

פרק 3. מערכות מסדר שני

ראינו כי מערכות מסדר ראשון (בזמן רציף) מאפשרות התנהגות מונוטונית בלבד. בניגוד לכך, מערכות מסדר שני מאפשרות התנהגות אוסצילטורית, ובפרט מסלולים מחזוריים. בפרק זה נפגוש לראשונה את המושג של מחזור גבול ונתעכב על מאפייניו.

מישור הפאזה הינו כלי גיאומטרי חשוב המאפשר הבנה איכותית של המסלולים הזמניים של מערכות מצב. הכלי שימושי במיוחד במערכות בעלות מימד נמוך, ובפרט במימד 2.

תוכן הפרק:

- 3.1 תרשימי פאזה - הגדרה
- 3.2 בניית תרשימי פאזה
- 3.3 תרשימי פאזה של מערכות לינאריות
- 3.4 התנהגות איכותית של מערכות מסדר שני
- 3.5 תכונות גלובליות
- 3.6 * מערכות מסדר 3 ומעלה: כאוס ומאפייניו

3.1. תרשים פאזה - הגדרה

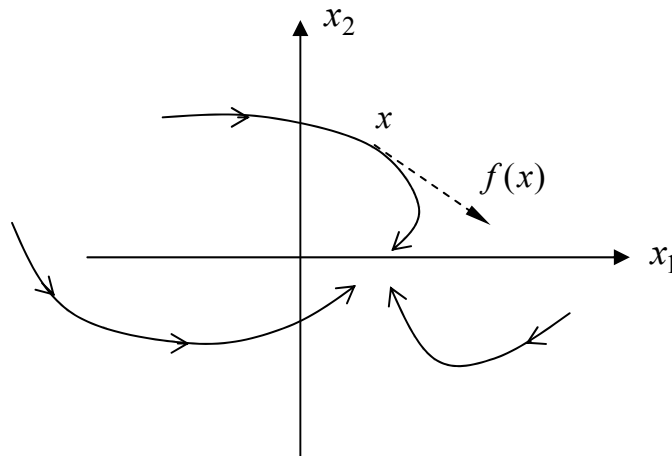
נתבונן במערכת מסדר שני :

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

מסלול של המערכת הינו פתרון $\{x(t), t \geq t_0\}$ של משוואות המצב, עבור תנאי-התחלה מסוימים $x(t_0)$.

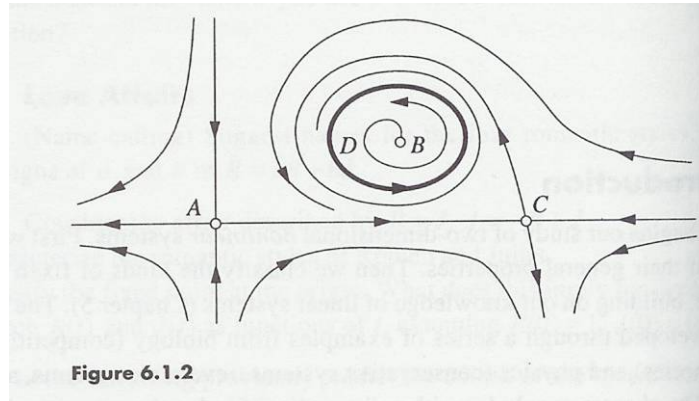
תרשים הפאזה הינו ציור של מסלול כזה (או של אוסף מסלולים עבור תנאי התחלה שונים) במישור המצב הדו-מימדי.

לדוגמא :

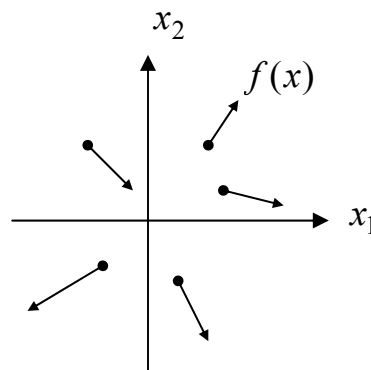


- בכל נקודה x במרחב המצב, הנגזרת הזמנית $\dot{x}(t)$ של המסלול נתונה על ידי הוקטור $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$. לפיכך, כיוון הוקטור $f(x)$ קובע את "כיוון המסלול" במישור הפאזה. "כיוון המסלול" הוא למעשה המשיק למסלול בנקודה x .
- נדגיש כי משתנה הזמן אינו מופיע באופן מפורש בתרשים זה. תרשים הפאזה מתאר את אופן התפתחות המסלול, אך לא את תלותו בזמן.
- חשוב לזכור כי מסלולים שונים אינם "חוצים" זה את זה (מדוע?).

על ידי ציור מספר מסלולים במישור הפאזה, ניתן לקבל מושג טוב למדי לגבי ההתנהגות האיכותית של המערכת. ראו לדוגמה התרשים הבא :



הערה : במערכת $\dot{x} = f(x)$ (במימד n כלשהו), הפונקציה f מתאימה לכל נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ וקטור n -מימדי $f(x) \in \mathbb{R}^n$. פונקציה כזו נקראת שדה וקטורי (מעל \mathbb{R}^n).



ניתן לומר, לסיכום, כי השדה הוקטורי $f(x)$ קובע (בפרט) את כיוון השינוי של וקטור המצב בכל נקודה x , ולפיכך את צורת המסלולים המתקבלים במרחב המצב.

