פרק 5. דיון מורחב בקונטרולביליות ואובזרוביליות

מושג הקונטרולביליות שלמדנו עד כה היה מוחלט, ללא "אפשרויות ביניים" – המערכת קונטרולבילית, או שאינה כזו. בפרק זה נטפל ביתר פירוט במערכות לא קונטרולביליות, ונלמד להפרידן באמצעות התמרות שקילות לחלק קונטרולבילי וחלק לא-קונטרולבילי. באופן דומה נטפל במערכות שאינן אובזרוביליות.

הפרדה זו מאפשרת לזהות את ה"מודים" (ערכים עצמיים, והתגובה הזמנית הנלווית אליהם) הלא-קונטרולביליים ו\או הלא-אבזרוביליים של המערכת המקורית. כמו כן, היא מהווה כלי נוח להבנה תיאורטית של מגבלות הבקרה ושיערוך מצב עבור מערכות שאינו מינימליות.

* הערה - מודים (modes) לעומת ערכים עצמיים: ניתן להשתמש במונח "מוד" (mode) וערך-עצמי של מטריצת המערכת באופן חליפי. להגדרה מדויקת יותר, נתבונן במערכת הלינארית $\dot{x}(t)=Ax(t)$, ונניח כי המטריצה A היא בעלת n ע"ע וקטורים עצמיים בלתי תלויים, $\{\lambda_i,\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$. אזי ניתן לבטא את התגובה הזמנית של המערכת כך: $x(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathrm{v}_i e^{\lambda_i t}$, כאשר המקדמים α_i תלויים בתנאי ההתחלה. הפונקציות $\mathrm{v}_i e^{\lambda_i t}$ הם המודים של המערכת.

5.1. הקדמה: דוגמאות

<u>א</u>. נתבונן במערכת מסדר 2, עם דינמיקת המצב הבאה:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

(צורה קנונית אלכסונית). מערכת זו אינה קונטרולבילית (מדוע?), ודרגת מטריצת הקונטרולביליות היא 1. ניתן פה להפריד באופן ברור בין משתנה המצב הראשון שניתן לשלוט על ערכו (x_1 "קונטרולבילי"), למשתנה המצב השני שלא ניתן להשפיע עליו דרך הכניסה ("אינו קונטרולבילי").

ב. נתבונן במערכת מסדר 2, עם דינמיקת המצב:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

מערכת זו אינה קונטרולבילית (מדוע?), ודרגת מטריצת הקונטרולביליות היא 1. אך פה לא ניתן להצביע על אחד ממשתני המצב כאחראי לכך.

כדי לעשות זאת, נבצע על המערכת התמרת שקילות באופן הבא. נגדיר משתני מצב חדשים:

$$z_1 = x_1,\ \ z_2 = x_1 - x_2$$

משוואת המצב עם משתנים אלה:

$$\dot{z}_1 = x_1 + 2x_2 + u = z_1 + 2(z_1 - z_2) + u, \qquad \dot{z}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

בייצוג זה, ברור כי z_2 הוא ה"אחראי" לאובדן הקונטרולביליות.

ג. נתבונן במערכת המצב הבאה מסדר 2:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

מערכת זו אינה אבזרוובילית. מדוע?. מיהו משתנה המצב ה"אחראי" לכך?

ד. נתבונן במערכת המצב הבאה מסדר 2:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

מטריצת האובזרוביליות בעלת דרגה 1, ומכאן שהמערכת לא אובזרוובילית. אולם לא ניתן להצביע על אחד ממשתני המצב כאחראי לכך: היציאה מודדת את הסכום $x_1 + x_2$, ולא ניתן להפריד בין המצבים.

נגדיר משתני מצב חדשים. ראשית נבחר: $z_1 = y = x_1 + x_2$ (שהוא מדיד ישירות). כמשתנה המצב השני נבחר למשל $z_2 = x_2$. נקבל (בידקו):

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}?\\ ?\end{bmatrix}u, \quad y=z_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

בייצוג זה של המערכת, ניתן להבחין כי ערכו של z_2 אינו ניתן לשחזור (הוא אינו אובזרוובילי).

5.2. ייצוג מופרד למערכת לא קונטרולבילית

נתבונן במערכת מצב $S=(A,B,C)$ (בזמן רציף או בדיד), בעלת מטריצת קונטרולביליות $\mathcal{C}=[B,\ AB,\cdots,A^{n-1}B]$.

