

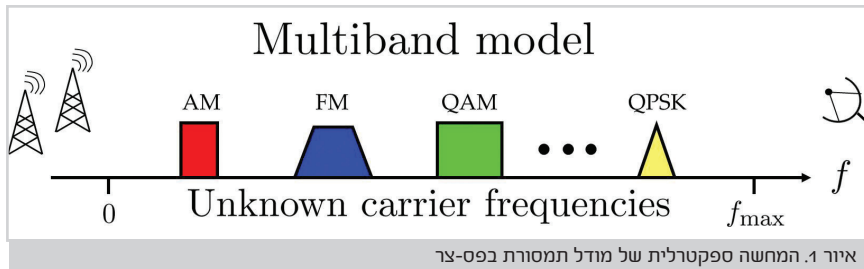
מחקר שנעשה בטכניון פותח מחדש מוסכמות בנות 80 שנה

ד"ר משה משעלי ופרופ' יונינה אלדר, המחלקה להנדסת חשמל, הטכניון

דגימה בקצב נמוך, פרופורציונלי לרוחב בפועל של פס התדר הנדגם. אבל, מה אם אות הכניסה אינו מוגבל לתמיכה בתדר עבורו תוכננה המערכת - או אפילו גרוע מכך, אם הוא אינו חסום-סרט כלל - האם אנחנו עדיין יכולים לדגום בקצבי תת-נייקוויסט? (כיצד בכלל מגדירים קצב זה כאשר אות הכניסה אינו חסום-סרט?) אולי במפתיע, במאמר זה נראה שהתשובה לכך היא חיובית, בתנאי

מגמה זו נתמכת, בחלקה, על-ידי הישגים בתחומים נלווים, כמו תקשורת רחבת-פס וטכנולוגיית RF, אשר פותחים כבר עתה פער ניכר עם התקני ADC ברזולוציה גבוהה. מהירות המרה של פי שתיים מרכיב התדר המירבי של האות הפכו קשות יותר ויותר להשגה. לפיכך, חלופות לדגימה בתדר גבוה מושכות תשומת לב רבה, הן באקדמיה והן בתעשייה. דה-מודולציה היא השיטה הנפוצה ביותר

חד מעקרונות היסוד בתכנון הנדסי הוא שכאשר דוגמים אות אנלוגי, תדר הדגימה צריך לעלות על קצב נייקוויסט, שהוא פי שניים מהתדר הגבוה ביותר של אות הכניסה. עקרון זה נובע מכך, שכאשר דוגמים בתדרים נמוכים יותר מקצב נייקוויסט, נוצרים "קיפולי תדר" (aliasing), כך שתדרים שונים יכולים להתבטא בדגימות זהות. קצב הדגימה המינימלי מיוחס בספרות לנייקוויסט (1928) ולשנון (1948), המוכרים מתורת המידע ומעיבוד אותות ותקשורת, אף כי עקרונות דומים מופיעים כבר בפרסומים מוקדמים יותר בספרות הבריטית והרוסית. כאשר דוגמים בתדר נייקוויסט או בתדר גבוה יותר, לא מתרחשת תופעת קיפול התדרים והאות הנדגם יכול להיות משוחזר בצורה מדויקת על-ידי אינטרפולציה sinc סטנדרטית או על-ידי מסנן מעביר-נמוכים. כיום, שמונה עשורים לאחר ניסוח עקרון שנון-נייקוויסט בהקשר של מערכות תקשורת, אנחנו עדים לראשיתה של מגמה מעניינת בתכנון ממירי אנלוגי-לדיגיטלי (ADC), אשר מנסה לנצל את מבנה האות כדי לצמצם את תדרי הדגימה.