דוגמא א' - אוסצילטור הרמוני :

נתבונן במערכת $\ddot{y} + y = 0$. עבור $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ נקבל :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

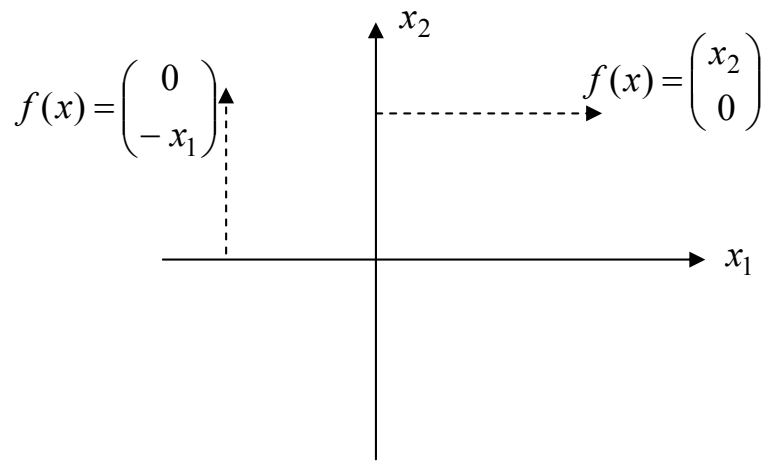
כידוע, הפתרון הזמני $\dot{x}(t)$ הינו :

$$\dot{x}_1(t) = A \sin(t + \varphi)$$

$$\dot{x}_2(t) = A \cos(t + \varphi)$$

כאשר (A, φ) נקבעים לפי תנאי ההתחלה.

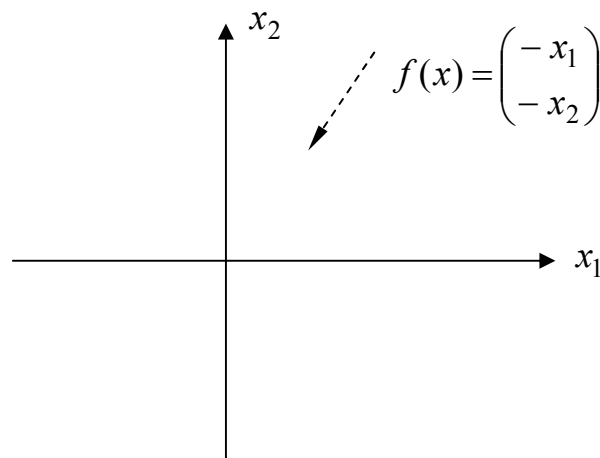
ציור המסלולים במישור המצב (להשלים...):



דוגמא ב' - מערכת אלכסונית סימטרית :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

(להשלים...)



מהן המסקנות לגבי יציבות הנשי"מ בראשית?

3.2. בניית תרשימי פאזה

נתאר עתה מספר שיטות המסייעות לבנייה ידנית של תרשימי פאזה למערכת דו-מימדית.

א. השיטה האנליטית :

ע"י חלוקת משוואות המצב נקבל

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

זו משוואה דיפרנציאלית במשתני המצב, שבה משתנה הזמן אינו מופיע. לעיתים (נדירות) ניתן לפתור משוואה זו באופן מפורש, ובכך לקבל את צורת המסלולים במישור המצב.

דוגמא : עבור האוסצילטור ההרמוני,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = C$$

ואכן מתקבלים מסלולים מעגליים.

ב. שיטת האיזוקלינות

העקרון : שרטוט קווי עזר (איזוקלינות) שלאורכם שיפוע המסלול הינו קבוע. שיפוע המסלול בנקודה x הינו כזכור שיפוע הוקטור $f(x)$, כלומר

$$m(x) := \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

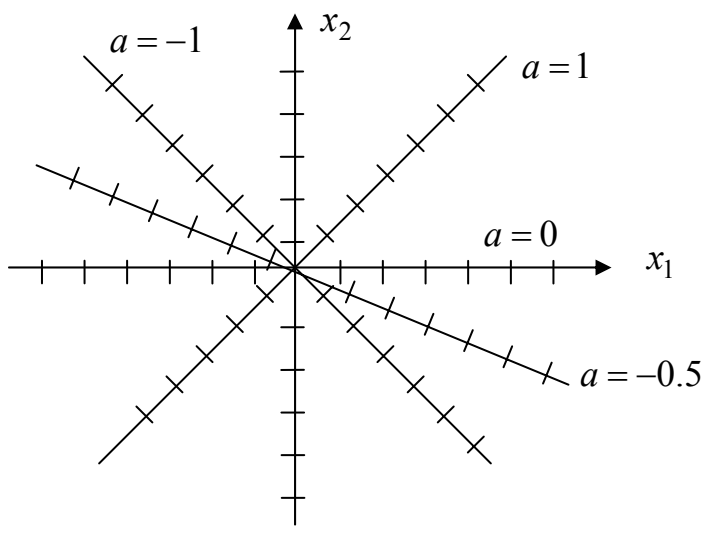
לפיכך אוסף הנקודות שבהן השיפוע הוא a נתון על ידי המשוואה

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = a$$

בד"כ משוואה זו מגדירה קו (לא ישר) במישור הדו-מימדי. ציור מספר קווים כאלה עבור ערכים שונים של a משמש כעזר לשרטוט המסלול.

