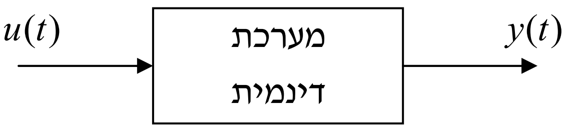
חלק א – מבוא למערכות דינמיות

פרק 1. המודל הבסיסי

1.1. משוואות המערכת

נתבונן במערכת דינמית בזמן רציף, עם אות כניסה $u(t)$ ואות יציאה $y(t)$:



מערכת כזו ניתנת לתיאור על ידי משוואה דיפרנציאלית מהצורה:

$$F(y^{(n)}(t),\ldots,y(t),u^{(m)}(t),\ldots,u(t))=0$$

או על ידי משוואות המצב:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=f(x(t),u(t))\\ y(t)&=h(x(t),u(t))\end{aligned}$$

כאשר $x\in\Re^n$. זוהי מערכת *קבועה בזמן, במימד סופי*.

לשם פשטות נשמיט לעתים את משתנה הזמן, ונכתוב: $\dot{x}=f(x,u)$, וכו׳.

<u>דוגמא</u>: מערכת מתוארת באמצעות המשוואה הדיפרנציאלית

$$y''+y^2=\tan(u)\,.$$

נמצא ייצוג במרחב המצב. נבחר משתני מצב $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$, ונקבל:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1\\ \dot{x}_2\equiv\ddot{y}=-y^2+\tan(u)=-x_1{}^2+\tan(u)\end{cases}$$

מכאן:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1{}^2+\tan(u)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}f_1(x,u)\\ f_2(x,u)\end{bmatrix}=f(x,u)$$

כאשר משוואת היציאה:

$$y=x_1\equiv h(x,u)$$

דוגמא: נתבונן במערכת $\dot{y} + y^2 = \sin(t)$. לכאורה מדובר במערכת משתנה בזמן.
אולם ניתן להציגה כמערכת מצב קבועה בזמן, על ידי הגדרה משתני המצב:
$x_1 = y\ ,\ x_2 = t$. משוואות המצב: $\dot{x}_1 = -x_1^2 + \sin(x_2)\ ,\quad \dot{x}_2 = 1$
עם תנאי התחלה $x_2(0) = 0$

זמן בדיד: המודלים עבור מערכות בזמן בדיד הינם דומים, כאשר משוואת ההפרש מחליפה את המשוואה הדיפרנציאלית. מודל המצב בזמן בדיד הינו:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad ; \quad x(0) = x_0$$

$$y(k) = h(x(k), u(k))$$

בחלקו הראשון של הקורס נעסוק בעיקר במערכות מצב מהצורה: $\dot{x} = f(x)$.

1.2. קיום ויחידות פתרונות

נזכיר בקצרה תוצאות בסיסיות מתורת המשוואות הדיפרנציאליות לגבי קיום ויחידות פתרונות. שאלת הקיום והיחידות במערכת לא-לינארית איננה טריוויאלית כלל ועיקר. למשל:

א. למערכת הבאה: $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, \qquad x(0) = 0$

שני פתרונות שונים: $x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}, \qquad x(t) = 0$.

ב. למערכת הבאה: $\dot{x} = -x^2, \qquad x(0) = -1$

קיים פתרון יחיד, $x(t) = \frac{1}{t-1}$, אולם תחום הקיום של פתרון זה הוא סופי: $0 \le t < 1$.

המשפט הבא מציין תנאי <u>מספיק</u> לקיום ויחידות הפתרון עבור מערכת משוואות מצב עם תנאי התחלה: $\dot{x} = f(x), \quad t > t_0\,; \quad x(t_0) = x_0$.

<u>משפט (קיום ויחידות הפתרון)</u>. נניח כי הפונקציה $f(x)$ הינה *רציפה ליפשיץ* באופן גלובלי, כלומר: קיים $L < \infty$ כך שמתקיים

$$\|f(x) - f(y)\| < L\|x - y\| \quad \text{לכל} \quad x, y \in \Re^n .$$

אזי קיים פתרון יחיד עבור $t \in [t_0, \infty)$.

הפתרון המתקבל הוא <u>רציף</u>, ומתוך השוויון $\dot{x} = f(x)$ הוא גם <u>גזיר</u>.