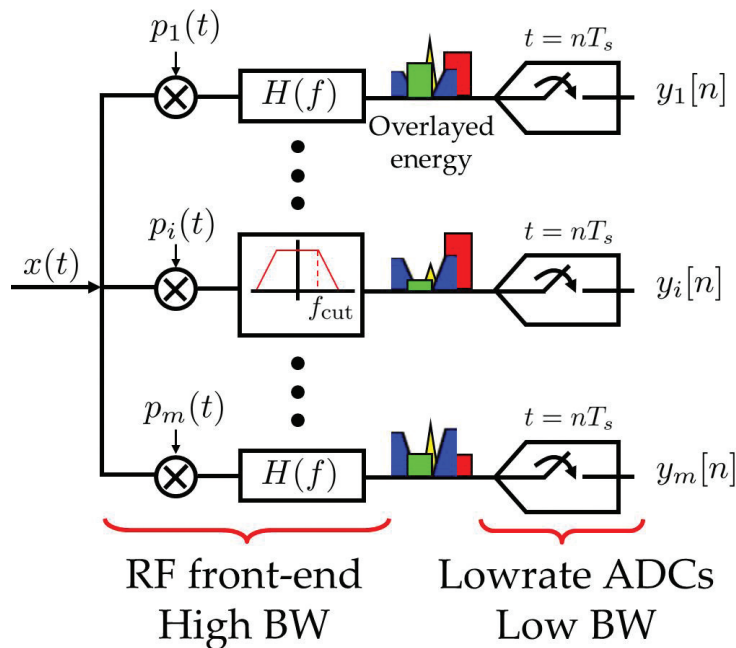


איור 1. המחשה ספקטרלית של מודל תמסורת בפס-צר

שלאות הכניסה יש מבנה נוסף שביכולתנו לנצל. ליתר דיוק, שיטות המכוננות 'דגימה בקצבי תת-נייקוויסט' אינן "שוברות" את המשפט של שנון-נייקוויסט. טכניקות אלה ממנפות את מבנה האות הידוע מעבר לידיעה הכללית של רכיב התדר המירבי. המפתח לפיתוח אסטרטגיות דגימה מעניינות בקצבי תת-נייקוויסט הוא להניח מבנה אות שאינו מגביל מדי, הכולל קבוצה רחבה של אותות מצד אחד, <

בתחום התקשורת, שנועדה לעקוף את הצורך בדגימה בתדרי RF. כאשר האות הנכנס מכיל תמסורת צרת-פס אחת או יותר בתדרי נשא ידועים, מקלט דה-מודולציה מכפיל את האות הנכנס בתדר הגל הנושא (carrier frequency) של פס המידע הרלוונטי, וזאת כדי להעתיק את תוכנו אל תדרי בסיס. בעזרת מסנן מעביר-נמוכים דוחים תדרים שמקורם בפסי מידע אחרים, ובכך מתאפשרת

The Modulated Wideband Converter



איור 2. ממיר רחב-פס מאופנן

חומרה יחיד. ערבול (או הכפלה) עם פונקציות מחזוריות הינו המפתח המאפשר להשיג קצבי תת-נייקוויסט באסטרטגיית הדגימה MWC. מאחר ש- $p_i(t)$ הינה פונקציה מחזורית, הפיתוח שלה לטור פוריה נתון על-ידי:

$$p_i(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{il} e^{j \frac{2\pi}{T} l t}$$

משמעות הדבר היא ש- $p_i(t)$ מורכב מגלי סינוס רבים, בתדרים המרוחקים זה מזה במרווח זהה. כתוצאה מכך, ערבוב על-ידי $p_i(t)$ מערבול את הספקטרום של $x(t)$ כך שחלק מהאנרגיה של כל פרוסת תדר מקופלת לתדרי בסיס. הליך זה מוביל לקיפול תדרים של כל טווח תדרי נייקוויסט לתוך אותו פס בסיס. בעקרון, כל צורת-גל מחזורית $p_i(t)$ המכילה "מעברים" חדים ורבים מספיק בתוך פרק הזמן T , תתאים ליצירת אפקט קיפול זה. אפשרות אחת היא פונקציות עם סימנים מתחלפים $p_i(t)$, אשר יכולות להיגזר מרגיסטר הזזה יחיד באורך M , בו M הוא לפחות $2f_{MAX}/B$.

שחזור דליל ובעיית 12 המטבעות

לכאורה, קיפול התדרים המכוון מעוות

דה-מודולציה אדפטיבית, נתאר את הממיר רחב-הסרט המאופנן MWC (Modulated Wideband Converter) שפותח בשנים האחרונות (2008-2010) על-ידי המחברים. איור 2 מתאר את דיאגרמת הבלוקים של הממיר.