דוגמא : עבור האוסצילטור ההרמוני,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} = a \quad \Rightarrow \quad x_2 = -ax_1$$



במקרה זה האיזוקלינות הן קווים ישרים דרך הראשית, עליהן נתווה את השיפוע המתאים כעזר לשרטוט המסלולים.

$$\ddot{y} + 0.2(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0$$

דוגמא נוספת : משוואת Van der Pol.

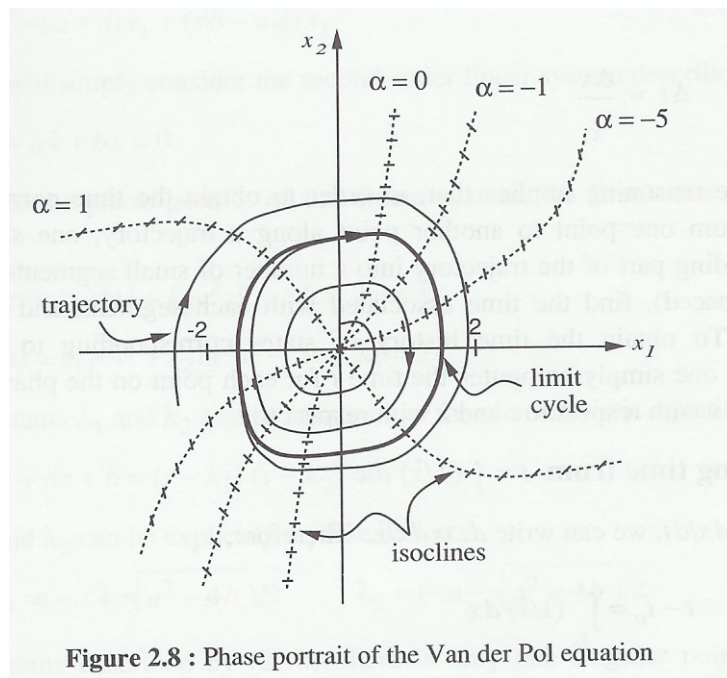
משוואות המצב עבור $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ הינן :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}$$

האיזוקלינה בשיפוע a נתונה על ידי

$$-0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 - ax_2 = 0$$

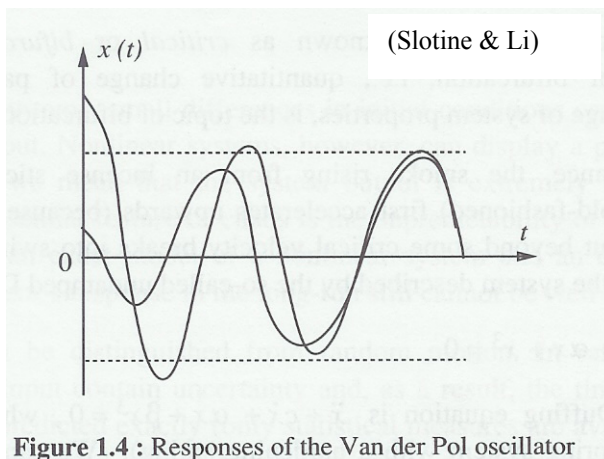
האיזוקלינות והמסלולים המתקבלים מוראים באיור הבא.



(Slotine & Li)

Figure 2.8 : Phase portrait of the Van der Pol equation

ניתן להבחין כי קיים מסלול סגור במרחב המצב. זהו מסלול מחזורי, או "מחזור גבול". ניתן גם לראות כי המסלולים האחרים שואפים למחזור הגבול – כלומר, זהו מחזור גבול יציב, ובמערכת תתקיים (לאחר דעיכת תופעת המעבר) תנודה מחזורית יציבה.



(Slotine & Li)

Figure 1.4 : Responses of the Van der Pol oscillator

המסלולים הזמניים המתקבלים עבור תנאי התחלה שונים מוראים בציור הבא.

3.3. תרשימי פאזה של מערכות לינאריות

נתבונן במערכת לינארית מסדר שני :

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{כלומר}$$

מובן כי הראשית $x = 0$ הינה נקודת שיווי משקל של המערכת.

הפתרון הכללי הינו כזכור :

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

$$e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (At)^k / k! \quad \text{כאשר}$$

נניח לשם פשטות כי הערכים העצמיים של A שונים זה מזה : $\lambda_1 \neq \lambda_2$. אזי כל רכיב של

$$\text{הפתרון } x(t) \text{ הוא מהצורה } (ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}).$$

הצורות השונות של תרשימי הפאזה המתקבלים עבור ערכים שונים של λ_1 ו- λ_2

(בהנחה כי $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$) מודגמות באיור הבא, ומוסברות להלן.

