פרק 7. מבוא לבקרה אופטימלית

אנו עוברים עתה לדיון בגישה מתמטית וסדורה יותר לתכן בקרים – תורת הבקרה האופטימלית.

בגישה זו, השלב הראשון הינו הגדרת דרישות הביצועים בעזרת **מדד כמותי** (מספרי) יחיד. השלב השני הוא מציאת הבקר אשר מביא את מדד הביצועים למינימום.

ניתן לראות כי השלב השני הוא מתמטי בעיקרו – לפתרונו ניתן להסתמך על תוצאות אנליטיות שונות, וכן להיעזר אלגוריתמים נומריים לאופטימיזציה. לפיכך, עיקר ה"הנדסה" בתהליך תכן זה טמונה בשלב הראשון – הגדרת קריטריון ביצועים אשר מתאים למערכת המבוקרת, ומבטא היטב את כלל ביצועי הבקרה הנדרשים.

תורת הבקרה האופטימלית הינה נרחבת ועמוקה, ובעלת תחום רחב של יישומים – מתכנון של מסלולי טיסה אופטימליים לכלי טייס, ועד לתכן בקרים למערכות לא לינאריות. פרק זה מציע בראשיתו מבט כללי "ממעוף הציפור" על בעיית הבקרה האופטימלית. בחלקו השני של הפרק נתייחס באופן ספציפי יותר לבעיה של בקרה אופטימלית בזמן בדיד על פני אופק זמן סופי, ופתרונה בגישת "תכנות דינאמי".

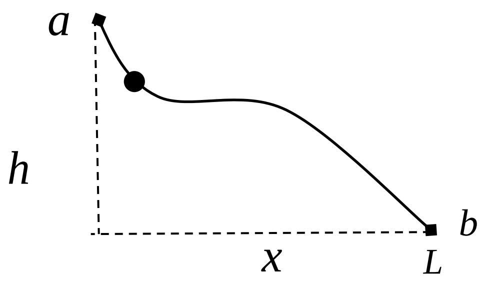
בפרק הבא ניישם את גישת הבקרה האופטימלית לנושא המרכזי של הקורס – בקרה של מערכות לינאריות וקבועות בזמן.

* 7.1. חשבון וריאציות

בעיית הבקרה האופטימלית הינה בעיקרה בעיית אופטימיזציה במרחב פונקציות – מציאת אות בקרה למערכת דינאמית אשר מביא למינימום פונקציית מחיר נתונה, כאשר משתנה המינימיזציה בעצמו (אות הבקרה), הינו פונקציה של הזמן.

ראשית העיסוק בנושא הינה במאה ה-17, עם התפתחות התחום החשוב בפני עצמו של "חשבון וריאציות" (calculus of variations). העניין בנושא החל בעקבות אתגר מתמטי שהציג יוהאן ברנולי ב-1696 ל"מיטב המתמטיקאים":

עבור חרוז אשר מחליק (ללא חיכוך) על גבי חוט קשיח בין שתי נקודות נתונות, מהי צורת העקום שתבטיח הגעה לנקודת היעד בזמן מינימאלי?



בעיה זו ידועה כבעיית ה- brachitoschrone (הזמן הקצר ביותר). בתגובה לאתגר הוצגו פתרונות בדרכים שונות על ידי בכירי המתמטיקאים של התקופה, ביניהם האחים ברנולי, ניוטון, ל'הופיטל, ולייבניץ.

ניתן לנסח את הבעיה באופן מתמטי כלהלן: נתאר את צורת החוט על ידי פונקציית הגובה $h(x)$, כאשר $0 \le x \le L$ הוא המרחק האופקי מנקודת ההתחלה, ונדרש $h(L) = h_b$, $h(0) = 0$. ניתן לראות כי זמן ההגעה לנקודה b (בהשפעת הכבידה, ללא חיכוך) נתון על ידי:

$$T = \int_0^L \frac{\sqrt{1 + h'(x)^2}}{\sqrt{2gh(x)}} dx$$

* הסבר:

$$T = \int_0^S \frac{ds}{v(s)},$$

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = mgh \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gh}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dh^2} = \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx$$

המטרה אם כן למצוא את הפונקציה $h(x)$ שמביאה למינימום את הביטוי האחרון, תחת תנאי הקצה הנתונים.

