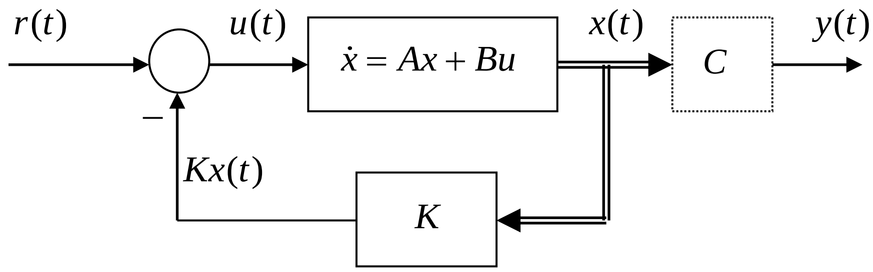
פרק 4. שילוב משחזר עם משוב מצב

בפרק זה נאחד את הרעיונות שפיתחנו בשני הפרקים הקודמים, על מנת להשיג את היתרונות של משוב מצב (הצבת קטבי החוג הסגור כרצוננו) תוך שימוש במשוב יציאה בלבד. בכך אנו נמנעים מהצורך במדידת וקטור המצב כולו.

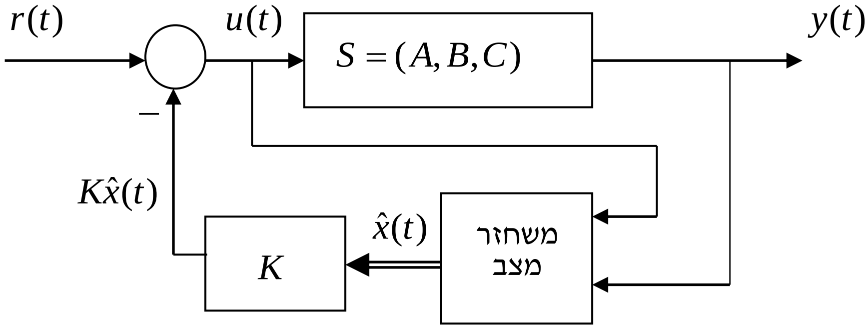
הבקר המוצע משלב משחזר מצב עם משוב מצב, והוא מכונה בהתאם **<u>בקר אובזרוור-קונטרולר.</u>**

4.1. מבנה הבקר

כפי שראינו, תרשים המערכת עם משוב מצב מלא הינו:



בבקר המוצע, נחליף את וקטור המצב $x(t)$ במשערך שלו, $\hat{x}(t)$, אשר יחושב באמצעות משחזר מצב. תרשים המערכת שנקבל:



משוואות המערכת: נרשום את משוואות המערכת, כשילוב של משוואות משוב-מצב עם משוואות משחזר המצב.

משוואת המשחזר: $$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \qquad (1)$$

משוואת המשוב: $$u(t) = r(t) - K\hat{x}(t) \qquad (2)$$

לכך יש להוסיף כמובן את משוואות המערכת המבוקרת:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (4)$$

ניתן לראות מערכת זו כמערכת מצב, כאשר וקטור המצב הכולל משלב את $x(t)$ (מצב המערכת המבוקרת) ו- $\hat{x}(t)$ (מצב מערכת המשחזר). כדי לראות זאת, נרשום את המשוואות שקיבלנו בצורת משוואות מצב.

נציב את הבקר (2) במשוואת המערכת (3), ואת משוואת היציאה (4) במשוואת המשחזר (1), ונקבל:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) + Br(t) \qquad (3')$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + B(r(t) - K\hat{x}(t)) + LCx(t) \qquad (1')$$

או, בכתיבה מטריצית:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r(t)$$

עם משוואת היציאה:

$$y(t) = Cx(t) = [C, 0]\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

קיבלנו אכן מערכת משוואות מצב, עם וקטור מצב מורחב במימד $2n$. כניסת המערכת היא כניסת הייחוס $r(t)$, והיציאה $y(t)$.

נעבור עתה לחישוב פונקציית התמסורת בין כניסת הייחוס ליציאה.

4.2. תכונת ההפרדה ותמסורת החוג הסגור

מערכת המצב שקיבלנו אינה בעלת צורה נוחה לחישוב התמסורת ולהסקת מסקנות לגבי תכונות הבקר הכולל. כדי לאפשר זאת, נבצע התמרה פשוטה של וקטור המצב: נחליף את משערך המצב $\hat{x}(t)$ בשגיאת השיערוך $\tilde{x}(t) \equiv x(t) - \hat{x}(t)$, ונקבל את וקטור המצב החדש:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

נשים לב כי מתקיים הקשר הבא:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

כלומר: וקטור המצב החדש הינו התמרה לא-סינגולרית (התמרת שקילות) של הקודם, ולכן אין פה איבוד מידע לגבי וקטור המצב.