נניח כי דרגת $\mathbb{C}$ היא r, כאשר $\underline{r<n}$. לפיכך, מערכת זו <u>אינה קונטרולבילית</u>.

<u>משפט 1</u>: יהי (A,B) צמד לא-קונטרולבילי, כאשר $rank\{\mathcal{C}\}=r<n$.

אזי קיימת התמרת שקילות T, כך שמתקיים:

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{array}{cc} r & n-r \\ \left[\begin{array}{c} \bar{A}_{11} \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{22} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array},\quad \bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}.$$

במערכת זו, הצמד $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1)$ הינו <u>קונטרולבילי</u>.

את הוכחת המשפט נציג בתת-פרק הבא. לפני כן נדון במשמעותו.

<u>משמעות משפט 1</u>

א. המאפיין החשוב של המערכת המצב שהתקבלה הוא נוכחות <u>האפסים</u> במקומות המסומנים במטריצות $\bar{A}$, $\bar{B}$. למטריצה $\bar{C}=CT$ אין כל תכונה מיוחדת.

ב. כפי שנראה מייד, המערכת $\bar{S}$ שהתקבלה מופרדת למעשה לשני חלקים: האחד קונטרולבילי, ואילו השני אינו קונטרולבילי.

כדי לראות זאת, נוח לפרק את וקטור המצב $\bar{x}$ לשני רכיבים במימד מתאים:

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}\begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}$$

ובאופן דומה נחלק את וקטור היציאה $\bar{C}=CT$:

$$\bar{C}=\begin{array}{cc} r & n-r \\ \left[C_1\right. & \left.C_2\right] \end{array}$$

משוואת המצב של המערכת הינן, בהתאם:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}\bar{C}_1 & \bar{C}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}$$

ג. עבור הרכיב $\bar{x}_2$ של המצב נקבל מכאן :

$$\tfrac{d}{dt}\bar{x}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2$$

אנו רואים כי תת-מערכת זו, עם מצב $\bar{x}_2$, אינה מושפעת כלל מהכניסה (לא באופן ישיר, ואף לא באופן עקיף דרך רכיב המצב $\bar{x}_1$). לכן, <u>רכיב המצב $\bar{x}_2$ אינו קונטרולבילי</u> : לא ניתן להשפיע עליו כלל באמצעות הכניסה.

ד. עבור הרכיב הרכיב $\bar{x}_1$ של המצב מתקבל :

$$\tfrac{d}{dt}\bar{x}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u$$

נזכור כי הצמד $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1)$ הינו קונטרולבילי. אם נתעלם לרגע מהשפעת הרכיב הלא-קונטרולבילי $\bar{A}_{12}\bar{x}_2$, הרי רכיב המצב $\bar{x}_1$ הינו קונטרולבילי : ניתן להגיע מכל מצב לכל מצב בזמן סופי באמצעות כניסה מתאימה. את הרכיב $\bar{A}_{12}\bar{x}_2$ ניתן לראות בתור הפרעה חיצונית, וניתן לקזז את השפעתו באמצעות כניסה מתאימה.

ה. בהתאם לאמור, r הערכים העצמיים של המטריצה $\bar{A}_{11}$ נקראים <u>המודים הקונטרולביליים</u> של המערכת, ואילו $(n-r)$ הערכים העצמיים של המטריצה $\bar{A}_{22}$ נקראים <u>המודים הלא-קונטרולביליים</u> של המערכת.

ו. נשים לב כי צרוף הע״ע של $\bar{A}_{11}$ ושל $\bar{A}_{22}$ נותן את הע״ע של $\bar{A}$, ולכן גם של המטריצה המקורית A. ההפרדה של הע״ע לקונטרוביליים ולא-קונטי איננה תלויה בהתמרת השקילות T שנבחרה (יש רבות שנותנות את הצורה הקנונית הרצויה), אלא היא תכונה של המערכת המקורית.

ז. נחשב את פונקציית התמסורת של המערכת :

$$
\begin{aligned}
H(s) &= C(sI-A)^{-1}B = \bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-\bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI-\bar{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI-\bar{A}_{11})^{-1} & \phi \\ 0 & (sI-\bar{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \bar{C}_1(sI-\bar{A}_{11})^{-1}\bar{B}_1
\end{aligned}
$$

אנו רואים כי פונקציית התמסורת תלויה רק בתת-המערכת $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1,\bar{C}_1)$ הקשורה לרכיב המצב הקונטרולבילי $\bar{x}_1$. בפרט, $(n-r)$ הע"ע של המטריצה $\bar{A}_{22}$ הצטמצמו ואינם מופיעים בפונקציית התמסורת.

אבחנה זו קשורה כמובן בחוסר המינימליות של מערכת שאינה קונטרולבילית: במערכת כזו, <u>כל המודים הלא-קונטרולביליים מצטמצמים עם האפסים בפונקציית התמסורת</u>.

השלכות לגבי משוב מצב והצבת קטבים :

כפי שראינו, במערכת קונטרולבילית ניתן למקם מחדש את כל הע״ע כרצוננו באמצעות משוב מצב. נבחן עתה מה ניתן לעשות במערכת שאינה קונטרולבילית.

תהי $S=(A,B,C)$ מערכת לא קונטרולבילית, בעלת דרגת קונטרולביליות $r<n$. נניח שהמערכת כבר בצורה הסטנדרטית (אם לא, נבצע התמרת שקילות). בתוספת משוב המצב $u=v-Kx$, נקבל את מטריצת החוג הסגור :

$$A_K = A - BK = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \;\; K_2]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} - B_1K_1 & A_{12} - B_1K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

עקב הצורה הבלוק-משולשית, הע״ע של A_K הם צרוף הע״ע של $A_{11}-B_1K_1$ ושל A_{22}.

ניתן לראות כי :

א. $n-r$ המודים הלא קונטרולביליים (הע״ע של A_{22}) אינם מושפעים ממשוב המצב.

ב. r המודים הקונטרולביליים (הע״ע של A_{11}) ניתנים להצבה כרצוננו באמצעות K_1. זאת כיוון שהצמד (A_{11},B_1) הינו קונטרולבילי!

ג. נפרט את משוואת המשוב : $u=v-Kx=v-K_1x_1-K_2x_2$. ניתן לראות כי ההגבר K_2 מכפיל את רכיב המצב הלא-קונטרולבילי. הגבר זה אינו משפיע כלל על הע״ע של החוג הסגור.

<u>סטביליזביליות</u>:

כיוון שלא ניתן להשפיע על רכיב המצב הלא-קונטרולבילי $\bar{x}_2$, חשוב להבחין בין שני מקרים בהתאם ליציבות החלק הלא-קונטרולבילי של המערכת. (הנשלט ע״י הע״ע של המטריצה $\bar{A}_{22}$) :

א. כל המודים הלא-קונטרולביליים (בהתאמה, הע״ע של המטריצה $\bar{A}_{22}$) הם יציבים (כלומר: הע״ע הם בתחום היציבות - בצד שמאל פתוח של המישור למערכת בזמן רציף, בתוך מעגל היחידה למערכת בזמן בדיד). זה אינו ״אסון״, כי x_2 לא יתבדר – אידאלית הוא ידעך לאפס, או לפחות יישאר סופי בנוכחות הפרעות ורעשים.

ב. קיים מוד לא קונטרולבילי שאינו יציב. במקרה זה רכיב המצב x_2 יתבדר (או לפחות לא יתכנס, אם הע״ע המתאים נמצא על הציר המדומה), ומעשית עשוי להיגרם נזק למערכת.

מערכת תיקרא <u>סטביליזבילית</u> (stabilizable, ניתנת לייצוב) אם <u>כל</u> המודים הלא-קונטרולביליים (אם יש כאלה) הם יציבים.

מערכת שאינה סטביליזבילית לא ניתנת לייצוב באמצעות משוב.

הערות לגבי התמרת השקילות T :

א. התמרת השקילות הנדרשת לקבלת הייצוג המופרד במשפט 1 אינה יחידה, וצורתה $T=[E_1,E_2]$, כאשר:

- $E_1\in\mathbb{R}^{n\times r}$ מטריצה ממשית בגודל $n\times r$, שעמודותיה מהוות בסיס כלשהו (לאו דווקא אורטונורמלי) למרחב העמודות של $\mathcal{C}$,
- ואילו $E_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ מטריצה כלשהי כך שעמודותיה משלימות את E_1 לבסיס למרחב $\mathbb{R}^n$ כולו.

