פרק 1. משוואות מצב ותכונותיהן (חזרה)

פרק זה מהווה תזכורת קצרה לנושאים הבאים שנלמדו במסגרת מערכות בקרה 1, ואשר מתייחסים למערכות מצב ליניאריות וקבועות בזמן (לק״ב):

- משוואות מצב ופתרונן
- קונטרולביליות ואובזרוביליות
- צורות קנוניות בסיסיות של מערכות מצב
- התמרות שקילות
- מידול ולינאריזציה

1.1. משוואות מצב ופתרונן

א. זמן רציף. נתבונן במערכת לק״ב (לינארית וקבועה בזמן) עם כניסה אחת ויציאה אחת (מערכת SISO) במישור המצב:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}x(t) &= Ax(t)+Bu(t), \quad t\geq 0; \qquad x(0)=x_0 \\ y(t) &= Cx(t)+Du(t) \end{aligned}$$

כאשר: $x(t)\in\mathbb{R}^n$ הינו וקטור מצב n מימדי.

$u(t), y(t)$ אותות כניסה ויציאה סקלריים

x_0 וקטור תנאי התחלה – המצב ההתחלתי של המערכת.

<u>פתרון בתחום הזמן:</u>

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t\geq 0$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t)+Du(t) \\ &= Ce^{At}x_0+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

המטריצה e^{At} הינה <u>מטריצת המעבר</u> (Transition Matrix) של המערכת, בעלת מימד $n\times n$, ומוגדרת על ידי הטור המטריצי:

$$e^{At}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}$$

ניתן לחשבה ע"י ליכסון (התמרת דימיון): $A=T^{-1}\Lambda T \quad\Rightarrow\quad e^{At}=T^{-1}e^{\Lambda t}T$

או באמצעות התמרת לפלס: $e^{At}1(t)=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

<u>פונקצית תמסורת</u>: הפיתרון המלא במישור לפלס הינו:

$$Y(s)=H(s)U(s)+C(sI-A)^{-1}x(0)$$

כאשר $H(s)$ הינה פונקצית התמסורת של המערכת:

$$H(s)\triangleq\left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{x(0)=0}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

מתקבל כי $H(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)}$, כאשר $a(s)$ הינו הפולינום האופייני:

$$a(s)=\det(sI-A):=s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n$$

<u>יציבות</u>: המערכת יציבה אסימפטוטית *אם ורק אם* כל הע"ע של A בעלי חלק ממשי שלילי: $\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}<0,\ i=1,\ldots,n$.

תנאי זה הינו גם מספיק (אך לא הכרחי) ליציבות BIBO.

ב. זמן בדיד. משוואות המצב:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)\quad;\quad x(0)=x_0$$
$$y(k)=Cx(k)+Du(k)$$

פתרון בתחום הזמן: $x(k)=A^kx(0)+\sum_{m=0}^{k-1}A^{k-1-m}Bu(m)$

פתרון באמצעות התמרת Z: $X(z)=\{(zI-A)^{-1}z\}\,x_0+H(z)U(z)$

פונקציית התמסורת: $H(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$

פולינום אופייני: $a(z)=\det(zI-A):=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$

יציבות: המערכת יציבה אסימפטוטית (ולכן BIBO) אם ורק אם כל הע"ע <u>בתוך מעגל היחידה</u>: $|\lambda_i(A)|<1,\ i=1,\ldots,n$.

ג. מערכות מרובות כניסות ויציאות (MIMO): משוואות המצב ומרבית הנוסחאות שרשמנו תקפות גם כאשר למערכת מספר כניסות ו\או מספר יציאות. בפרט,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

כאשר $u(t)$ הינו וקטור עמודה שרכיביו הן כל הכניסות הסקלריות למערכת, ו-$y(t)$ הינו וקטור עמודה הכולל את כל אותות היציאה (הסקלריים):

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_\ell(t) \end{pmatrix}$$

מימד המטריצות B,C,D הינו בהתאמה: $B_{[n\times m]}, C_{[\ell\times n]}, D_{[\ell\times m]}$. המטריצה A הינה, ללא שינוי, מטריצה ריבועית $n\times n$.

נשים לב כי משוואת המצב ניתנת לכתיבה מפורשת יותר כך:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \equiv Ax + B_1u_1(t) + \ldots B_mu_m(t)$$

כאשר הוקטורים B_j הם עמודות המטריצה $B = [B_1,\ldots,B_m]$. באופן דומה, משוואת היציאה הווקטורית $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ מבטאת למעשה משוואה נפרדת לכל אחת מהיציאות הסקלריות:

$$y_j(k) = C_jx(k) + D_ju(k), \quad j = 1,\ldots,\ell$$

כאשר C_j, D_j הם שורות המטריצות C, D.

פונקצית התמסורת $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ היא עתה מטריצה במימד $\ell\times m$, כאשר

$$[H(s)]_{ij} \triangleq \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

1.2. קונטרולביליות ואובזרווביליות

<u>שאלה</u>: האם ניתן להביא את המערכת מכל מצב התחלתי x_0 לכל מצב אחר x_f במרחב המצב על ידי אות כניסה מתאים?

<u>הגדרה</u>: מערכת מצב (בזמן בדיד או רציף) תקרא <u>*קונטרולבילית*</u> אם עבור כל מצב התחלתי $x(0)=x_0$ ומצב סופי רצוי x_f, קיים זמן סופי T ואות כניסה $\{u(t), 0\le t\le T\}$ כך ש: $x(T)=x_f$.

<u>משפט:</u> מערכת מצב (בזמן רציף או בדיד) הינה קונטרולבילית <u>אם ורק אם</u> מטריצת הקונטרולביליות $\mathcal{C}:=[B, AB,\cdots, A^{n-1}B]$ הינה בעלת דרגה מלאה (כלומר n).

<u>שאלה</u>: האם נוכל לדעת מה היה המצב (ההתחלתי) של המערכת על ידי מדידת יציאתה בלבד (בהנחה שהכניסה ידועה)?

<u>הגדרה</u>: מערכת משוואות מצב (בזמן בדיד או רציף) תקרא <u>*אובזרווובילית*</u> אם ניתן לחשב את וקטור המצב ההתחלתי $x(0)$ מתוך ערכי אותות הכניסה והיציאה על פני אינטרוול זמן סופי $[0,T]$ (זאת כמובן בהנחה שהמטריצות A,B,C,D ידועות).

<u>משפט:</u> מערכת מצב (בזמן רציף או בדיד) הינה אובזרווובילית *אם ורק אם* מטריצת האובזרווובילית הבאה הינה בעלת דרגה מלאה (n):

$$\mathcal{O}:=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$$

<u>הערה</u>: תוצאות אלו נכונות גם למערכות MIMO.

<u>מינימליות</u> : מערכת מצב $S=(A,B,C,D)$ (SISO) תקרא מינימלית אם אין צמצום בין המונה והמכנה בפונקציית התמסורת :

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B\equiv\frac{b(s)}{a(s)},\quad a(s)=\det(sI-A)$$

<u>משפט</u> : המערכת מינימלית *אם ורק אם* היא קונטרולבילית ואובזרוובילית.

1.3. צורות קנוניות בסיסיות (למערכות SISO בלבד)

<u>צורה קנונית של קונטרולר</u>:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_c = [b_1, \dots, b_n]$$

פונקציית התמסורת המתקבלת (עבור $D=0$):

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

מערכת בצורה קנונית זו הינה תמיד קונטרולבילית (כלומר: הצמד A_c, B_c קונטרולבילי).
מטריצת הקונטרולביליות הינה:

$$\mathcal{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

בהינתן פונקציית תמסורת $H(s)$ כנ"ל, מערכת המצב המוגדרת על ידי (A_c, B_c, C_c) נקראת <u>מימוש</u> של $H(s)$ בצורה קנונית של קונטרולר (בקיצור: מימוש קונטרולר של $H(s)$).

<u>צורה קנונית של אובזרוור</u>:

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & \\ -a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad C_o = [1, 0, \dots, 0]$$

פונקצית התמסורת המתקבלת: כנ"ל.

מערכת בצורה קנונית זו הינה תמיד אובזרוובילית (כלומר: הצמד A_o, C_o הינו אובזרוובילי). מטריצת האובזרוביליות הינה:

$$\mathcal{O}_o=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

בהינתן פונקציית תמסורת $H(s)$ כנ"ל, מערכת המצב המוגדרת על ידי (A_o, B_o, C_o) נקראת <u>מימוש</u> של $H(s)$ בצורה קנונית של אובזרוור (בקיצור: מימוש אובזרוור של $H(s)$).