נחשב ישירות את משוואות מערכת המצב עם וקטור המצב החדש. על ידי הצבת $\hat{x} = x - \tilde{x}$ במשוואה (3') נקבל:

$$\tfrac{d}{dt} x(t) = (A - BK)x(t) + BK\tilde{x}(t) + Br(t)$$

ואילו ממשוואה (1') נקבל את משוואת שגיאת-השיערוך המוכרת:

$$\tfrac{d}{dt} \tilde{x}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$$

לפיכך קיבלנו את מערכת המצב הבאה:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

בצרוף משוואת היציאה:

$$y(t) = Cx(t) = [C, 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

ממשוואות המצב שקיבלנו נוכל להסיק את המסקנות הבאות:

א. מטריצת המערכת הכוללת היא בלוק-משולשית. מכאן שהערכים העצמיים של המערכת הם צרוף הע״ע של שתי המטריצות הריבועיות באלכסון, כלומר צרוף n הע״ע של מטריצת משוב המצב ($A-BK$) עם n הע״ע של מטריצת המשחזר ($A-LC$).

קיבלנו שאין השפעה הדדית בין קטבי האובזוור וקטבי הקונטרולר – כל אחד מהם נשאר כשהיה! תכונה חשובה זו נקראת עקרון ההפרדה (separation principle) של בקר אובזרוור-קונטרולר.

ב. פונקצית התמסורת של החוג הסגור ניתנת עתה לחישוב בקלות:

$$T(s)\triangleq\frac{Y(s)}{R(s)}=[C,0]\begin{bmatrix} sI-(A-BK) & -BK \\ 0 & sI-(A-LC)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0\end{bmatrix}$$

$$=[C,0]\begin{bmatrix} (sI-A+BK)^{-1} & ?? \\ 0 & (sI-A+LC)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\underline{C(sI-A+BK)^{-1}B}$$

קיבלנו פונקציית תמסורת מסדר n בלבד, שהיא זהה לפונקציית התמסורת של משוב מצב מלא (ללא משחזר)!

ג. בהמשך לנקודה האחרונה – מתברר כי לפנינו מערכת מסדר $2n$, בעלת פונקציית תמסורת מסדר n בלבד! מכאן ברור שהמערכת הכוללת אינה מינימאלית – כלומר אינה קונטרולבילית ואובזרוובילית. בפרט, ניתן לראות כי קטבי המשחזר הצטמצמו כולם.

ניתן להבין זאת אם נתבונן במשוואת וקטור השגיאה $\tilde{x}(t)$:

$$\tfrac{d}{dt}\tilde{x}(t)=(A-LC)\tilde{x}(t)$$

ברור כי וקטור השגיאה אינו מושפע כלל מהכניסה, ולכן ״אינו קונטרולבילי״. נהוג לומר כי קטבי המשחזר אינם קונטרולביליים. (בהמשך הקורס ניתן מובן מדויק לאבחנה זו).

ד. אם נתבונן שוב במשוואה

$$\tfrac{d}{dt}x(t)=(A-BK)x(t)+BK\tilde{x}(t)+Br(t)$$

נראה כי ההבדל היחיד לעומת המשוואה של משוב מצב מלא הינו בנוכחות האיבר $BK\tilde{x}(t)$. השפעת איבר זה דועכת באם $\tilde{x}(t)$ שואף לאפס.

כפועל יוצא מעקרון ההפרדה, ניתן להציע את תהליך התכן הבא עבור בקר במבנה אובזרוור-קונטרולר:

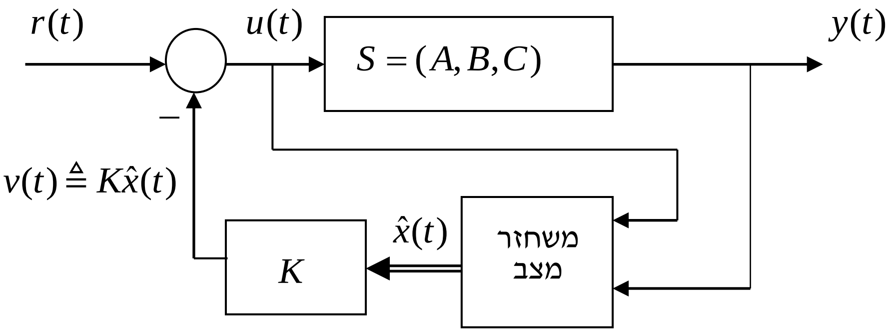
א. נבחר את מיקום הקטבים של הבקר (ע"ע של $A-BK$) לפי התגובה הדינאמית הרצויה.