ב. בפרט, לאחר שהבאנו את המערכת לצורה המופרדת, ניתן תמיד לבצע התמרת שקילות נוספת בעלת הצורה האלכסונית

$$\tilde{T}=\begin{bmatrix}\tilde{T}_{11} & 0\\ 0 & \tilde{T}_{22}\end{bmatrix}$$

מבלי לשנות את המבנה המופרד. למשל, ניתן לבחור $\tilde{T}_{11}$ כך שתת-המערכת $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1,\bar{C}_1)$ תהיה בצורה קנונית קונטרולבילית.

ג. במקרה של מערכת עם יציאה אחת בלבד (B הינו וקטור עמודה), בחירה אפשרית עבור E_1 הינה:

$$E_1=[B,AB,\ldots,A^{r-1}B]$$

(מדוע זהו בסיס לעמודות $\mathcal{C}$?), או באופן כללי $E_1=[B,AB,\ldots,A^{r-1}B]M$, כאשר M מטריצה ריבועית לא סינגולרית במימד r. מההוכחה ניתן לראות כי הצמד המתקבל $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1)$ יהיה בעל מטריצת קונטרולביליות

$$\mathcal{C}(\bar{A}_{11},\bar{B}_1)\triangleq[\bar{B}_1,\ \bar{A}_{11}\bar{B}_1,\cdots,(\bar{A}_{11})^{r-1}\bar{B}]=M^{-1}.$$

ד. פונקציית ctrbf של מטלב מחשבת התמרת שקילות יוניטרית, כלומר $T^{-1}=T^T$.

5.3. * הוכחת משפט 1

* מיועד לקריאה עצמית, למעוניינים.

ההוכחה הינה קונסטרוקטיבית : נגדיר ראשית התמרת שקילות מתאימה T, נחשב עבורה את המטריצות $\bar{A}$, $\bar{B}$, ונראה כי הן בעלות הצורה המבוקשת – כלומר מתקבלים איברי אפס במקומות הדרושים.

1. הגדרת T : לפי ההנחה, מרחב העמודות של מטריצת הקונטרולביליות $\mathbb{C}$ הינו בעל דרגה r. יהיו $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ אוסף של r וקטורי עמודה המהווים בסיס (לאו דווקא אורתונורמלי) למרחב זה. יהיו $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ $n-r$ וקטורי עמודה אשר משלימים את הוקטורים הקודמים לבסיס של כל המרחב ה- n מימדי.

נאסוף וקטורים אלה למטריצות הבאות :

$$E_1 = [e_1, e_2, \ldots, e_r], \quad E_2 = [e_{r+1}, \ldots, e_n], \quad E = [E_1, E_2]$$

נגדיר עתה את התמרת השקילות הבאה :

$$T = [E_1, E_2]$$

נחשב ונחלק באופן דומה את המטריצה ההפכית :

$$T^{-1} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array} \end{array}$$

נשים לב כי מתוך $T^{-1}T = I$ נובע כי $M_2 E_1 = 0$.

2. נחשב ראשית את $\bar{B}$:

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} M_1 B \\ M_2 B \end{bmatrix}$$

אולם עמודות B כלולות בבירור במרחב העמודות של מטריצת הקונטי $\mathbb{C}$ (לפי הגדרתה), שהוא גם מרחב העמודות של E_1. לפיכך, מתוך $M_2 E_1 = 0$ נובע כי $M_2 B = 0$. מכאן ש- $\bar{B}$ היא בעלת הצורה הרצויה (0 בשורות התחתונות).

.3 נעבור לחישוב $\bar{A}$:

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} M_1AE_1 & M_1AE_2 \\ M_2AE_1 & M_2AE_2 \end{bmatrix}$$

עלינו להראות כי $M_2AE_1 = 0$. לשם כך נעזר בטענה הבאה :

טענה : עמודות המטריצה AE_1 כלולות במרחב העמודות של E_1.

הוכחה : א. מרחבי העמודות של E_1 ושל $\mathbb{C}$ זהים, ולפיכך מרחב העמודות של AE_1 ושל $A\mathbb{C}$ זהים גם כן.

ב. נתבונן בעמודות $A\mathbb{C}$:

$$A\mathcal{C} = A[B,\ AB,\cdots,A^{n-1}B] = [AB,\ A^2B,\cdots,A^nB]$$

$(n-1)$ העמודות הראשונות של $A\mathcal{C}$ הן גם עמודות של $\mathcal{C}$, וממילא כלולות במרחב העמודות שלה.