סיווג גיאומטרי של נקודות שיווי משקל :

בהתאם לאופי תרשים הפאזה בסביבת הראשית, ניתן לסווג נקודה זו באופן גיאומטרי

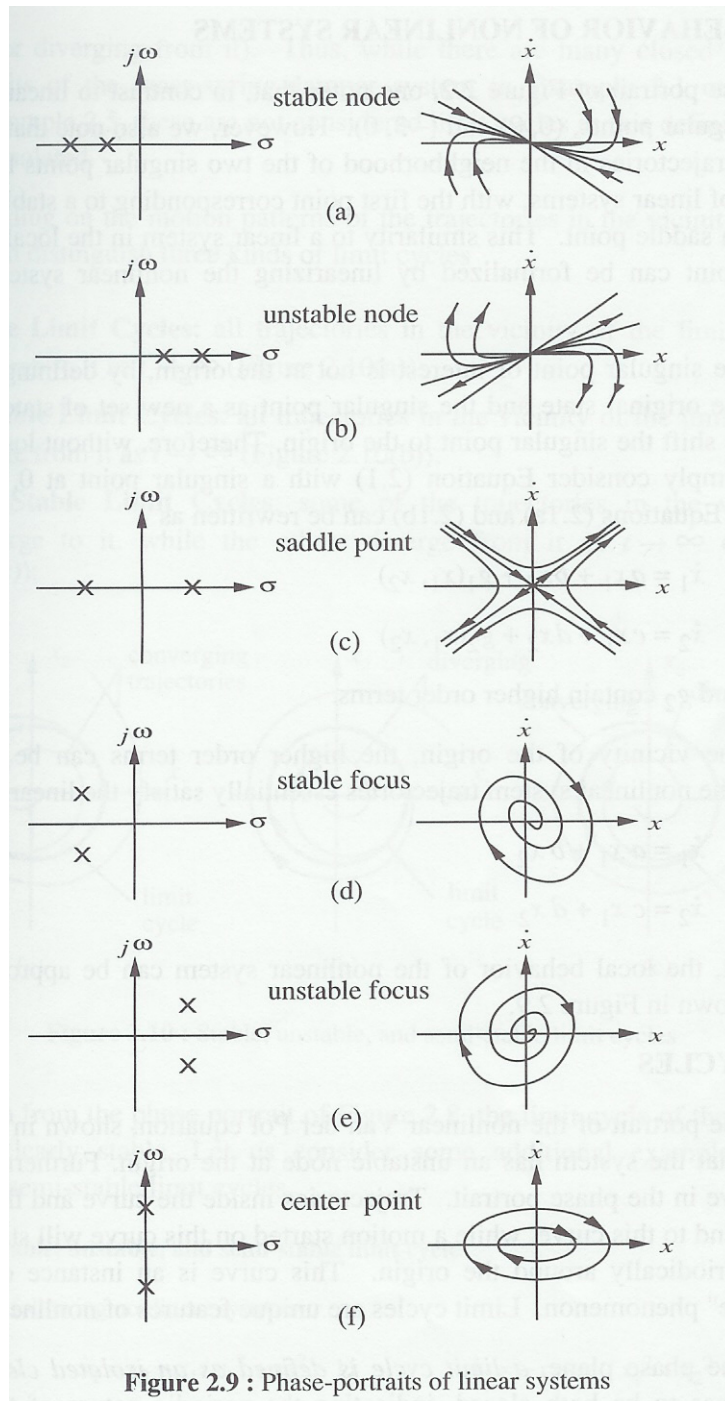
לאחת מהאפשרויות הבאות.

עבור ערכים עצמיים ממשיים :

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	כל המסלולים מתכנסים לנקודת הצומת	א. צומת מושך
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	כל המסלולים מתרחקים מנקודת הצומת	ב. צומת דוחה
ע"ע מנוגדי סימן	חלק מהמסלולים מתכנסים וחלק מתרחקים	ג. נקודת אוכף

עבור ערכים עצמיים מרוכבים :

$\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) < 0$	התכנסות מעגלית למוקד	ד. מוקד מושך
$\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) > 0$	התבדרות מעגלית מהמוקד	ה. מוקד דוחה
חלק ממשי מנוגד-סימן	המוקד מוקף מסלולים מעגליים	ו. נקודת מרכז



(Slotine & Li)

Figure 2.9 : Phase-portraits of linear systems

נציין כי :

- ★ במוקד (מושך למשל) המסלול הגיאומטרי שואף לכיוון המוקד אך אינו "נוגע" בו, בניגוד למקרה של צומת.
- ★ מוקד מושך וצומת מושך (בלבד) מהווים נקודות שיווי משקל יציבה אסימפטוטית (כפי שנגדיר בהמשך).
- ★ במקרה שהמטריצה A סינגולרית (כלומר אחד מהע"ע מתאפס) מתקבל רצף של נקודות שיווי משקל, לא נפרט לגבי מקרה זה.

* תרשימי הפאזה וכיוונים עצמיים :

בתרשימי הפאזה המתאימים לע"ע ממשיים ניתן להבחין בשני כיוונים שלאורכם המסלולים ישרים. כדי להבין זאת, נשים לב לנוסחה הבאה.

טענת עזר : נניח כי למטריצה A ערכים עצמיים $\lambda_1 \neq \lambda_2$, וכן ווקטורים עצמיים

$$x(t) = a_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{מתאימים } v_1, v_2. \text{ אזי :}$$

כאשר a_1, a_2 קבועים הנקבעים לפי תנאי ההתחלה : $a_1 v_1 + a_2 v_2 = x(0)$.

$$e^{At} = M \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} M^{-1} \quad \text{הוכחה : כידוע, עבור } M := [v_1, v_2] \text{ נקבל}$$

באם נגדיר עתה $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = M^{-1} x(0)$, נובע כי

$$x(t) = e^{At} x(0) = M \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} M^{-1} x(0) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

□ והנוסחה הדרושה מתקבלת.