ממיר MWC מבוסס על חזית (front-end) אנלוגית עם m ערוצים. בערוץ ה- i , האות הנכנס $x(t)$ מוכפל על-ידי צורת-גל מחזורית $p_i(t)$ עם אורך מחזור זמן T , עובר במסנן מעביר נמוכים $h(t)$ עם תדר קטעון $(2Ts)/1$ (cutoff) ואז נדגם בתדר $f_s = 1/T$. נניח מודל אות כניסה כפי שהוגדר, עם N פסי-תדר לכל היותר, כאשר כל פס הינו ברוחב מירבי של עד B Hz. נבחר $T=Ts=B$ ומספר ענפים השווה ל- $m=2N$. כדי להשיג גודל אופטימלי של החומרה, ניתן להפחית את הענפים האנלוגיים m בפקטור q על-חשבון תדר דגימה בכל ענף, הגבוה באותו פקטור ביחס לקונפיגורציה הבסיסית. בכל אחת מן התצורות הללו, ממיר MWC דוגם בתדר המתקרב ל- $2NB$ (אשר, על-פי התאוריה, מובטח להיות אופטימלי), כך שתדר הדגימה פרופורציונלי ל"תפוסת" רוחב-הסרט בפועל, במקום תדר נייקוויסט, $2f_{MAX}$, הגבוה הרבה יותר באופן כללי. בעיקרון, קצב דגימה של $2NB$ יכול להיות מושג גם תוך שימוש בערוץ

ומאפשר הורדת קצב הדגימה מצד שני. נציג כאן אסטרטגיות מודרניות לדגימה בקצבי תת-נייקוויסט של שני מודלים מעניינים של אותות. נתמקד בעיקר במודל של שידורי תקשורת צרת-סרט, כאשר תדרי הגלים הנושאים אינם ידועים. נתייחס בקצרה גם ליישומים המבוססים על שערךן השהיות-הדים, תרחיש אופייני למערכות סריקה אשר משדרות פולס "גשש" אשר הדים חוזרים שלו מופיעים בהשהיות זמן בלתי-ידועות. אותות מסוג זה נפוצים, בין השאר, באולטרסאונד, במכ"ם ובמקלט GPS. אנו מכנים את השיטה הכללית בבסיס הטכניקות הללו Xampling, כאשר האות X מסמלת את כיווץ נפח האינפורמציה והדגימה המושגים בו-זמנית כתוצאה מתדרי הדגימה הנמוכים.

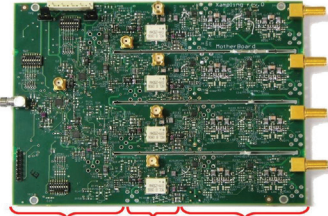
תקשורת צרת-סרט עם תדרי גלים נושאים בלתי ידועים

נתבונן בתרחיש של אות עם תמך ספקטרלי המורכב ממספר פסי תדר (multiband), המוצג באיור 1. מספר שידורים צרי-סרט תופסים חלק קטן מהספקטרום עד f_{MAX} . היעד הוא לתכנן מקלט, מבלי להניח את תדרי הגלים הנושאים, כך שניתן יהיה לקודד את המסרים או הביטים הנכנסים של כל שידור צר-סרט שבו מעוניינים. בעיקרון, אפשר לדגום בתדר $2f_{MAX}$ כדי ללכוד את כל תחום-נייקוויסט האפשרי, לרבות כל האזורים ה"לא-פעילים". גישה זו מובילה לקצבי דגימה גבוהים, ולפיכך - מחייבת עיבוד דיגיטלי בתדר נייקוויסט. למרות זאת, אינטואיטיבית, ברור כי ניתן לצפות להיות מסוגלים להקטין את תדר הדגימה, מאחר שרק חלק קטן מהספקטרום "תפוס" בפועל.