אבל גם העמודה האחרונה ניתנת לביטוי כצרוף לינארי של עמודות $\mathcal{C}$ (מדוע?), והטענה נובעת.

כיוון שמתקיים $M_2E_1 = 0$ (ראו לעיל), הרי מתוך הטענה נובע כי :

$M_2AE_1 \equiv M_2(AE_1) = 0$. מכאן שגם למטריצה $\bar{A}$ יש אפסים במקום הדרוש.

.4 להשלמת ההוכחה, עלינו להראות כי הצמד $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1)$ הינו קונטרולבילי, כלומר כי

$$rank\left[\bar{B}_1,\bar{A}_{11}\bar{B}_1,\cdots,(\bar{A}_{11})^{r-1}\bar{B}_1\right] = r$$

נתבונן במטריצת הקונטרולביליות $\bar{\mathcal{C}}$ המתאימה לצמד $(\bar{A},\bar{B})$. עקב נוכחות איברי האפס במטריצות אלה (כפי שהראינו), נקבל:

$$\bar{\mathcal{C}} = [\bar{B},\ \bar{A}\bar{B},\cdots,\bar{A}^{n-1}\bar{B}] = \left[\begin{array}{cccc} \bar{B}_1 & \bar{A}_{11}\bar{B}_1 & \cdots & (\bar{A}_{11})^{n-1}\bar{B}_1 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

מצד אחד, ידוע כי

$$rank(\bar{\mathbb{C}}) = rank(\mathbb{C}) = r$$

(כיוון שהתמרת שקילות אינה משנה את דרגת מטריצת הקונטי). מהצד השני, מתוך צורת $\bar{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} rank(\bar{\mathbb{C}}) &= rank\left[\bar{B}_1, \bar{A}_{11}\bar{B}_1, \cdots, (\bar{A}_{11})^{n-1}\bar{B}_1\right] \\ &= rank\left[\bar{B}_1, \bar{A}_{11}\bar{B}_1, \cdots, (\bar{A}_{11})^{r-1}\bar{B}_1\right] \end{aligned}$$

כאשר השיוויון השני נובע מתוך משפט קיילי המילטון (נזכור שהמטריצה $\bar{A}_{11}$ במימד $r \times r$). מכאן קיבלנו כי דרגת המטריצה האחרונה (מטריצת הקונטרולביליות של $\bar{A}_{11}, \bar{B}_1$) היא r, כנדרש.

<u>מ.ש.ל.</u>

5.4. ייצוג מופרד למערכת לא אובזרווביליות

התוצאות בסעיף זה הינן דואליות לקודמות, ולכן נציגן בקצרה.

אנו עוסקים עתה במערכת $S=(A,B,C)$ שאינה אובזרווביליות, בעלת מטריצת אובזרווביליות $\mathcal{O}$.

משפט 2 : יהי (A,C) צמד לא-אובזרווביליות, כאשר $rank\{\mathcal{O}\}=r<n$. אזי קיימת התמרת שקילות T, כך שמתקיים :

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{array}{cc} r & n-r \\ \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}$$

$$\bar{C}=CT=\left[\begin{array}{cc} \bar{C}_1 & 0 \end{array}\right]$$

במערכת זו, הצמד $(\bar{A}_{11},\bar{C}_1)$ הינו אובזרווביליות.

הוכחת משפט זה דומה לקודם, ולא נחזור עליה. למעשה, את התוצאה ניתן לקבל בקלות משיקולי דואליות.

<u>הערה לגבי בחירת T</u> :

- התמרת השקילות הנדרשת הינה מהצורה $T^{-1}=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$, כאשר U_1 מטריצה בעלת r שורות המהוות בסיס למרחב השורות של מטריצת האובזרווביליות $\mathcal{O}$, ואילו U_2 משלימה את דרגת השורות של T^{-1} לדרגה מלאה.
- במקרה של יציאה אחת בלבד (C וקטור שורה), ייצוג מפורש יותר של U_1 נותן את הקשר הבא :

$$U_1=M\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}(\bar{A}_{11},\bar{C}_1)\triangleq\begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \vdots \\ \bar{C}_1(\bar{A}_{11})^{r-1} \end{bmatrix}=M^{-1}$$

דיון במשמעות משפט 2 :

א. מאפיין החשוב של המערכת המצב שהתקבלה הוא נוכחות האפסים במקומות המסומנים במטריצות $\bar{A}$, $\bar{C}$. למטריצה $\bar{B}=T^{-1}B$ אין כל תכונה מיוחדת.