ב. נבחר את מיקום הקטבים של המשחזר כך שיהיו "מהירים" יותר מהקטבים הדומיננטיים של הבקר – נניח פי 5 או 10 "שמאלה" מהאחרונים. בצורה זו, תגובת המעבר של המשחזר (תגובה לתנאי התחלה, להפרעות) תדעך במהירות, כך שלא תשפיע כמעט על התגובה הדינאמית.

4.3 תאור הבקר באמצעות פונקציות תמסורת

בקר אובזרוור-קונטרולר פותח מתוך הסתכלות על המערכת כמערכת מצב, ומכאן נגזר המבנה שלו. אולם ניתן לייצג את הבקר שהתקבל גם באמצעות פונקציות תמסורת בלבד. בכך נראה את הדמיון וההבדל למבנה בקר משוב "קלאסי" מבקרה 1.

נחזור ונתבונן בבקר שפיתחנו:



עם המשוואות:

$$\text{(1)}\qquad \tfrac{d}{dt}\hat{x}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$$

$$\text{(2)}\qquad u(t)=r(t)-K\hat{x}(t)$$

ניתן לראות את הבקר עצמו כמערכת עם יציאה $v(t)$, ושתי "כניסות" $u(t)$ ו- $y(t)$. נחשב את פונקצית התמסורת בין אותות אלה. ראשית (ע"י התמרת לפלס עם ת"ה 0),

$$\hat{X}(s)=(A-LC)\hat{X}(s)+BU(s)+LY(s)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{X}(s)=(sI-A+LC)^{-1}\left(BU(s)+LY(s)\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}V(s)=K\hat{X}(s)&=\{K(sI-A+LC)^{-1}B\}U(s)+\{K(sI-A+LC)^{-1}L\}Y(s)\\&=H_1(s)U(s)+H_2(s)Y(s)\end{aligned}$$

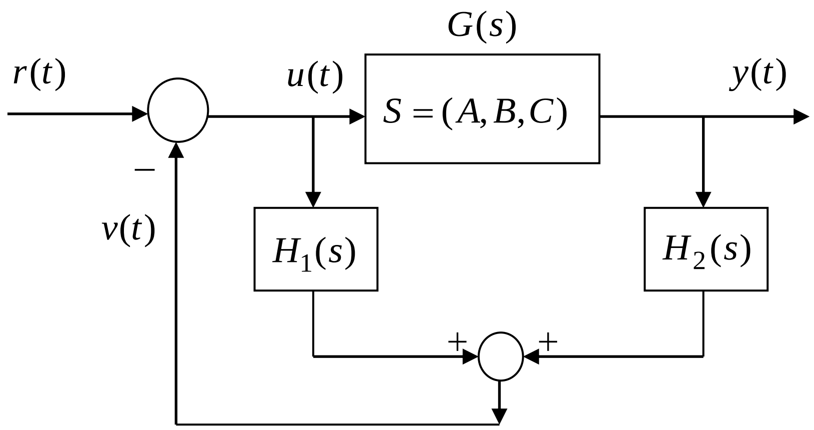
כאשר

$$H_1(s)\triangleq K(sI-A+LC)^{-1}B=\frac{b_1(s)}{\alpha_L(s)}$$

$$H_2(s)\triangleq K(sI-A+LC)^{-1}L=\frac{b_2(s)}{\alpha_L(s)}$$

ניתן לראות כי לפונקציות התמסורת $H_1(s)$, $H_2(s)$ יש מכנה <u>זהה,</u> $\alpha_L(s)$, שהוא הפולינום האופייני של מטריצת האובזרוור $(A-LC)$.

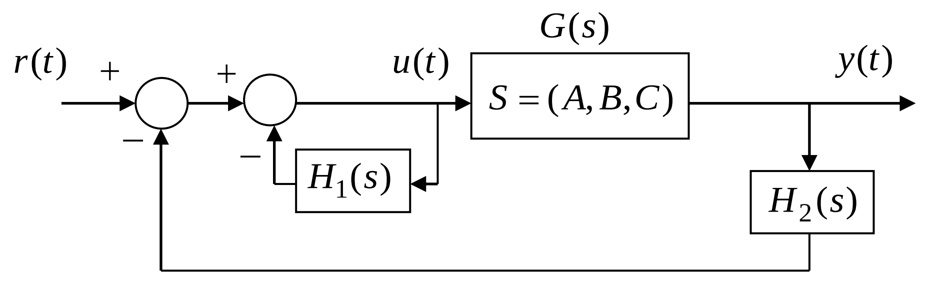
הציור מדגים מבנה זה של הבקר :

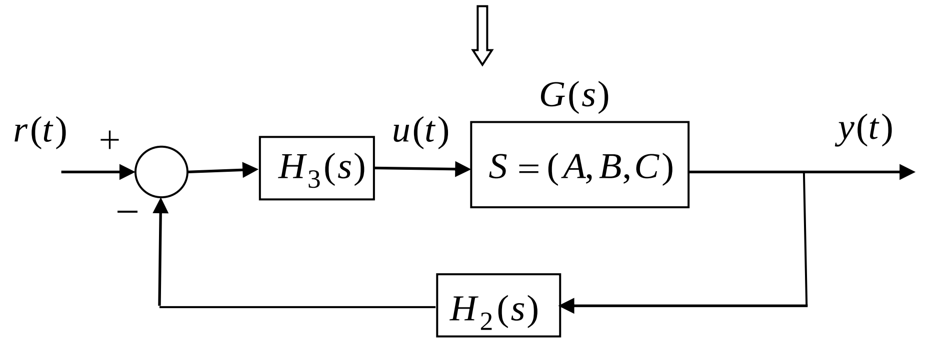


4.4 משוואות החוג ושולי יציבות

בקר אובזרוור קונטרולר הינו כמובן בקר משוב. כפי שראינו בבקרה 1, תכונה חשובה של בקרי משוב היא הרובוסטיות – כלומר מידת הרגישות לשינויים בפרמטרי המערכת. גדלים יסודיים בהקשר זה הם עודף הפאזה ועודף ההגבר של חוג המשוב.

על מנת לבחון גדלים אלה, נתאר ראשית את המערכת שבאיור האחרון כחוג משוב במבנה הרגיל:





כאשר $H_3(s)=\dfrac{1}{1+H_1(s)}$.

אנו רואים כי קיבלנו חוג משוב בצורתו הסטנדרטית. ניתן עתה לזהות את תמסורת החוג:

$$L(s)=H_2(s)H_3(s)G(s)$$

ולחשב עבורה את עודף ההגבר ועודף הפאזה באופן הרגיל.

חישוב המכפלה $\mathbf{H_2H_3}$:

מהנוסחאות שמגדירות את H_1, H_2, H_3 עולה כי

$$H_2(s)H_3(s) = H_2(s)\frac{1}{1+H_1(s)} = \frac{b_2(s)}{\alpha_L(s)}\frac{\alpha_L(s)}{\alpha_L(s)+b_1(s)}$$
$$= \frac{b_2(s)}{\alpha_L(s)+b_1(s)}$$

ניתן גם לקבל נוסחה ישירה יותר במונחי מטריצות מערכת המצב והבקר :

$$H_2(s)H_3(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

* <u>הוכחה</u> : נחזור למשוואות המצב של הבקר, ונחשב את הקשר בין u ו- y כאשר $r(t)=0$. נקבל :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\hat{x}(t) &= (A-LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ &= (A-LC)\hat{x}(t) + B(-K\hat{x}(t)) + Ly(t) \\ &= (A-LC-BK)\hat{x}(t) + Ly(t) \end{aligned}$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

מכאן נובע כי

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

השוואה עם הציור האחרון נותנת את הדרוש.

<u>הערות סיכום לפרק:</u>

גישת הבקרה באמצעות אובזרוור-קונטרולר שונה מהותית משיטת התכן שלמדנו ב"בקרה 1". לכאורה אין פה "ניסוי וטעייה", כיוון שניתן למקם כרצוננו את קטבי הקונטרולר והאובזרוור לקבלת תגובה זמנית רצויה. גישת תכן זו אף מתאימה לטיפול שיטתי במערכות מרובות כניסות ויציאות.

יחד עם זאת, לגישת תכן זו קיימים גם מספר חסרונות:

1. הבקר המתקבל הינו מסדר גבוה יחסית – סדרו תמיד לפחות n, כסדר המערכת. בבעיות בקרה פשוטות ניתן להסתפק בבקר מסדר נמוך (כגון PID או רשת תיקון), בעל פרמטרים ספורים הניתנים לכיוונון.

2. התכנון הבסיסי של הבקר אינו מבטיח עקיבה טובה אחר הכניסה, או דחיית הפרעות. ניתן להתגבר על כך על ידי שינויים מתאימים בתכן (כגון הוספת בקר אינטגרלי, כפי שראינו).

3. שולי היציבות – עודף פאזה והגבר – אינם מובטחים, אלא יש לבדוק בדיעבד את הערכים המתקבלים. (נחזור לנושא זה בהמשך בהקשר של בקרה אופטימאלית).

4. לעיתים מתקבל בקר "מוזר", בעל אפסים או קטבים בצד ימין של המישור. בקר שאינו יציב הוא במיוחד לא רצוי, ויש להימנע מכך במידת האפשר.