משמעות הנוסחה היא כי כל אקספוננט $e^{\lambda_i t}$ "מתפתח" (מתבדר או דועך) לאורך כיוון

עצמי v_i . בפרט, אם תנאי ההתחלה הם בכיוון v_i , המסלול כולו יישאר בכיוון v_i :

$$x(0) = a v_i \Rightarrow x(t) = a v_i e^{\lambda_i t}$$

לפיכך, הקווים הישרים בתרשימי הפאזה הם הכיוונים העצמיים v_i .

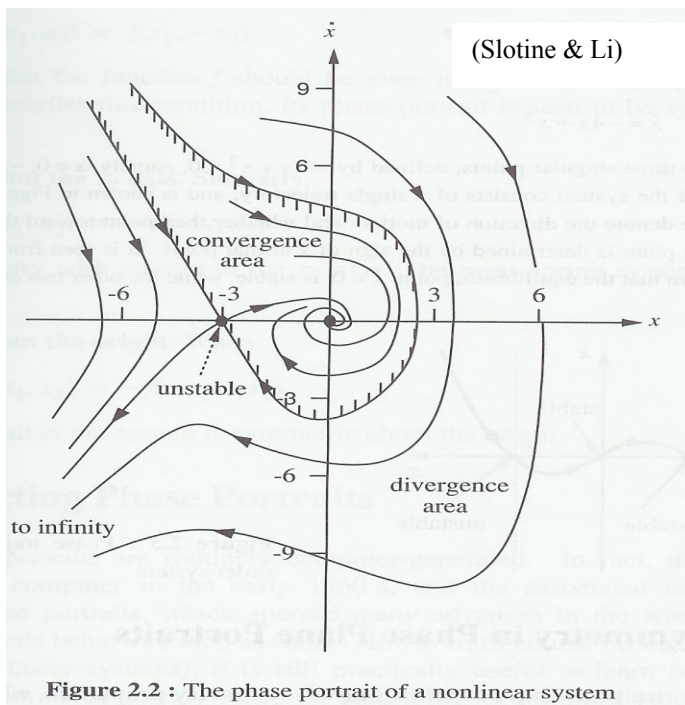
3.4. התנהגות איכותית של מערכות מסדר שני

נחזור לדיון במערכת הבלתי-לינארית $\dot{x} = f(x)$. נניח פה כי $f(x)$ פונקציה "חלקה", כלומר רציפה, גזירה, ובעלת נגזרות חלקיות רציפות. בהנחה זו, ההתנהגות האיכותית של המערכת קרוב לנקודות שיווי משקל (התנהגות מקומית) דומה במידה רבה למקרה הלינארי.

א. נקודות שיווי משקל וסיווגן

נזכיר ראשית בי נקודת שיווי משקל (נש"מ) של המערכת $\dot{x} = f(x)$ היא נקודה כלשהי במרחב המצב שבה $f(x) = 0$. נש"מ הינה יציבה אסימפטוטית אם כל מסלול שמתחיל מספיק קרוב אליה מתכנס אליה (כאשר $t \rightarrow \infty$).

בנוסף ליציבות, ניתן לסווג נש"מ לפי הסוגים שראינו לעיל עבור מערכות לינאריות. נתבונן בתרשים הפאזה הבא של מערכת (לא-לינארית) מסדר 2.



למערכת זו :

(1) "נקודת אוכף" בנקודה

$(-3, 0)$.

(2) "מוקד מושך" בראשית

(זו נש"מ יציבה).

(3) היציבות של הנש"מ בראשית הינה מקומית – רק מסלולים המתחילים בתוך האזור המקווקו יתכנסו לראשית. (אזור זה הינו "תחום המשיכה" של הנש"מ).

תוצאה כללית לגבי מערכות מסדר שני היא כי ההתנהגות המקומית של המסלולים מסביב לנש"מ תהיה לפי אחת משש האפשרויות שראינו עבור מערכת לינארית. לקביעת סוג הנש"מ ניתן להיעזר בשיטה הבאה.

קביעת סוג הנש"מ בעזרת לינאריזציה :

תהי x^* נש"מ, כלומר $f(x^*) = 0$. נזכיר כי ניתן לבצע קרוב לינארי של $f(x)$ מסביב לנש"מ (לינאריזציה מקומית) על ידי טור טיילור מסדר ראשון :

$$\dot{x} = f(x) \cong A(x - x^*)$$

$$A := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x^*} \quad \text{כאשר } A \text{ מטריצת היעקוביאן בנקודה } x^*$$

משפט : יהיו λ_1 ו- λ_2 הערכים העצמיים (ע"ע) של המטריצה A . נניח כי $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$,

וכן כי $\lambda_1 \neq \lambda_2$. אזי הנש"מ x^* היא מאחד הסוגים (1)-(5) שתוארו עבור מערכת לינארית, וסוגה נקבע לפי סימני הע"ע.

דוגמא : משוואת התנועה של מטוטלת פשוטה עם חיכוך ויסקוזי (B) הינה :

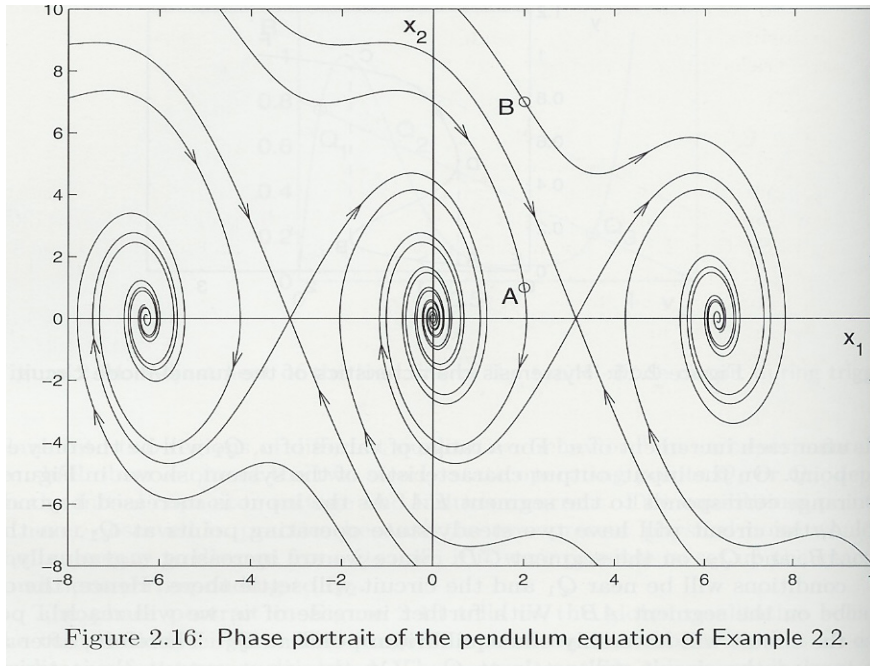
$$m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - B\ell \dot{\theta}$$

משוואות המצב המתקבלות עבור $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{B}{m} x_2$$

דיאגרמת פאזה מיוצרת-מחשב (עבור $B/m = 0.5, g/\ell = 1$) מוראית באיור הבא.



הנש"מ הן : $x_2^* = 0; \quad \sin x_1^* = 0 \Rightarrow x_1^* = 0, \pm \pi, \pm 2\pi \dots$

ניתן לראות כי עבור $x_1^* = 0$ מתקבל מוקד מושך, ואילו עבור $x_1^* = \pi$ מתקבלת נקודת אוקף.

נוודא זאת בעזרת לינאריזציה :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$x^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm j0.97 \Rightarrow \text{מוקד יציב}$$

$$x^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1.28 \\ \lambda_2 = 0.78 \end{matrix} \Rightarrow \text{נקודת אוקף}$$

ב. מחזורי גבול

מסלול סגור במישור הפאזה מבטא תנועה מחזורית של המצב $x(t)$.

מחזור גבול הינו מסלול במישור הפאזה שהוא :

(1) סגור.

(2) איננו מבודד – כלומר קיימים מסלולים אחרים המתכנסים אליו או

מתבדרים ממנו.

המסלולים של האוסצילטור ההרמוני $(\ddot{y} + y = 0)$ אינם מחזורי גבול כיוון שהם כן מבודדים.

ניתן לאפיין מחזורי גבול לפי מידת יציבותם, כמודגם באיור הבא. דוגמא למחזור גבול יציב ראינו במתנד van der Pol.

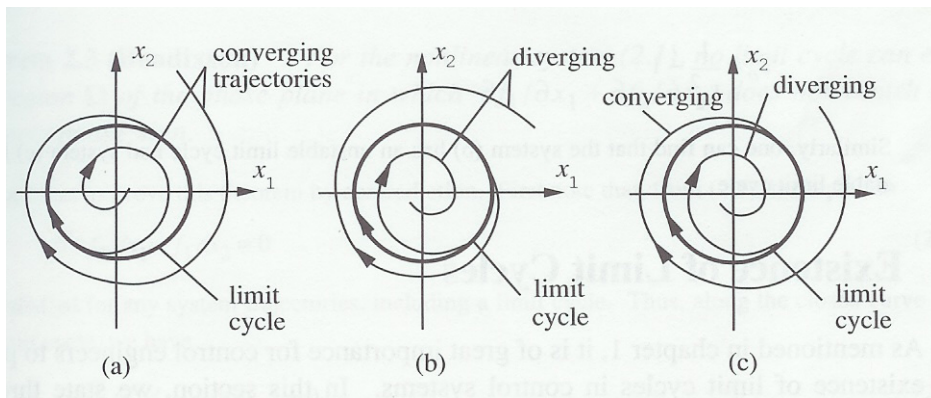


Figure 2.10 : Stable, unstable, and semi-stable limit cycles (Slotine & Li)

3.5 תכונות גלובליות

התכונות שתיארנו עד כה הן תכונות מקומיות, באשר הן מתייחסות להתנהגות המערכת ביחס לנש"מ או מחזור גבול מסויים.

תכונות המתייחסות ליחסים בין נש"מ או מחזורי גבול שונים, או למאפיינים של כל מסלולי המערכת, הן תכונות גלובליות. חקר תכונות אלה מנקודת ראות גיאומטרית החל בעבודתו של Poincaré בסוף המאה ה-19, ומהווה גם כיום תחום מחקר מרכזי בתורת המערכות הדינאמיות.

נביא פה שתיים מהתוצאות היסודיות בתחום. תוצאות אלו מתייחסות אך ורק למקרה של מערכות מצב מסדר שני (מהצורה $\dot{x} = f(x)$, כאשר f פונקציה חלקה).

משפט 1: משפט האינדקס של Poincaré.