ב. המערכת $\bar{S}$ שהתקבלה מופרדת למעשה לשני חלקים : האחד אובזרוובילי לגמרי, ואילו השני אינו אובזרוובילי כלל.

כדי לראות זאת, נפרק את וקטור המצב $\bar{x}$ ואת הווקטור $\bar{B}$ לשני רכיבים במימד מתאים :

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix} \qquad \bar{B}=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix}$$

משוואת המצב של המערכת הינן, בהתאם :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

ג. מכאן נקבל, בפרט :

$$\tfrac{d}{dt}\bar{x}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{B}_1u$$

$$y=\bar{C}_1\bar{x}_1$$

אנו רואים כי רכיב המצב $\bar{x}_2$ אינו משפיע כלל על היציאה (לא באופן ישיר, ואף לא באופן עקיף דרך רכיב המצב $\bar{x}_1$). לכן, רכיב המצב $\bar{x}_2$ אינו אובזרוובילי : לא ניתן לקבל עליו מידע כלשהו מתוך מדידת אות היציאה.

ד. לעומת זאת, המערכת שרשמנו ב-ג׳ היא מערכת מצב מסדר r עבור $\bar{x}_1$ בלבד, והיא אובזרוובילית כיוון שהצמד $(\bar{A}_{11},\bar{C}_1)$ הינו אובזרוובילי. מכאן שרכיב המצב $\bar{x}_1$ הינו אובזרוובילי : ניתן לחשב את המצב ההתחלתי $\bar{x}_1(0)$ מתוך מדידת הכניסה והיציאה על פני אינטרוול זמן סופי.

ה. בהתאם לאמור, r הערכים העצמיים של המטריצה $\bar{A}_{11}$ נקראים המודים האובזרוובילים של המערכת, ואילו $(n-r)$ הערכים העצמיים של המטריצה $\bar{A}_{22}$ נקראים המודים הלא-אובזרוובילים של המערכת.

ו. חישוב פונקציית התמסורת של המערכת נותן :

$$H(s)=\bar{C}_1(sI-\bar{A}_{11})^{-1}\bar{B}_1$$

פונקציית התמסורת תלויה רק בתת-המערכת $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1,\bar{C}_1)$ הקשורה לרכיב המצב האובזוובילי $\bar{x}_1$. בפרט, $(n-r)$ המודים הלא-אובזרוובילים, שהם הע"ע של המטריצה $\bar{A}_{22}$, הצטמצמו ואינם מופיעים בפונקציית התמסורת.

השלכות לגבי משחזר מצב :

כפי שראינו, במערכת אובזרוובילית ניתן לממש משחזר מצב לינארי אשר מתכנס למצב הנוכחי עם ע"ע מהירים כרצוננו. נבחן מה ישתנה במערכת שאינה אובזרוובילית.

נתבונן במערכת לא אובזרוובילית $S=(A,B,C)$, בעלת דרגת אובזרוביליות $r<n$. נניח שהמערכת בצורה הקנונית המופרדת (אם לא, נבצע התמרת שקילות). משוואת המשחזר היא כזכור :

$$\tfrac{d}{dt}\hat{x}=A\hat{x}+Bu+L(y-C\hat{x})$$

ושגיאת השיערוך $\tilde{x}=x-\hat{x}$ מקיימת (באופן אידאלי) : $\tfrac{d}{dt}\tilde{x}=(A-LC)\tilde{x}$.

מטריצת המשחזר המתקבלת הינה :

$$A_L=A-LC=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\end{bmatrix}[C_1\ \ 0]$$
$$=\begin{bmatrix}A_{11}-L_1C_1 & 0\\ A_{12}-L_2C_1 & A_{22}\end{bmatrix}$$

עקב הצורה הבלוק-משולשית, הע"ע של A_L הם צרוף הע"ע של $A_{11}-L_1C_1$ ושל A_{22}.

ניתן לראות כי :

א. שגיאת השיערוך של x_1 מקיימת : $\tfrac{d}{dt}\tilde{x}_1=(A_{11}-L_1C_1)\tilde{x}_1$. הערכים העצמיים של המטריצה $(A_{11}-L_1C_1)$ ניתנים להצבה כרצוננו באמצעות L_1. זאת כיוון שהצמד

(A_{11},C_1) הינו אובזרוובילי. (נציין גם כי שחזור x_1 אינו מושפע כלל מהרכיב הלא-אובזרוובילי x_2, או מההגבר L_2).