1.4. התמרות שקילות

נתבונן במערכת $S=(A,B,C,D)$:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

הגדרת וקטור מצב חדש $\bar{x}(t)=T^{-1}x(t)$ (כאשר T מטריצה ריבועית לא-סינגולרית) מובילה למערכת הבאה:

$$\tfrac{d}{dt}\bar{x}(t)=\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{B}u(t)$$
$$y(t)=\bar{C}\bar{x}(t)+\bar{D}u(t)$$

כאשר

$$\bar{A}=T^{-1}AT,\quad \bar{B}=T^{-1}B$$
$$\bar{C}=CT,\qquad \bar{D}=D$$

המערכת $\bar{S}=(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$ נקראת <u>שקולה</u> למערכת $S=(A,B,C,D)$, באמצעות התמרת השקילות T.

התמרת השקילות של מערכת מצב משמרת את:

- פונקציית התמסורת
- דרגת מטריצת הקונטרולביליות
- דרגת מטריצת האובזרוובילית

יתר על כן, מתקיים:

- $\bar{\mathcal{C}}=T^{-1}\mathcal{C}$, $\bar{\mathcal{O}}=\mathcal{O}T$

<u>משפט</u>:

א. כל מערכת מצב קונטרולבילית שקולה למערכת בצורה קנונית של קונטרולר.

ב. כל מערכת מצב אובזרוובילית שקולה למערכת בצורה קנונית של אובזרוור.

<u>דוגמאות (בכיתה):</u>

1. נתונה מערכת מצב מסדר $n=2$, בעלת פונקציית תמסורת $H(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$.

   האם המערכת שקולה למערכת בצורה קנונית של:

   א. קונטרולר?

   ב. אובזרוור?

   ג. אלכסונית?

2. חזרו על שאלה 1, כאשר הפעם $H(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+2}$.

3. חזרו על שאלה 1, כאשר הפעם נתון כי $n=3$.

1.5. מידול (System Modeling)

שלב בסיסי בתכנון וניתוח מערכת בקרה הוא בניית מודל מתמטי למערכת המבוקרת.
ניתן להבחין בין שתי גישות:

1. בניית מודל מתמטי מתוך עקרונות פיסיקליים ותאור המערכת.
2. מדידה ישירה של תגובת מערכת נתונה (כגון תגובת התדר).

המקרה הראשון שהוא הנפוץ יותר מוביל באופן טבעי למשוואות מצב (לאו דווקא לינאריות) עבור המערכת.

דוגמאות למידול:

- במשך הקורס נעזר בדוגמאות של מספר מערכות בסיסיות מתוך האתר הפתוח הבא:

Control Tutorials for Matlab and Simulink:

https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/

1. בקרת שיוט (מודל לינארי)
2. מנוע זרם ישר

1.6. לינאריזציה

מערכות רבות אינו לינאריות, ובהתאם מודל המצב המתקבל אינו לינארי. במקרים אלה ניתן לקבל מודל לינארי מקורב על ידי ביצוע לינאריזציה מקומית סביב נקודת עבודה.

מודל המצב הלא-לינארי (קבוע בזמן)

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = f(x(t),u(t)), \quad t \ge 0; \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = g(x(t),u(t))$$

נקודת שיווי משקל (נש"מ):

- כל צמד (x^e,u^e) שעבורו $f(x^e,u^e)=0$, וכן $y^e \triangleq h(x^e,u^e)$.

משתני ההפרש מסביב לנש"מ:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x^e,\ \tilde{u}(t) = u(t) - u^e,\ \ \tilde{y}(t) = y(t) - y^e$$

המערכת הלינארית המקורבת בסביבת הנש"מ:

$$\tfrac{d}{dt}\tilde{x}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t), \quad t \ge 0; \qquad \tilde{x}(0) = x_0 - x^e$$
$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t)$$

כאשר:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x^e,u^e)}, \quad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x^e,u^e)}$$
$$C = \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial x}\right|_{(x^e,u^e)}, \quad D = \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial u}\right|_{(x^e,u^e)}$$

<u>דוגמה</u>: בקרת שיוט (מודל לא לינארי)

$$ma = F_{motor} - Bv^2$$

$$x_1 \triangleq v,\ u \triangleq F_{motor} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\frac{B}{m}x_1^2 + \frac{1}{m}u \ \triangleq f(x_1, u)$$

נניח שאנו מעוניינים במודל מקורב סביב מהירות 90 קמ"ש (25 מ\שני). כלומר $x_1^e = 25m/s$.

לקבלת מהירות זו כחלק מהנש"מ נדרש כח $u^e = B(x_1^e)^2$.

נגזור ונקבל:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = A\tilde{x}_1 + B\tilde{u} \quad ,$$

$$A = -2\frac{b}{m}x_1^e = \dots, \quad B = \frac{1}{m}$$

* הערה: "לינאריזציה גלובלית".