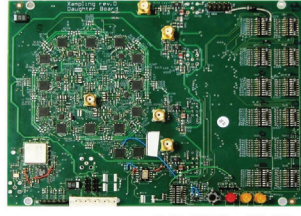
דה-מודולציה אדפטיבית היא דרך אפשרית אחת להורדת קצב הדגימה: בלוק חומרה סורק את הספקטרום הנכנס בחיפוש אחר מיקומי אנרגיה פעילה. דה-מודולציה סטנדרטית על המיקומים שזוהו תופיע מיד לאחרי. אולם, גישה זו עשויה לחייב רכיבים אנלוגיים רבים לצורך מעגלי הסריקה. יתרה מזאת, במהלך הסריקה רכישת האות אינה פעילה.

כדי להתגבר על חסרונות אלה של

2 GHz Wideband Receiver / 280 MHz Sampling rate



Split/Amp. Mixer Filter



$p_i(t) = \prod_{n=0}^{T_p} T_p$ 2.2 GHz Shift-Reg. (ECL Tech.)

Off-the-shelf devices, total price ~5k\$, standard PCB production

איור 4. מקלט רחב-סרט של 2GHz עם דגימה בת-תדר נייקויסט של 280MHz. הלוח השמאלי מבוסס על ארבעה ענפים של ערבוול אנלוגי בין אות הכניסה למערכת פונקציות מחזוריות וסינון במסמן מעביר-מנוכים. הפונקציות המחזוריות נוצרות על-ידי הלוח הימני מרגיסטר-הזזה יחיד

הערכה זו ומגיעים לשערוך מדויק של תדרי הגלים הנושאים ולשחזור של כל תקשורת בנפרד, עם ביטי המידע שהיא נושאת.

מתאוריה למעשה: תכנון חומרה וניסויים

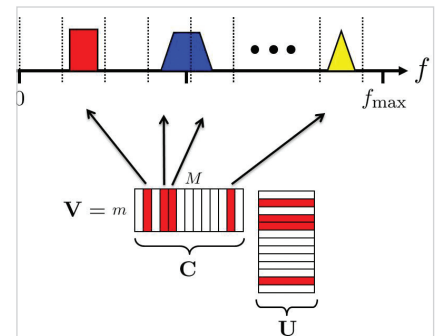
אב-טיפוס של ממיר MWC יושם בחומרה ברמת הלוח. מפרט החומרה מכסה אותות עם תדר נייקויסט של 2GHz עם תפוסת-תדר של עד 120MHz. במעגל החומרה נבנו $m=4$ ענפי דגימה, עם תדר דגימה כולל של 280MHz, כלומר קצב דגימה הנמוך בכסדר גודל מתדר נייקויסט 2GHz. תמונות של החומרה מופיעות באיור 4.

כדי להוכיח דגימה ושחזור בקצבי תת-נייקויסט, ערכנו את הניסוי המתואר באיור 5: שלושה מחוללי אותות שולבו לכניסה של אב-הטיפוס - אות מאופנן-משרעת (AM) סביב 807.8MHz עם מעטפת של 100kHz, מקור מאופנן-תדר (FM) ב-631.2MHz עם סטיית תדר של 1.5MHz וקצב אפנון של 10kHz, וסינוס טהור ב-981.9MHz. מיקומי התדרים הנושאים נבחרו כך שהקיפולים שלהם לפס הבסיס יחפפו, כדי ליצור את המתאר המורכב ביותר, כפי שמדגימות התמונות. אלגוריתם השחזור הופעל ואיתר את