* **הרחבה למערכת תלויה בזמן**: נדון בקצרה במערכות משתנות בזמן:

$$\dot{x} = f(x,t)\,,\quad t > t_0\,;\quad x(t_0) = x_0$$

התלות בזמן מאפשרת לכלול בדיון גם מערכות עם כניסה ידועה $u(t)$.

על מנת לאפשר כניסות לא רציפות – כניסת מדרגה וכיו"ב – לא נדרוש רציפות מלאה במשתנה t, אלא רק רציפות למקוטעין.

<u>משפט (קיום ויחידות מקומיים)</u>. נניח כי עבור $t \in [t_0, t_1]$, הפונקציה $f(x,t)$ הינה:

1. רציפה-למקוטעין במשתנה t.
2. מקיימת את תנאי רציפות-ליפשיץ הבא (רציפות במצב):

$$\|f(x,t) - f(z,t)\| < L\|x - z\|$$

עבור $L < \infty$ כלשהו, לכל x, z בסביבה של x_0, ולכל $t \in [t_0, t_1]$.

אזי למשוואה $\dot{x} = f(x,t)$ קיים פתרון יחיד בתחום $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ עבור $\delta > 0$ קטן מספיק.

<u>משפט (קיום ויחידות גלובליים)</u>. נניח כי $f(x,t)$:

1. רציפה-למקוטעין במשתנה t.
2. מקיימת את תנאי רציפות-ליפשיץ הבא: $\|f(x,t) - f(y,t)\| < L\|x - y\|$

עבור $L < \infty$ כלשהו, לכל $x, y \in \Re^n$, ולכל $t \in [t_0, t_1]$.

3. חסימות: $\|f(x_0,t)\| < M < \infty\,,\quad t \in [t_0, t_1]$

אזי קיים פתרון יחיד עבור $t \in [t_0, t_1]$.

בשני המקרים הפתרון המתקבל הוא <u>רציף</u>, ומתוך השוויון $\dot{x} = f(x,t)$ הוא גם <u>גזיר למקוטעין</u>. באם f רציפה במשתנה הזמן, אזי הפתרון גזיר בכל נקודה.

1.3. מערכות דינמיות

התנהגותה של מערכת לא לינארית הינה כמובן מורכבת באופן משמעותי מזו של מערכת לינארית. פרט למקרים הפשוטים ביותר, לא ניתן למצוא פתרון מפורש למסלולי המערכת, כך שקיימת חשיבות רבה להבנה איכותית של התנהגות המערכת. תופעות בסיסיות הקיימות רק במערכות לא-לינאריות כוללות את הנקודות הבאות :

א. נקודות שיווי משקל מרובות (שאינן קשורות).

ב. מחזורי גבול : תנודות בעלות אופי יציב.

ג. כאוס : התנהגות מורכבת ובלתי רגולרית במצב המתמיד.

ד. ביפורקציות : שינוי עקרוני בתכונות המערכת כתוצאה משינוי פרמטרים.

לתופעות אילו חשיבות מרובה בהבנת מערכות פיסיקליות והנדסיות. חלקו הראשון של הקורס יכלול מבוא קצר לתופעות אלו, כאשר השתיים האחרונות יזכו לאזכור בלבד.

תחום המערכות הדינמיות מהווה כיום תחום מחקר נרחב ופורה, החותר *להבנה איכותית* של התנהגות מערכות לא לינאריות. ציוני דרך עיקריים בהתפתחות התחום מובאים בטבלה הבאה (מתוך Strogatz) :

Dynamics - A Capsule History

1666	Newton	Invention of calculus, explanation of planetary motion
1700s		Flowering of calculus and classical mechanics
1800s		Analytical studies of planetary motion
1890s	Poincaré	Geometric approach, nightmares of chaos
1920–1950		Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser
1920–1960	Birkhoff Kolmogorov Arnol'd Moser	Complex behavior in Hamiltonian mechanics
1963	Lorenz	Strange attractor in simple model of convection
1970s	Ruelle &Takens	Turbulence and chaos
	May	Chaos in logistic map
	Feigenbaum	Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions
		Experimental studies of chaos
	Winfree	Nonlinear oscillators in biology
	Mandelbrot	Fractals
1980s		Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications