ru(t) \right) dt$$

כאשר $Q\ge 0,\ \ R>0$ (מטריצה חיובית \ חיובית למחצה, במימד מתאים). נסביר להלן את שני איברי המחיר.

<u>א. מחיר הכניסה:</u>

עתה הכניסה $u$ הינה וקטור רב מימדי $u=(u_1,\dots u_m)^T$.

ניתן כמובן להחליף את $u(t)^2$ בנורמה הריבועית: $\|u(t)\|^2$.

באופן כללי יותר, נחליף את האיבר $\rho u^2$ בתבנית הריבועית $u^T Ru$, כאשר $R>0$ (מטריצה חיובית-מוגדרת במימד $m\times m$). הגדרה זו מאפשרת לתת משקל שונה לכניסות השונות: אם נבחר $R$ אלכסונית, $R=diag(\rho_1,\dots,\rho_n)$, נקבל

$$u^T Ru=\sum_{i=1}^m \rho_i u_i^2 .$$

ניתן אף לקבל צימוד בין כניסות שונות ע"י איברים חוץ-אלכסוניים. למשל,

$$R=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad u^T Ru=2u_1^2-2u_1u_2+u_2^2\equiv u_1^2+(u_1-u_2)^2$$

מדוע נדרש $R>0$? המחיר של כניסה גדולה חייב להיות חיובי. נתבונן במקרה הגבולי הבא:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad u^T Ru=(u_1-u_2)^2$$

במקרה זה מתקיים רק $R\ge 0$ ולא $R>0$ (ע"ע 0, 2). גם אם $u_1=u_2\to\infty$, עדיין נקבל מחיר 0 על אותות הבקרה.

ב. מחיר המצב \ יציאה:

נתבונן במקרה של יציאות מרובות: $y=(y_1,\ldots,y_\ell)^T$. בהמשך לדיון הקודם, ניתן לחליף את הגורם $y^2$ מהמקרה הסקלרי בתבנית הריבועית: $y^T\tilde{Q}y$, כאשר $\tilde{Q}\geq 0$.

ניתן לבטא איבר זה באמצעות וקטור המצב. נזכור כי $y=Cx$, ולפיכך

$$y^T\tilde{Q}y \equiv \| Cx \| = x^T(C^T\tilde{Q}C)x .$$

קיבלנו מחיר ריבועי מהצורה $\underline{x^TQx}$, כאשר $Q \triangleq C^T\tilde{Q}C \geq 0$.

האיבר הריבועי מהצורה $x^TQx$ הוא לפיכך כללי יותר, ומטיל מחיר ישירות על הרכיבים השונים של וקטור המצב (או צירופיהם). לאיבר זה משמעות גם אם לא מוגדרת "יציאה" טבעית למערכת.

בכיוון ההפוך, נניח שהגדרנו מחיר מהצורה $x^TQx$, כאשר $Q\geq 0$. אזי ניתן להגדיר באופן מלאכותי וקטור יציאה $\tilde{y}\triangleq\tilde{C}x$, כך שמתקיים $x^TQx=\|\tilde{y}\|^2$. המטריצה $\tilde{C}$ היא "מטריצת השורש" של $Q$, דהיינו מטריצה המקיימת $Q=\tilde{C}^T\tilde{C}$. ידוע כי קיימת מטריצה כזו, עם מספר עמודות השווה לדרגת המטריצה $Q$.

<u>לסיכום</u>, אנו דנים במערכת המצב

$$\dot{x}(t)=Ax+Bu;\quad x(0)=x_0$$

עם קריטריון הביצועים הריבועי:

$$J=\int_0^\infty \left(x(t)^TQx(t)+u(t)^TRu(t)\right)dt$$

**משפט 3 (בקר LQR למערכת MIMO):**

נניח כי: $R>0$, הצמד $(A,B)$ סטביליזבילי, ואילו $Q\geq 0$ ניתנת לפרוק $Q=\tilde{C}^T\tilde{C}$, כאשר הצמד $(A,\tilde{C})$ דטקטיבילי. אזי משפט 1 ומשפט 2 לעיל תקפים, כאשר $\rho$ מוחלף ב- $R$ ואילו $C^TC$ מוחלף ב- $Q$, באופן הבא:

משוואת ריקטי: $$A^TP+PA+Q-PBR^{-1}B^TP=0$$

מטריצת ההגבר האופטימאלי: $K^* = R^{-1}B^T P$

ההוכחה זהה להוכחת המשפטים הקודמים ולא נחזור עליה.

נעיר לבסוף כי נוסחת KYP (קלמן-יעקובוביץ-פופוב) למקרה הרב מימדי הינה:

$$R + G(-s)^T G(s) = (I + L(-s))^T R(I + L(s))$$ .

## 7.6. זמן בדיד

נתאר עתה בקצרה את בעיית ה-LQR עבור מערכות מצב בזמן בדיד.

נתונה המערכת:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \geq 0$$
$$y(k) = Cx(k)$$

קריטריון הביצועים:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( x(k)^T Qx(k) + u(k)^T Ru(k) \right)$$

התוצאות העיקריות שתיארנו לעיל תקפות גם המקרה זה: בפרט הבקר האופטימאלי מתקבל בצורת משוב מצב, $u(k) = -Kx(k)$. ההבדלים העיקריים ביחס לנוסחאות הזמן הרציף הינם:

- משוואת ריקטי המתאימה לזמן הבדיד הינה:

$$P = A^T PA + Q - A^T PB[R + B^T PB]^{-1} B^T PA \qquad \text{(DARE)}$$

- משוואת ההגבר האופטימאלי: $K = [R + B^T PB]^{-1} B^T PA$

הערך המינימאלי של קריטריון הביצועים (המתקבל עבור הבקר האופטימאלי) הינו:

$$J_{\min} = x_0^T Px_0 .$$

## 7.7. * הוספת גורם היוון

נחזור לבעיית הבקרה בזמן רציף, ונתבונן בקריטריון הביצועים הבא:

$$J = \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left( x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) \right) dt$$

פה המחיר הרגעי מוכפל באקספוננט הזמני $e^{-\gamma t}$. המספר $\gamma$ נקרא <u>גורם ההיוון</u> של פונקציית המחיר. כאשר $\gamma > 0$, המשמעות היא כי מוענק משקל נמוך יותר למחיר הרגעי ככל שהוא רחוק יותר בעתיד. בהקשר כלכלי, ניתן לקשור בין גורם ההיוון לשיעור הריבית, אשר מעלה את ערך הכסף ככל שהוא מתקבל (או משולם) מוקדם יותר.

לשם נוחות נגדיר $-\gamma = 2\alpha$, כך שקריטריון הביצועים עתה הוא

$$J = \int_0^\infty e^{2\alpha t} \left( x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) \right) dt$$

לפתרון בעיה זו, נבצע את חילוף המשתנים הבא:

$$\tilde{x}(t) = e^{\alpha t} x(t), \quad \tilde{u}(t) = e^{\alpha t} u(t)$$

כך שנקבל:

$$J = \int_0^\infty \left( \tilde{x}(t)^T Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)^T R\tilde{u}(t) \right) dt$$

זהו קריטריון הביצועים בצורה שהכרנו לפני כן, אך עם המשתנים החדשים.

מהי המערכת המתקבלת עם משתנים אלה? נחשב את הנגזרת הזמנית של $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= \alpha e^{\alpha t} x(t) + e^{\alpha t}\dot{x}(t) \\ &= \alpha\tilde{x}(t) + e^{\alpha t}(Ax(t) + Bu(t)) \\ &= (\alpha I + A)\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

אנו רואים שהתקבלה מערכת מצב בצורה הרגילה, כאשר המטריצה $A$ מוחלפת במטריצה $\tilde{A} = (\alpha I + A)$.

מכאן ניתן להמשיך בצורה הרגילה: הבקר האופטימאלי הוא

$$\tilde{x}(t) = -K\tilde{u}(t)$$

או, אקוויולנטית (לאחר צמצום $e^{\alpha t}$):

$$x(t) = -Ku(t)$$

כאשר:

$$K = R^{-1}B^T P$$

ואילו $P$ פתרון משוואת ריקטי עבור $\tilde{A} = (\alpha I + A)$:

$$(\alpha I + A)^T P + P(\alpha I + A) + C^T C - PBR^{-1}B^T P = 0$$

התנאי לקיום הפתרון הוא כי המערכת $(\tilde{A}, B, C)$ הינה סטביליזבילית ודטקטיבלית.

נזכיר כי הצמד $(\tilde{A}, B)$ סטביליזבילי אם ורק אם כל הע"ע הלא-קונטרולביליים של המטריצה $\tilde{A} = \alpha I + A$ הינם יציבים ($\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$). מהו התנאי במונחים של המטריצה המקורית $A$?

- ניתן להראות כי הע"ע הלא קונטרולביליים של $\tilde{A} = \alpha I + A$ זהים לאלה של $A$.
- דרישת היציבות $\mathrm{Re}\{\lambda_i(\tilde{A})\} < 0$ שקולה לדרישה: $\mathrm{Re}\{\lambda_i(\tilde{A})\} < -\alpha$.
- לפיכך: נדרש כי כל הע"ע הלא-קונט' של $A$ יהיו משמאל לקו $\mathrm{Re}\{s\} = -\alpha$.

את דרישת הדטקטיביליות ניתן לפרש באופן דומה.

**נספח:** הוכחת למת KYP (קלמן-יעקובוביץ-פופוב)

נוכיח את הלמה למקרה הכללי של מערכת MIMO.

טענה: עבור הבקר האופטימאלי, מתקיים:

$$R+G(-s)^T G(s)=(I+L(-s))^T R(I+L(s))$$

כאשר $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$, $L(s)=K(sI-A)^{-1}B$.

הוכחה: נצא ממשוואת ריקטי: $A^T P+PA+C^T C-PBR^{-1}B^T P=0$.

מתוך $K=K^*=R^{-1}B^T P$ נקבל $B^T P=RK$, ולכן

$$A^T P+PA+C^T C-K^T RK=0$$

הוספת וחיסור $sI\cdot P$ נותנים:

$$-(-sI-A^T)P-P(sI-A)+C^T C-\rho K^T K=0$$

נכפיל מימין ב- $(sI-A)^{-1}B$ ומשמאל ב- $B^T(-sI-A^T)^{-1}$, לקבלת:

$$-B^T P(sI-A)^{-1}B-B^T(-sI-A^T)PB+G(-s)^T G(s)-L(-s)^T RL(s)=0$$

שימוש נוסף ב- $B^T P=RK$ נותן

$$-RL(s)-L(-s)^T R+G(-s)^T G(s)-L(-s)^T RL(s)=0$$

קיבוץ איברים נותן את השיוויון המבוקש.