ב. שגיאת השיערוך של x_2 נתונה ע״י: $\frac{d}{dt}\tilde{x}_2 = A_{22}\tilde{x}_2 + (A_{12} - L_2C_1)\tilde{x}_1$. לאחר ש- $\tilde{x}_1$ התכנס לאפס, אנו נשארים עם $\frac{d}{dt}\tilde{x}_2 \simeq A_{22}\tilde{x}_2$. דינמיקה זו אינה מושפעת כלל מהגבר המשחזר, ותלויה בע״ע של A_{22}, דהיינו המודים הלא-אובזרוביליים של המערכת.

<u>דטקטיביליות</u>:

מערכת תיקרא <u>דטקטיבילית</u> (detectable, ניתנת לגילוי) אם <u>כל</u> המודים הלא-אובזרוביליים (אם יש כאלה) הם יציבים. כלומר: כל הע״ע של המטריצה $\bar{A}_{22}$ בייצוג המופרד הם בתחום היציבות.

במערכת דטקטיבילית, שגיאת השערוך של החלק הלא אובזרוובילי תדעך לאפס (אסימפטוטית), בהתאם לע״ע של $\bar{A}_{22}$.

במערכת לא-דטקטיבילית, קיים ערך עצמי לא יציב שהוא לא אובבזרוובילי. מערכת כזו לא ניתן לייצב באמצעות משוב יציאה (למשל, במבנה אובזרוור-קונטרולר): התבדרות המוד הלא-אובזרוובילי לא תתבטא ביציאה y, ומנגנון המשוב לא יפעל לייצוב המערכת.

<u>לסיכום סטביליזיביליות ודטקטיביליות</u>:

- מערכת שאינה סטביליזבילית לא ניתנת לייצוב באמצעות משוב כלשהו.
- מערכת שאינה דטקטיבילית אינה מאפשרת שחזור המצב כולו, ואינה ניתנת לייצוב באמצעות משוב יציאה.

<u>הערות נוספות לנושא הפירוקים הסטנדרטיים :</u>

א. **פרוק קלמן** : על ידי שילוב שתי הצורות הקנוניות שלמדנו, ניתן לקבל הפרדת המודים של המערכת לארבע קבוצות : קונט' ואובז', קונט' ולא-אובז', לא-קונט' ואובז', לא-קונט' ולא-אובז'. פרט לראשונים, כל השאר יצטמצמו בתמסורת המערכת. לא ניכנס לפרטים נוספים לגבי פרוק זה, הנקרא Kalman Decomposition.

ב. פונקציות מטלב רלוונטיות לפרק זה :

ctrbf: read https://www.mathworks.com/help/control/ref/ctrbf.html

obsvf: read https://www.mathworks.com/help/control/ref/obsvf.html

5.5. מבחן PBH לקונטרולביליות ואובזרוביליות

בסעיפים הקודמים למדנו כיצד לזהות את הע"ע הלא-קונטרולביליים של המערכת על ידי מעבר לצורה המופרדת. חישוב זה עשוי להיות מסובך.

בסעיף זה נלמד מבחן אלטרנטיבי לקונטרולביליות, אשר מאפשר אף זיהוי המודים הלא-קונטרולביליים מבלי לבצע התמרת שקילות. מבחן זה קרוי על שם שלושה מתמטיקאים: Popov–Belevitch–Hautus, ובראשי-תיבות PBH.

<u>משפט 3</u> (מבחן PBH קונטרולביליות): הצמד (A,B) הינו קונטרולבילי אם ורק אם מתקיים לכל מספר מרוכב λ: $rank\left[\lambda I-A,\ B\right]=n$

<u>הערות</u>:

1. מהגדרת ערך עצמי, נובע כי $rank\left[\lambda I-A\right]=n$ לכל λ <u>שאינו</u> ערך עצמי של A. לפיכך מספיק לבדוק את הדרגה רק עבור n הע"ע של A.
2. הע"ע הלא קונטרולביליים הם אלה שעבורם $rank\left[\lambda I-A,\ B\right]<n$.
3. לפיכך, הצמד (A,B) הינו <u>סטביליזבילי</u> אם ורק אם $rank\left[\lambda I-A,\ B\right]=n$ לכל ערך עצמי λ שאינו יציב.