הפתרון המתקבל הוא עקום הנקרא cycloid. לפרטים ראו

https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve

"הבעיה היסודית של חשבון וריאציות" הינה הבאה:

- מצאו פונקציה ממשית $x = (x(t),\ t \in [t_0, t_1])$ אשר מביאה למינימום את האינטגרל:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \ell(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

בכפוף לתנאי הקצה: $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.

הגישה הבסיסית לפתרון הבעיה היא כלהלן: נניח כי x^* פתרון אופטימלי. נתבונן בוריאציה (סטיה קטנה) הבאה מסביב לפתרון זה: $x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon\tilde{x}(t)$, כאשר $\tilde{x}(t)$ פונקציה כלשהי המקיימת $\tilde{x}(t_0) = 0,\ \tilde{x}(t_1) = 0$ (מדוע?). אזי, לקיום מינימום ב-x^*, נדרש:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(x_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \geq 0$$

וזאת לכל וריאציה $\tilde{x}(t)$ כנ"ל (שעבורה הנגזרות מוגדרות היטב).

התוצאה הבסיסית ביותר בתחום היא משוואת אוילר-לגראנז', המהווה תנאי הכרחי לאופטימליות:

- נניח כי פונקציית המחיר $\ell(x,\dot{x},t)$ חלקה (בעלת נגזרות ראשונות ושניות רציפות בכל משתניה). אזי פתרון אופטימלי $x^*(\cdot)$ לבעיה היסודית מקיים את משוואת אוילר-לגראנז':

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell(x(t),\dot{x}(t),t)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \ell(x(t),\dot{x}(t),t)}{\partial x}$$

וזאת בכל נקודה t שבה הנגזרת השמאלית קיימת.

דוגמא 1 (תנועה בזמן קצוב בין שתי נקודות, תוך מינימיזציה של אינטגרל רבוע המהירות):
נדרש להביא למינימום את פונקציית המחיר

$$J(x) = \int_0^T \dot{x}(t)^2 dt$$

בהינתן תנאי הקצה: $x(0) = 0,\ x(T) = 1$.

פתרון:

$$\ell(x,\dot{x},t) = \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ell}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$

הצבה במשוואת אוילר-לגראנז' נותנת:

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = at + b$$

והצבת תנאי הקצה נותנת $x(t) = t/T$ (תנועה במהירות קבועה).

קיימות כמובן תוצאות נוספות רבות, כמו גם הרחבות שונות של הבעיה היסודית, שלא נתאר פה.

* 7.2. בקרה אופטימלית

בעיית הבקרה האופטימלית הינה הכללה של בעיית חשבון הוריאציות, כאשר $x(t)$ הינו המצב של מערכת מבוקרת. הגרסה הבסיסית הינה כלהלן :

<u>בזמן רציף</u> : נתונה מערכת משוואות המצב :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \quad x(0) = x_0$$

כאשר $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$. יש למצוא אות בקרה u אשר מביא למינימום את קריטריון המחיר :

$$J(u) \triangleq \int_0^T \ell(x(t), u(t), t)dt + L(x(T))$$

$\ell(x,u,t)$ נקראת **פונקציית המחיר הרגעי**, ואילו $L(x)$ הינה **פונקציית המחיר הסופי**.

נציין כי :

א. הבעיה שבה $\ell = 0$ נקראת צורת Mayer, וזו עם $L = 0$, נקראת צורת Lagrange. הצורה הכללית הנ"ל נקראת צורת Bolza.

ב. ניתן להוסיף אילוצים שונים, כגון אילוצים על אות הבקרה : $u(t) \in U(x(t), t)$ או אילוץ על המצב הסופי : $x(T) \in X_f$.

ג. אנו מניחים פה כי זמן הסיום T קבוע ונתון מראש. ניתן גם להתבונן בבעיה של **זמן-סופי חופשי**, שבה T אינו קבוע אלא נקבע כזמן ההגעה למצב או קבוצת מצבים מסוימת.

ד. המקרה של $T = \infty$ יהיה בעל עניין מיוחד עבורנו בפרק הבא.

דוגמאות לבעיות בקרה אופטימלית :

<u>דוגמה 2</u> : ננסח את דוגמה 1 לעיל כבעיית בקרה. נזהה את אות הבקרה עם המהירות, ונקבל

$$\dot{x}(t) = u(t) \ ; \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 1$$

$$J = \int_0^T u(t)^2 dt$$

<u>דוגמה 3</u> : תנועה בין שתי נקודות נייחות (מהירות 0) עם תאוצה מוגבלת.

* נסחו בעייה זו כבעיית בקרה אופטימלית.

<u>דוגמה 4</u>: בקרת LQR בזמן סופי:

$$\min_{u} \int_0^{t_f} \left(x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)\right)dt + x^T(t_f)Q_f x(t_f)$$

$$s.t.$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

<u>בקרה אופטימלית בזמן בדיד</u>: בעיית הבקרה האופטימלית המקבילה בזמן בדיד הינה כלהלן. נתונה מערכת משוואות המצב:

$$x(k+1) = f_k(x(k),u(k)); \quad x(0) = x_0$$

יש למצוא אות בקרה u אשר מביא למינימום את קריטריון המחיר:

$$J(u) \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k(x(k),u(k)) + L(x(N))$$

<u>גישות פתרון</u>: קיימות שתי גישות אנליטיות עיקריות לפתרון בעיית הבקרה האופטימלית:

א. עקרון המקסימום: ניתן לראות בגישה זו הכללה של הגישה של חשבון וריאציות. עקרונית ניתן לראות את משוואות המערכת כאילוץ שיוויון, ולהוסיפן לפונקציונל המחיר באמצעות "כופלי לגרנז'" מתאימים.

עקרון המקסימום הוצג לראשונה בצורה כללית על ידי המתמטיקאי הרוסי L. Pontryagin בשנת 1956.

ב. תכנות דינאמי (Dynamic Programming): פה הגישה היא לבצע רקורסיה אחורית על הפתרון, כאשר חישוב אות הבקרה האופטימלי $u(t)$ בזמן t מסתמך על פתרון תת-הבעיה המתקבלת באינטרוול $[0,T]$. גישת התכנות הדינאמי לבעיית הבקרה מתקשרת בעיקר בשמו של המתמטיקאי האמריקאי ריצ'רד בלמן (Bellman). משוואת התכנות הדינאמי נקראת משוואת בלמן (בזמן בדיד), או משוואת המילטון-ג'קובי-בלמן (זמן רציף).

בזמן רציף, שתי הגישות מובילות למשוואות דיפרנציאליות חלקיות לא-לינאריות, אשר ניתנות לפתרון אנליטי רק במקרים מיוחדים, ובאופן כללי מחייבות פתרון נומרי. בין שתי הגישות קיימים כמובן קשרים מתמטיים הדוקים, אולם הן שונות עקרונית באופיין : עקרון המקסימום נותן תנאי הכרחי בעל אופי מקומי (תנאי נגזרת), בעוד תכנות דינאמי מחשב את האופטימום הגלובאלי, ומבוסס על חישוב תת-המסלול האופטימלי החל מכל מצב-ביניים אפשרי.

<u>הכללות</u> : קיימות הכללות רבות וחשובות לבעיית הבקרה האופטימלית, וביניהן :

א. בקרה אופטימלית סטוכסטית : ההתייחסות למערכות הכוללות רעש או אקראיות בדינאמיקת המערכת.

ב. משוב יציאה : מערכות בהן המצב אינו נמדד באופן מלא, והבקרה מסתמכת על משוב של אות היציאה $y(t)$ בלבד.

7.3. תכנות דינאמי בזמן בדיד

נתבונן שוב בבעיית הבקרה האופטימלית בזמן בדיד:

$$J(u)=\sum_{k=0}^{N-1}\ell_k(x(k),u(k))+L(x(N)) \quad \to \quad \min$$

כאשר

$$x(k+1)=f_k(x(k),u(k)); \quad x(0)=x_0$$

והמינימיזציה היא על פני אות הבקרה $(u(0),\ldots,u(N-1))$.

אלגוריתם התכנות הדינאמי (Dynamic Programming) מבוסס על ההבחנה הבאה:

"עקרון האופטימליות של בלמן": אם המסלול $(x^*(t),u^*(t))_{t=0}^{N}$ הוא פתרון אופטימלי לבעיית הבקרה, אזי תת-המסלול $(x^*(t),u^*(t))_{t=k}^{N}$ הינו פתרון אופטימלי לבעיית הבקרה החלקית באינטרוול $[k,\ldots,N]$, עם מצב התחלתי $x(k)=x^*(k)$.

כדי להפוך עקרון זה לאלגוריתם, נגדיר את **פונקציית הערך האופטימלי** כלהלן:

$$V_k(x)=\min\{\sum_{t=k}^{N-1}\ell(x(t),u(t))+L(x(N))\}$$

כאשר המינימום הוא על כל סדרות הבקרה $(u(k),\ldots,u(N-1))$, בכפוף למשוואות המערכת, ועם תנאי התחלה $x(k)=x$.

קל לראות כי: $V_N(x)=L(x)$.

הפעלה של עקרון האופטימליות רקורסיבית, מזמן $N-1$ ואחורה, נותנת:

$$V_k(x)=\min_{u\in U_k(x)}\{\ell(x,u)+V_{k+1}(f_k(x,u))\}, \quad k=N-1,N-1,\ldots,0$$

משוואה זו קרויה <u>משוואת התכנות הדינאמי</u> (או משוואת בלמן). היא מאפשרת חישוב פונקציות הערך האופטימלי $V_k(x)$ ברקורסיה אחורית, החל מ-$k=N-1$ וכלה ב-$k=0$.

משפט (תכנות דינאמי בזמן בדיד):

יהיו $(V_k(x),\ k=0,1,\dots,N)$ פונקציות המקיימות את משוואת התכנות הדינאמי, עם תנאי הקצה $V_N(x)=L(x)$. אזי:

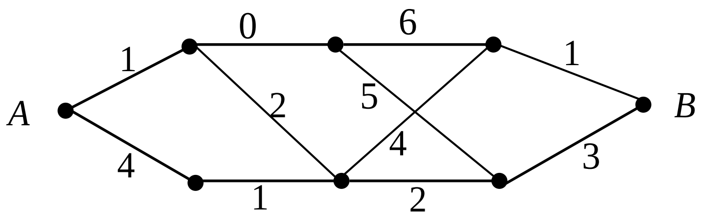
(1) הבקרה האופטימלית $u_k^*(x)$ בזמן k ומצב $x(k)=x$ היא זו המביאה למינימום את צד ימין של משוואת התכנות הדינאמי, כלומר:

$$u_k^*(x)=\arg\min_{u\in U_k(x)}\{\ell(x,u)+V_{k+1}(f_k(x,u))\}$$

(2) הערך האופטימלי של קריטריון הבקרה J הינו $V_0(x_0)$.

<u>**הערה:**</u> הבעיה החישובית העיקרית באלגוריתם התכנות הדינאמי היא הצורך לחשב את פונקציית הערך האופטימלי $V_{k+1}(x)$ <u>לכל</u> מצב x, לפני המעבר לחישוב $V_k(x)$. כאשר מרחב המצב רציף, או סופי אך גדול, חישוב זה הינו קשה ומהווה את "צוואר הבקבוק" ביישום השיטה.

<u>**דוגמא**</u> (מרחב מצב סופי): חשבו את המרחק הקצר ביותר ואת הנתיב המיטבי בין הנקודות A ו- B בגרף הבא:



7.4. בקר LQR לאופק זמן סופי

LQR=Linear Quadratic Regulator

מקרה מיוחד וחשוב של בעיית הבקרה האופטימלית הינו בעיית ה- LQR: תכן בקר אופטימלי <u>למערכת לינארית</u>, עם <u>קריטריון ביצועים ריבועי</u>. הייחוד של בעיה זו הוא שפתרונה מוביל לבקר לינארי. בבעיה זו נדון גם בפרק הבא.

