פרק 3. משחזר מצב (State Observer)

בפרק הקודם תארנו את שיטת הבקרה באמצעות משוב מצב, אשר עושה שימוש בכל רכיבי וקטור המצב לצורך חישוב אות הבקרה. חיסרון עיקרי בגישה זו הוא הצורך למדוד את כל רכיבי המצב, דבר שהוא בעייתי ויקר במרבית השימושים.

בפרק זה נלמד כיצד ניתן להתגבר על קושי זה, על ידי הערכת (או שחזור) המצב כולו מתוך אותות היציאה והכניסה בלבד. בפרק הבא נלמד כיצד לשלב את משחזר המצב עם משוב מצב לצורך סגירת חוג בקרה. בדומה לנושא בקרת מצב, הטיפול בשיחזור מצב במערכות בזמן רציף ובדיד כמעט זהה, ואנו נתמקד פה בזמן הרציף.

כפי שניתן לצפות, שחזור וקטור המצב מתוך אותות הכניסה והיציאה אפשרי בתנאי שהמערכת אובזרווביליות. במקרה זה ניתן לפתח נוסחאות לחישוב מדויק של המצב מתוך הכניסה והיציאה. אולם, לצורך שימוש כחלק מבקר משוב, חשוב לנו שהמשחזר עצמו יהיה בעל מבנה של מערכת לינארית. משחזר כזה נקרא Luenberger Observer.

בפרק מאוחר יותר (בנושא מסנן קלמן), נראה שמבנה זה של המשחזר כמערכת לינארית הינו אופטימלי בנוכחות רעשים במערכת. הניסוח כבעיית שערוך אופטימלי ידריך אותנו בבחירת מקדמים מתאימים למערכת המשחזר\המסנן.

3.1. מבנה המשחזר

נתבונן במערכת המצב:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

כאשר היציאה $y(t)$ הינה הגודל הנמדד. אנו מניחים כי גם הכניסה $u(t)$ ידועה, וכן ידועות מטריצות המערכת A,B,C. המצב ההתחלתי $x(0)$ אינו ידוע. ברצוננו לחשב קירוב $\hat{x}(t)$ לוקטור המצב $x(t)$, עבור כל זמן $t \geq 0$.

הוקטור $\hat{x}(t)$ יקרא משערך (estimator) של המצב $x(t)$. ההפרש

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$$

מכונה <u>שגיאת השערוך</u>. מטרתנו הינה כמובן להבטיח כי שגיאת השערוך תהיה קטנה.

כניסיון ראשון, ניתן לבצע סימולציה של המערכת באופן הבא:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t); \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

להצעה זו מספר חסרונות:

1. תנאי ההתחלה x_0 אינם ידועים. לפיכך קיימת בהכרח שגיאה התחלתית בהערכת $x(t)$.
2. גם מטריצות המערכת A,B אינן בהכרח ידועות במדויק.
3. כאשר המטריצה A אינה יציבה, ההפרש בין $x(t)$ ל- $\hat{x}(t)$ יתבדר. גם כאשר A יציבה, קצב הדעיכה של הפרש זה נקבע ע״י הע״ע של A ועשוי להיות איטי מדי.
4. אין שימוש כלשהו במדידה $y(t)$.

הדרך להתגבר על שני החסרונות האחרונים (ובאופן עקיף גם על שני הראשונים – לפחות באופן חלקי) הינה להוסיף למשוואת המשחזר הנ״ל איבר שגיאה התלוי במדידה. המבנה המוצע הינו כלהלן:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)); \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

כאשר $L = (L_1, \ldots, L_n)^T$ הינו וקטור הגברים הנתון לבחירתנו.

<u>הסבר</u>: ההפרש $y(t)-C\hat{x}(t)$ אמור להתאפס כאשר $x(t)=\hat{x}(t)$. באם $x(t)\neq\hat{x}(t)$ תיווצר שגיאה באיבר זה. תפקיד וקטור ההגבר L הינו להכפיל שגיאה זו באופן מתאים כך ש- $\hat{x}(t)$ יתקרב למצב האמיתי.

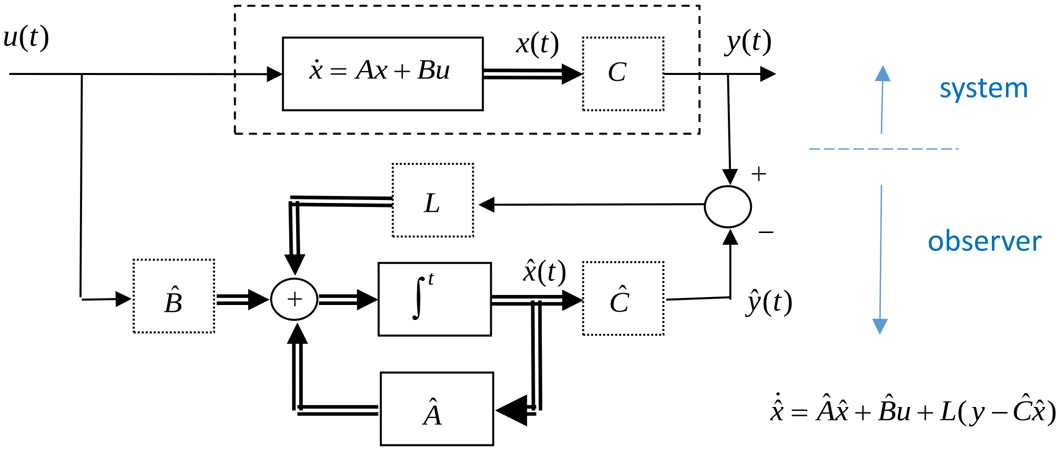
משוואת המשחזר שהצענו ניתנת לכתיבה גם באופן הבא:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$$

ניתן לראות זאת כמערכת בעלת שתי כניסות – $u(t)$ ו- $y(t)$. מטריצת המצב של מערכת זו היא $A_L\triangleq A-LC$, והיא כמובן קובעת את מיקום הערכים העצמיים שלה.

להלן תאור סכמטי של המערכת עם האובזרוור.

אידאלית: $(\hat{A},\hat{B},\hat{C})=(A,B,C)$.



3.2. משוואת השגיאה

כיצד נבחר את וקטור ההגבר L של המשחזר? כדי להבין את השפעתו, נתבונן בשגיאת השיערוך $\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$. נזכור את משוואת המערכת:

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

ונרשום את משוואת המשערך בצורה הבאה:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t)&=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L(y(t)-C\hat{x}(t))\\ &\overset{(y=Cx)}{=}A\hat{x}(t)+Bu(t)+LC(x(t)-\hat{x}(t))\end{aligned}$$

החסרת שתי המשוואות נותנת:

$$\underline{\frac{d}{dt}\tilde{x}(t)=(A-LC)\tilde{x}(t)}$$

עם תנאי התחלה $\tilde{x}(0)=x_0-\hat{x}_0$.

משוואה דיפרנציאלית זו מתארת את ההתנהגות הזמנית של שגיאת השערוך. נשים לב כי אין פה תלות כלשהי בכניסה, וקצב הדעיכה (או ההתבדרות) של שגיאת השערוך נקבע באופן מלא על ידי הע"ע של המטריצה $A_L=A-LC$. מטריצה זו הינה "מטריצת החוג הסגור" של המשחזר.

על ידי בחירה מתאימה של הוקטור L, נרצה להבטיח כי זמן ההתכנסות של שגיאת השערוך יהיה מהיר דיו. לצורך זה נרצה לבחור את מיקום הע"ע של המטריצה $A-LC$.
נראה עתה כי ניתן להציב ערכים עצמיים אלה כרצוננו, כל עוד הצמד (A,C) הינו <u>אובזרווביל</u>.

3.3. נוסחת ההגבר

ברצוננו למקם את הערכים העצמיים של המטריצה $A_L = A - LC$ כך שתתקבל דעיכה מהירה של שגיאת השערוך. לאחר בחירת ע"ע מתאימים $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, ניצור את הפולינום האופייני הרצוי : $\alpha(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)$, ונחפש הגבר L אשר מקיים :

$$\det(sI - (A - LC)) = \alpha(s)$$

משפט

תהי $S = (A, B, C)$ מערכת אובזרווביליות מסדר n.

יהי $\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ פולינום ממשי מסדר n.

אזי ניתן למצוא וקטור הגברים $L = [L_1, \ldots, L_n]^T$ כך שמתקיים

$$\det(sI - (A - LC)) = \alpha(s)$$

וקטור זה נתון על ידי הנוסחה :

$$L = \mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}_o(\underline{\alpha} - \underline{a})^T$$

כאשר

$$\underline{\alpha} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad \underline{a} = [a_1, \ldots, a_n]$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \ldots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

את נוסחת ההגבר ניתן לפתח בשתי דרכים :

א. פיתוח ישיר בעזרת צורה קנונית של אובזרוור.

ב. על ידי שימוש *בדואליות* לבעיה של הצבת קטבים בעזרת משוב מצב.

נבחר בפיתוח הישיר, שהוא מקביל לפרק הקודם עבור משוב מצב. נניח ראשית כי מערכת המצב הינה בצורה קנונית של אובזרוור : $S = (A_o, B_o, C_o)$. אזי :

$$A_L \equiv A_o - LC_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & \\ -a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} [1,0,\ldots,0]$$

$$= \begin{bmatrix} -a_1 - L_1 & 1 & & \\ -a_2 - L_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n - L_n & & & 0 \end{bmatrix}$$

קיבלנו כי A_L גם היא בצורת אובזרוור, ומכאן כי הפולינום האופייני שלה הוא

$$a_L(s) \triangleq \det(sI - A_L) = s^n + (a_1 + L_1)s^{n-1} + \ldots + (a_n + L_n)$$

על ידי השוואת מקדמים עם הפולינום הרצוי $\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, נקבל $L_i = \alpha_i - a_i$, ובכתיב וקטורי: $L = (\underline{\alpha} - \underline{a})^T$, כאשר $\underline{a}$ ו- $\underline{\alpha}$ הוגדרו לעיל.

נעבור עתה למערכת אובזרווביליות כלשהי $S = (A,B,C)$, בעלת פולינום אופייני $a(s) \triangleq \det(sI - A)$. כזכור, מערכת זו שקולה למערכת בצורת אובזרוור, דהיינו

$$x_o = T^{-1}x, \quad A_o = T^{-1}AT, \quad B_o = T^{-1}B$$

כאשר $T = \mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}_o$ ($\mathcal{O}$ ו- $\mathcal{O}_o$ כפי שהוגדרו לעיל).

ידוע לנו כי עבור הבחירה $L_o = (\underline{\alpha} - \underline{a})^T$, הפולינום האופייני של המטריצה $(A_o - L_oC_o)$ יהיה $\alpha(s)$ כנדרש. אולם:

$$A_o - L_oC_o = T^{-1}AT - L_oCT = T^{-1}(A - TL_oC)T$$

לפיכך, אם נבחר $L = TL_o$ נקבל כי למטריצה $A_L = A - LC$ פולינום אופייני $\alpha(s)$, כנדרש.

מ.ש.ל.

הנוסחה שקיבלנו היא המקבילה של נוסחת בס-גורה, בגרסת משחזר. נשים לב כי נוסחה זו דורשת היפוך מטריצת האובזרווביליות של המערכת. לפיכך השימוש בה אכן אפשרי רק כאשר המערכת אובזרווביליות.

<u>דואליות</u>: לשם שלמות נתאר את הדואליות בין בעיית המשחזר לבעיה של הצבת הקטבים באמצעות משוב מצב.

עבור משוב מצב קיבלנו מטריצת מערכת: $A_K = A - BK$.

עבור משחזר מצב קיבלנו מטריצת מערכת: $A_L = A - LC$.

נשים לב כי הוקטורים L ו- K אינם זהים במיקומם ובמימדם (K הוא וקטור שורה, L הוא וקטור עמודה). כדי לעבור בין הבעיות נעזר בדואליות כלהלן:

ידוע כי למטריצה ממשית יש אותם ע"ע כמו לצמוד שלה. לפיכך למטריצה $A - LC$ ע"ע זהים לאלה של המטריצה הצמודה $A^T - C^T L^T$. לפיכך:

$$\det(sI - (A - LC)) = \alpha(s) \quad \Leftrightarrow$$
$$\det(sI - (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})) = \alpha(s) \text{ for } \bar{A} = A^T, \bar{B} = C^T, \bar{K} = L^T$$

באופן דומה:

$$\det(sI - (A - BK)) = \alpha(s) \quad \Leftrightarrow$$
$$\det(sI - (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})) = \alpha(s) \text{ for } \bar{A} = A^T, \bar{C} = B^T, \bar{L} = K^T$$

בעזרת קשרים אלה ניתן כמובן להראות את השקילות בין נוסחאות בס-גורה בשני המקרים.

<u>לסיכום</u>:

1. הגדרנו "משחזר מצב", שהוא מערכת דינמית הכוללת "העתק" של המערכת המקורית בתוספת "איבר שגיאה" המשלב את יציאת המערכת.
2. וקטור שגיאת השערוך מקיים את המשוואה הדינאמית: $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$
3. באם הצמד (A, C) אובזרווביל, ניתן למקם את הע"ע של המשחזר כרצוננו.

3.4. משחזר מצב למערכת בזמן בדיד

נניח עתה כי נתונה מערכת המצב בזמן בדיד :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad x(0) = x_0$$
$$y(k) = Cx(k)$$

מבנה המשחזר, בדומה לזמן הרציף :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

עם תנאי התחלה כלשהם $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$.

התיאוריה דומה אף היא לזמן הרציף : משוואת השגיאה $\tilde{x}(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k)$
המתקבלת על ידי חיסור משוואת המשחזר ממשוואת המערכת היא

$$\tilde{x}(k+1) = (A - LC)\tilde{x}(k)$$

כאשר $\tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0$.

מטריצת החוג הסגור של המשחזר הינה לפיכך : $A_L \triangleq A - LC$.

באם הצמד (A,C) אובזרוובילי, ניתן למקם את הע״ע של המשחזר כרצוננו.

3.4. * משחזר מצב מופחת-מימד (Reduced order observers)

[הערה: סעיפים המסומנים ב-* אינם נכללים בחומר הלימוד, אלא אם נאמר אחרת.]

במקרים בהם היציאה היא חלק מוקטור המצב, ניתן לנצל זאת כדי להקטין את מימד מערכת המשחזר.

נניח אם כן כי

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x_2 \end{bmatrix},$$

כלומר $y = x_1$. נחלק את מטריצות המערכת באופן מתאים:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(נציין שאיננו מוגבלים פה בהכרח ליציאה סקלרית). כיוון ש- $x_1 = y$ נמדד ישירות, נקבע $\hat{x}_1 = y$. נשאר לממש משחזר עבור x_2 בלבד. ננסה את המבנה המתבקש ממשואת המצב:

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21} y + A_{22} \hat{x}_2 + B_2 u - ?$$

השאלה מהו איבר השגיאה (ה"משוב") שניתן להציב במקום "?". השימוש ב- $L(y - C\hat{x})$ אינו אפשרי פה עקב $y - C\hat{x} = 0$. במקום זאת נוסיף נגזרת וננסה איבר מהצורה:

$$? = L(\dot{y} - \dot{\hat{y}})$$

כאשר

$$\dot{\hat{y}} = \dot{\hat{x}}_1 = A_{11} y + A_{12} \hat{x}_2 + B_1 u$$

קיבלנו אם כן:

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21} y + A_{22} \hat{x}_2 + B_2 u - L(\dot{y} - \dot{\hat{y}})$$

כדי להימנע מגזירת y, נגדיר משתנה חדש $Z = \hat{x}_2 + Ly$, ונקבל:

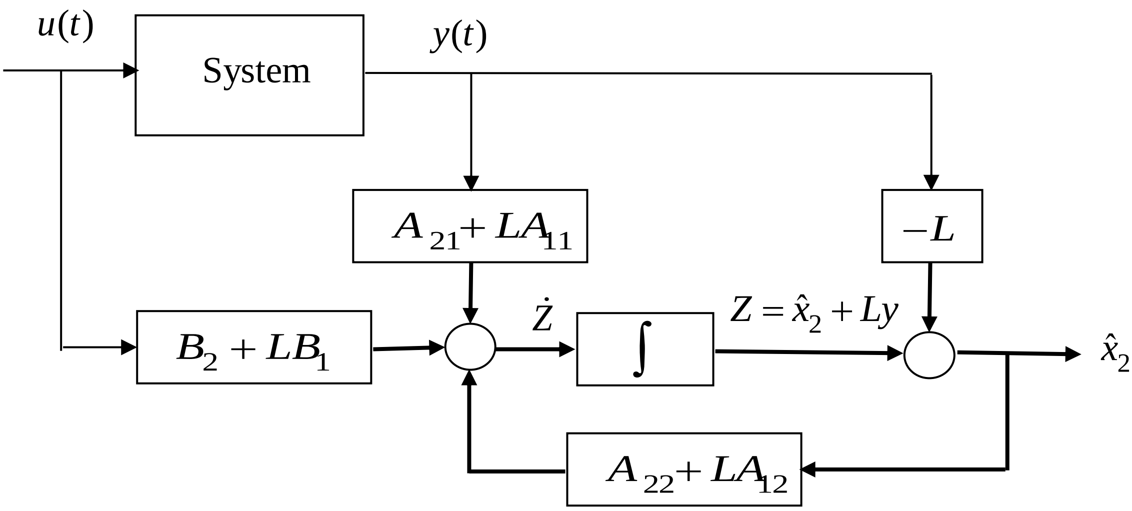
$$\dot{Z} = A_{21} y + A_{22} \hat{x}_2 + B_2 u + L\dot{\hat{y}}$$

$$\hat{x}_2 = Z - Ly$$

לאחר הצבת $\dot{\hat{y}}$ וקיבוץ איברים נקבל, באופן שקול :

$$\dot{Z} = (A_{21} + LA_{11})y + (A_{22} + LA_{12})\hat{x}_2 + (B_2 + LB_1)u$$
$$\hat{x}_2 = Z - Ly$$

סכמת מימוש עבור המשחזר מופחת-המימד הינה כלהלן :



<u>משוואת השגיאה ובחירת L</u> : נגדיר $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$. לאחר חשבון קצר נקבל

$$\dot{\tilde{x}}_2 = (A_{22} - LA_{12})\tilde{x}_2$$

בהשוואה למשחזר המלא, ניתן לראות כי A_{22} תפס את מקומו של A , ואילו A_{12} מחליף את C . לפיכך, באם הצמד (A_{22}, A_{12}) הינו אובזרוובילי, ניתן לקבוע את הע״ע של $(A_{22} - LA_{12})$ כרצוננו על ידי בחירת L .