נניח לשם פשטות כי הנש"מ הן מבודדות. אזי לכל מחזור גבול מתקיים $N = S + 1$, כאשר:

N - מספר נש"מ (פרט לנקודות אוכף) אשר מוקפות על ידי מסלול מחזור הגבול.
 S - מספר נקודות האוכף המוקפות על ידי מחזור הגבול.

בפרט נובע ממשפט זה כי מחזור גבול חייב להקיף לפחות נש"מ אחת!

משפט 2: Poincaré-Bendixon.

כל מסלול חסום מתכנס לנש"מ או למסלול מחזורי.

משפט זה שולל את האפשרות להתנהגות כאוטית במערכות (רציפות) מסדר שני!

* ביפורקציות במערכות מסדר שני :

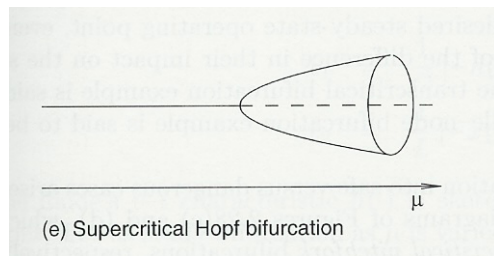
סוגי הביפורקציות שהופיעו במערכות מסדר ראשון (בהקשר לשינוי בנש"מ) מופיעים כמובן גם במערכות מסדר שני.

בנוסף לכך קיימות פה גם ביפורקציות הקשורות להופעת מחזורי גבול.

לדוגמא : ביפורקציית Hopf מציינת הפיכת נש"מ למחזור גבול. דוגמא קנונית לכך היא המערכת :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1 \end{aligned}$$

דיאגרמת הביפורקציה המתאימה ותרשימי פאזה (עבור $\mu > 0$ ו- $\mu < 0$) מודגמים בתרשימים הבאים.



(Khalil)

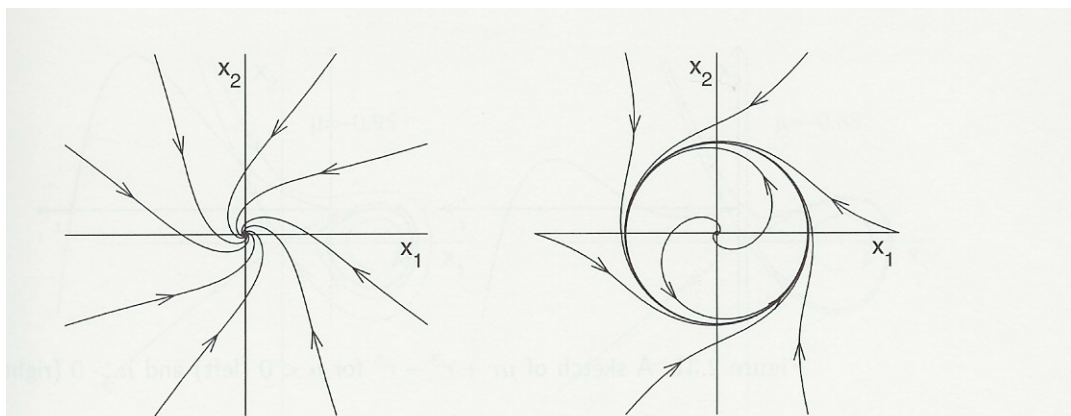


Figure 2.30: Phase portrait of the supercritical Hopf bifurcation example for $\mu < 0$ (left) and $\mu > 0$ (right).

3.6 * מערכות מסדר 3 ומעלה : כאוס ומאפייניו

במערכות (רציפות) מסדר שני, ההתנהגות של מסלולים (חסומים) במצב במתמיד מוגבלת להתכנסות לנש"מ או למסלול מחזורי. במערכות מסדר שלישי ומעלה, קיימת אפשרות נוספת להתנהגות במצב המתמיד : תגובה כאוטית.

תגובה כאוטית עשויה להופיע במערכות פשוטות יחסית. נתבונן במשוואה :

$$\ddot{y} + 0.1\dot{y} + y^5 = 6\sin t$$

(התיאור כמערכת בלתי-תלויה בזמן הוא מסדר 3!). התגובה $y(t)$ מוראית בציוור הבא, עבור שני תנאי התחלה קרובים :