אלגוריתם השחזור מדגימות של ממיר MWC מבוסס על לוגיקה דומה לצורך פתרון התכנים האנלוגיים צרי-הסרט. האלגוריתם יוצר מטריצת בסיס V מכמה מערכות של מדידות הכניסה $y[n]$. המקדמים c_{ii} מפיתוח הטור שלעיל של $p_i(t)$ נאספים למטריצת-חישה C , בצורה כזאת שכל שורה של C אוספת L מקדמים המתאימים לענף חומרה מסוים, כאשר $L=2f_{MAX}/B$ (מעוגל במידת הצורך). ביחד, המטריצות C ו- V יוצרות משוואה לינארית $V=CU$, כפי שמתואר באיור 3. למטריצה U יש תכונה חשובה, לפיה רק השורות התואמות לפרוסות תדר עם אנרגיה חיובית אינן אפס, כפי שמומחש באיור. מאחר שמטריצה החישה C תת-מוגדרת, כלומר יש לה פחות שורות מאשר עמודות, למערכת לינארית זו יש, בעיקרון, אינסוף פתרונות U . אנו משתמשים בשיטות נומריות, שפותחו בעת האחרונה במסגרת התחום המתפתח של חישה דחוסה (compressed sensing), כדי לשחזר פתרון U עם מספר קטן של שורות לא-אפס. טכניקות אלה חולקות את אותה לוגיקה של חידת "12 המטבעות". כפי שהוכחנו במאמר שפרסמנו, האינדקסים של שורות הלא-אפס של U מצביעים על מיקומי פס התדר של $x(t)$. לאחר מכן, "מעדנים"

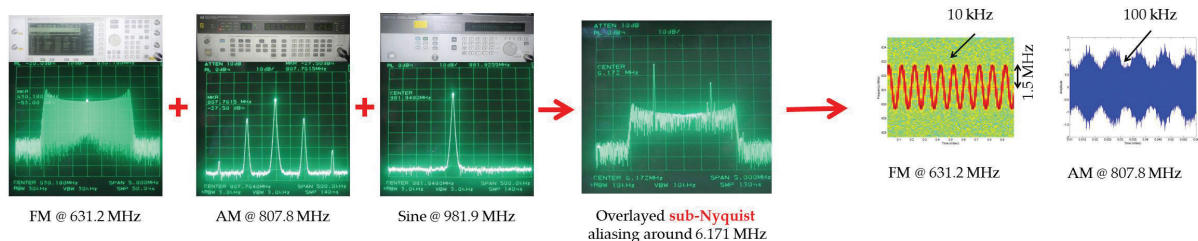
את הדגימות $y[n]$, כתוצאה מאנרגיות חופפות, כפי שמומחש באיור 2. לכן, במבט ראשון, העובדה כי ניתן לשחזר את האות הנכנס $x(t)$ ממערכת נתונה של דגימות $y[n]$ נראית מנוגדת לאינטואיציה ההנדסית. לב-ליבה של טכניקת MWC נעוץ בכך, שאנו מנצלים את הידע המוקדם שלנו ש- $x(t)$ הוא דליל מבחינה ספקטרלית; זאת, כדי לשחזר את פסי התדר הנפרדים בצורה דיגיטלית לאחר הדגימה.

כדי להסביר את אלגוריתם השחזור הדיגיטלי, נצטט חידה מפורסמת: "נתונים מאזניים ו-12 מטבעות, שאחד מהם מזויף. המטבע המזויף שוקל פחות או יותר משאר המטבעות. צריך לקבוע מי מבין המטבעות מזויף בעזרת שלוש שקילות, וכן להחליט האם המטבע כבד יותר או קל יותר". חידה זו מכילה באופן סמוי דגימה בקצב תת-נייקויסט. בעוד שקיימים הרבה נתונים



איור 3. אלגוריתם שחזור שאינו תלוי בתדר הגל הנושא

בלתי ידועים (משקלם של 12 המטבעות), הרבה פחות מדידות (3 בלבד) נדרשות על מנת לקבוע מידע במימד נמוך (המשקל היחסי של המטבע המזויף). פתרונות מוכרים של חידת "12 המטבעות" (המפורסמים באינטרנט) מבוססים על שלושה סבכים של השוואת משקל בין שתי קבוצות של ארבעה מטבעות, ולאחר מכן סוג של לוגיקה קומבינטורית, אשר בעזרתה מצביעים על המטבע המזויף.



איור 5. שחזור מדגימה בקצב תת-נייקויסט

◀ התמך הספקטרוני נכונה, העריך את תדרי הגלים הנושאים הלא ידועים (בדיוק של עד 10kHz) ושחזר את תכני אותות ה-AM וה-FM. הניסויים שערכנו במעבדה מצביעים על פרק זמן ממוצע של 10 מילי-שניות לצורך החישובים הדיגיטליים (על MATLAB).