הוכחת המשפט מובאת בהמשך כנספח (*). פה רק נתווה בקיצור את הוכחת כיוון אחד: אם λ_0 ע"ע לא קונטרולבילי, אזי $rank\left[\lambda_0 I-A,\ B\right]<n$. ראשית נשים לב כי התמרת שקילות לא משנה את הדרגה הנ"ל, ולכן נניח כי המערכת בצורה המופרדת למערכת לא קונטי. לפי הגדרה, λ_0 הוא ע"ע של $\bar{A}_{22}$. אבל

$$\left[\lambda_0 I-\bar{A},\ \bar{B}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}\lambda_0 I-\bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} & \bar{B}_1\\ 0 & \lambda_0 I-\bar{A}_{22} & 0\end{array}\right]$$

וברור שדרגת השורות אינה מלאה (קטנה מ-n). .

הטענה הדואלית לגבי אובזרווביליות הינה הבאה :

<u>משפט 4</u> (מבחן PBH לאובזרווביליות) : הצמד (A,C) הינו אובזרווביליי אם ורק אם מתקיים לכל מספר מרוכב λ :

$$rank\begin{bmatrix}\lambda I - A \\ \hdashline C\end{bmatrix} = n$$

הערות :

1. גם פה מספיק לבדוק את התנאי עבור רק עבור הע"ע של A . הע"ע הלא אובזרוביליים הם אלה שבהם הדרגה קטנה מ- n .

2. הצמד (A,B) הינו <u>דטקטיבילי</u> אם ורק אם $rank\begin{bmatrix}\lambda I - A \\ \hdashline C\end{bmatrix} = n$ לכל ערך עצמי λ שאינו בתחום היציבות.

* **נספח:** הוכחת משפט 3

א. ($\Leftarrow$) נניח כי קיים λ כך שהמטריצה $[\lambda I - A \ \vdots \ B]$ בעלת דרגת שורות חסרה. אזי קיים וקטור שורה $v \neq 0$ שמקיים:

$$v[\lambda I - A \ \vdots \ B] = 0 \quad \Rightarrow \quad vB = 0, \ \ vA = \lambda v$$

(בפרט, v הוא ו"ע שמאלי של A, עם ע"ע λ). לפיכך:

$$v\mathbf{C} = v[B, Ab, \ldots, A^{n-1}B] = [vB, \lambda vB, \ldots, \lambda^{n-1}vB] = 0$$

כלומר מטריצת הקונטרולביליות $\mathbf{C}$ אינה בעלת דרגת שורות מלאה, ולפיכך המערכת אינה קונטרולבילית.

ב. ($\Rightarrow$) נניח כי הצמד (A, B) אינו קונטרולבילי, נראה כי קיים λ כך שהמטריצה $[\lambda I - A \ \vdots \ B]$ בעלת דרגת שורות חסרה, כלומר קיים וקטור שורה $v \neq 0$ שעבורו $v[\lambda I - A \ \vdots \ B] = 0$.

לשם כך, נעבור ראשית (על ידי התמרת שקילות) לצורה קנונית לא-קונטרולבילית. מעבר כזה מותר, כיוון שקיום $v \neq 0$ כך ש: $v[\lambda I - A \ \vdots \ B] = 0$ שקול לכך כי $\bar{v}[\lambda I - T^{-1}AT \ \vdots T^{-1}B] = 0$ עבור $\bar{v} = vT \neq 0$.

נניח אם כן כי

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר (A_{11}, B_1) צמד קונטרולבילי, ומימד A_{22} לפחות 1. יהיו v_2, λ_2 ערך עצמי ווקטור עצמי של A_{22}, ונבחר $\lambda = \lambda_2$, $v = (0, v_2)$. קל לראות כי מתקיים $v[\lambda I - A \ \vdots \ B] = 0$ עבור בחירה זו.

מ.ש.ל.

הערה: לגבי הערה 2 לאחר משפט 3: בהוכחה לעיל הראינו כי אם λ ע"ע של A_{22} (כלומר ע"ע לא קונטי) אזי $[\lambda I - A \ \vdots \ B]$ מאבדת דרגה. נותר להראות כי זה קורה <u>רק</u> כאשר λ ע"ע של A_{22}. נשאיר זאת כתרגיל.