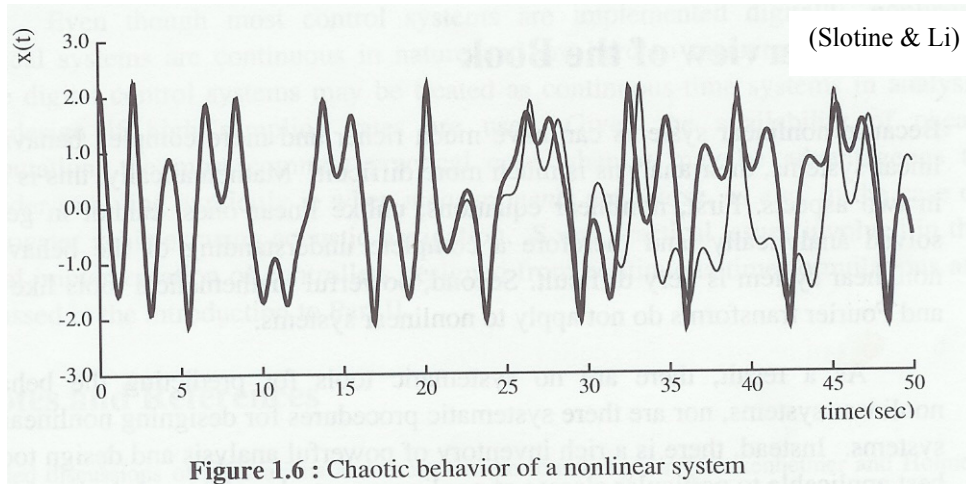


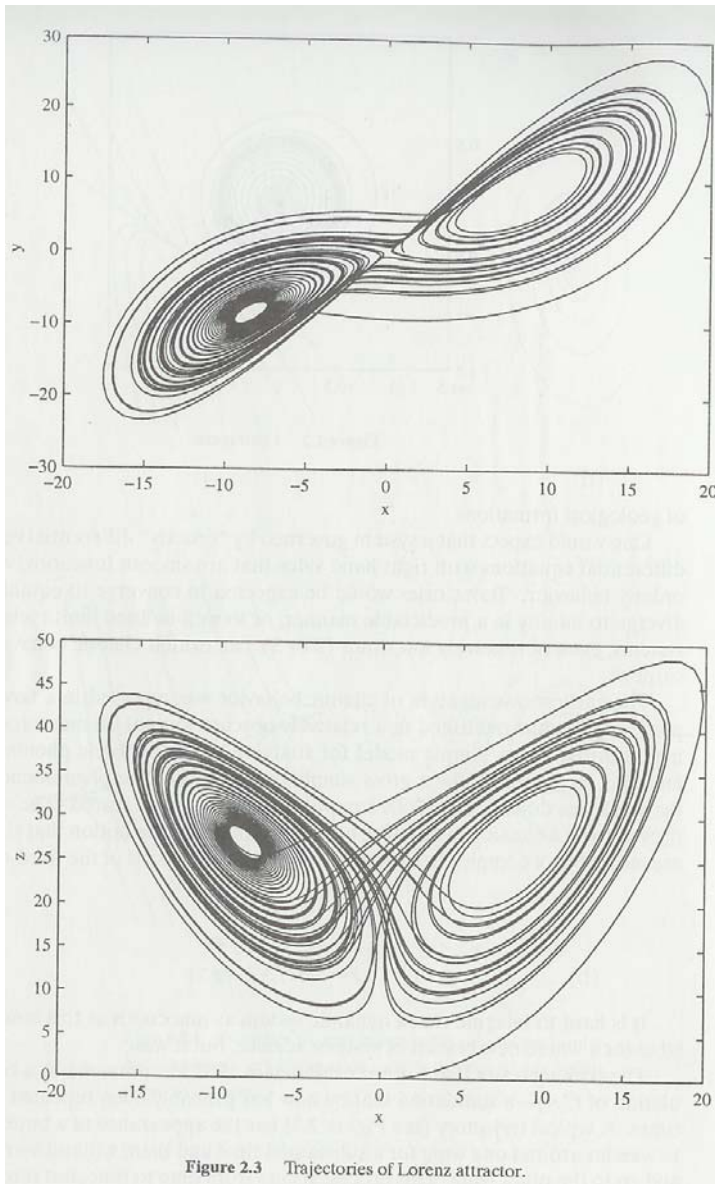
Figure 1.6 : Chaotic behavior of a nonlinear system

זוהי תגובה כאוטית, אשר מאופיינת על ידי :

1. חוסר סדירות – האות המתקבל אינו מחזורי (אף לא בקירוב). יתר על כן, ספקטרום ההספק הינו רציף (כולל רצף של תדרים).
2. רגישות גבוהה לתנאי התחלה ("אפקט הפרפר"): מסלולים בעלי תנאי התחלה קרובים "נפרדים" במהירות, בקצב אקספוננציאלי בזמן.

מסלולים כאוטיים גם הם סוג של "מסלולים גבוליים" של המערכת (בדומה לנש"מ ומחזורי גבול), וניתן לאפיינם במושגים של משיכה ודחייה. מסלול כאוטי שכל המסלולים בסביבתו מתכנסים אליו נקרא "מושך כאוטי" (chaotic attractor). אלה המסלולים הכאוטיים שיופיעו בפועל במערכת פיסיקלית.

דוגמא בעלת חשיבות היסטורית למושך כאוטי הינו ה- Lorenz Attractor. מערכת המצב ומסלולי מושך לורנץ במרחב הפזה מוראים להלן :



$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(-x + y) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned}$$

(B. Friedlander, Advanced Control System Design, 1996)

Figure 2.3 Trajectories of Lorenz attractor.

תופעות כאוטיות מופיעות במגוון תהליכים פיסיקליים, כגון תנודה של מטוטלת בשדה מגנטי, תופעות ערבול במכניקת נוזלים, ותופעות אטמוספריות. האופי הכאוטי של מערכות אקלימיות מסביר, בין השאר, את חוסר האפשרות לחיזוי ארוך-טווח של מזג האוויר.

תופעות כאוטיות מופיעות גם במערכות בזמן בדיד, החל מסדר 1. הדוגמא הידועה ביותר הינו המיפוי הלוגיסטי (logistic map), שהוא גרסה בדידה של מודל להתפתחות אוכלוסיה:

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k)$$

המערכת כאוטית עבור ערכי μ קרובים ל-4.