יישומים הדורשים שיערוך השהיית-זמן בקצבי תת- נייקוויסט

רעיונות דומים (שניתן לממשם בעזרת אותה חומרה בשינויים קלים בלבד) יכולים לשמש לצורך הערכת המיקומים של פולסים קצרים מדגימות בקצב נמוך של אות כניסה. לדוגמה, נתבונן באות נכנס המורכב ממספר הדים של צורת פולס ידועה $h(t)$, כך שההשהיות והניחותים בלתי-ידועים למקלט:

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} h(t - t_{\ell}), \quad t \in [0, T]$$

מתאר כזה של הדים חוזרים מופיע, לדוגמה, בערוצי תקשורת מרובי-הדהודים, כאשר האות המשודר מגיע למקלט במספר נתיבים בעלי אורכי-מסלול שונים (בדרך-כלל

ימיים מבוססים גם הם על עקרון דומה. המכנה המשותף של יישומים אלה, הוא ש- $h(t)$ הוא פולס קצר בזמן, כך שרוחב-הפס שלו, ולפיכך זה של $x(t)$, נע לאורך טווח גדול של תדרי נייקוויסט. לפיכך, דגימת $x(t)$ לפי קצב הנייקוויסט שלו, שהוא למעשה זה של $h(t)$, מוביל לתדרי דגימה גבוהים הרבה יותר מהנדרש. עם זאת, אנחנו יכולים לצפות אינטואיטיבית לשחזר את $x(t)$ מדגימה בתדר נמוך עד כדי $2LT$, המכונה בספרות "תדר המופעים (הסופי)". אסטרטגיות דגימה בקצבי תת-נייקוויסט ליישומים של סוג זה של אותות נדונו בהרחבה בספרות המקצועית בשנים האחרונות. השיטות מבוססות על סינון מעביר-נמוכים של האות הנכנס קודם לדגימתו בתדר המתקרב ל- $2LT$. כמקודם, שיטות אלה עשויות להיראות כנוגדות את האינטואיציה ההנדסית: אולם, על-ידי ניצול מבנה האות, ניתן להראות כי אפשר לחשב את המקדמים הלא-ידועים (השהיות ומשרעות) מתוך הדגימות הנתונות בקצב תת-נייקוויסט. השחזור מבוסס על יצירת קשר מתמטי בין הבעיה הזו לבעיה מתמטית אחרת



משה משעלי



פרופ' יונינה אלדר

של זיהוי תדרים בסכום של סינוסים מרוכבים (frequency estimation of sum of complex sinusoids). הבעיה האחרונה נדונה בהרחבה בספרות העוסקת בעיבוד מערכים (array processing). תרחיש מאתגר יותר הוא, כאשר צורת הפולס $h(t)$ אינה ידועה אף היא למקלט, בנוסף להשהיות הבלתי-ידועות. שיטות דגימה בקצבי תת-נייקוויסט המיועדות לתרחיש זה, בדגש על יישומים בדימות מכ"ם, נחקרות לאחרונה בספרות המקצועית.

פרטים נוספים על דגימה בקצבי תת-נייקוויסט ניתן למצוא באתר Xampling:

http://webee.technion.ac.il/people/YoninaEldar/xampling_top.html

כתוצאה מפגיעות במספר שונה של בניינים או עצמים לאורך הדרך). המשדר מסייע למקלט בזיהוי ערוץ על-ידי שליחת פולס "גישוש" קצר $h(t)$, ועל בסיס הזיהוי המקלט יכול לפתור את ההשהיות t_{ℓ} ולהשתמש במידע זה כדי לפענח את התקשורת העוקבת. ביישומי מכ"ם, אותות מסוג זה מופיעים לרוב, שם ההשהיות t_{ℓ} מתאימות למיקומים הבלתי ידועים של מטרות במרחב, בעוד שהמשרעות a_{ℓ} מכילות מידע על היסטי דופלר המצביעים על מהירויות המטרה. טכניקות לדימות רפואי, כגון אולטרסאונד, מבוססות על פענוח הדים הנוצרים כתוצאה משינויי צפיפות ברקמה אנושית. שידורים אקוסטיים תת-