ניישם פה את אלגוריתם התכנות הדינאמי כדי לפתור את בעיית ב-LQR בזמן בדיד, לאופק זמן סופי ($N<\infty$).

<u>א. LQR בזמן בדיד לאופק זמן סופי</u>

הגדרת הבעיה:

- המערכת: $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),\ k\geq 0;\quad x(0)=x_0$

$$x(k)\in\mathbb{R}^n,\quad u(k)\in\mathbb{R}^m$$

- קריטריון הביצועים:

$$J(u)=\sum_{k=0}^{N-1}\Big(x(k)^T Qx(k)+u(k)^T Ru(k)\Big)+x(N)^T P_N x(N)\quad\rightarrow\quad\min$$

כאשר $Q\geq 0, R>0, P_N\geq 0$ הינן מטריצות ריבועיות, חיוביות מוגדרות (או מוגדרות למחצה, כמסומן).

<u>משפט</u>: הבקר האופטימלי נתון על ידי משוב מצב לינארי כלהלן:

$$u^*(k)=-K_k x(k),\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

K_k הינה מטריצת הגבר תלויה בזמן, אשר נתונה על ידי

$$K_k=(R+B^T P_{k+1}B)^{-1}B^T P_{k+1}A$$

כאשר המטריצות (P_k) מחושבות <u>ברקורסיה אחורית</u> עבור $k=N-1,\ldots,0$, לפי המשוואה:

$$P_k=A^T P_{k+1}A+Q-A^T P_{k+1}B(R+B^T P_{k+1}B)^{-1}B^T P_{k+1}A\ .$$

משוואה זו נקראת <u>משוואת ההפרש של ריקאטי</u>.

<u>הערות</u>:

1. הערך האופטימלי של קריטריון המחיר נתון על ידי: $J_{\min} = x_0^T P_0 x_0$.
2. המשפט תקף כלשונו גם כאשר כל המטריצות A, B, Q, R תלויות בזמן k.

כדי להבין ולפתח תוצאה זו, נתחיל במקרה הפשוט של $N=1$, דהיינו:

<u>$N=1$</u>: מצאו את הערך של $u(0)$ אשר מביא למינימום את הקריטריון

$$J = \left(x(0)^T Qx(0) + u(0)^T Ru(0)\right) + x(1)^T P_1 x(1)$$

כאשר $, x(1) = Ax(0) + Bu(0)$

ואילו $Q \geq 0$, $R \geq 0$, $P_1 \geq 0$ מטריצות נתונות, חיוביות מוגדרות למחצה.

<u>פתרון</u>: ניתן בקלות להפוך בעיה זו לבעיית אופטימיזציה ריבועית, על ידי הצבת $x(1)$ בקריטריון המחיר. אולם לצורך ההמשך נזהה בעיה זו כמקרה פרטי של בעיית התכנות הדינאמי, כאשר

$$N=1, \quad f(x,u) = Ax + Bu, \quad \ell(x,u) = x^T Qx + u^T Ru, \quad L(x) = x^T P_1 x$$

לפיכך

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= L(x) = x^T P_1 x \\
V_0(x) &= \min_u \{\ell(x,u) + V_1(Ax + Bu)\} \\
&= \min_u \{x^T Qx + u^T Ru + (Ax+Bu)^T P_1 (Ax+Bu)\} \\
&= \min_u \{x^T (Q + A^T P_1 A)x + 2u^T B^T P_1 Ax + u^T (R + B^T P_1 B)u\}
\end{aligned}$$

על ידי גזירה לפי u והשוואת הנגזרת לאפס נקבל את הפתרון

$$u^*(x) = -(R + B^T P_1 B)^{-1} B^T P_1 A\, x$$

או בקיצור:

$$u^*(x) = -K_0 x, \quad K_0 = (R + B^T P_1 B)^{-1} B^T P_1 A$$

הצבת הבקרה $u^*(x) = -K_0 x$ בנוסחת $V_0(x)$ נותנת

$$V_0(x) = x^T\left(Q + K_0^T R K_0 + (A - BK_0)^T P_1 (A - BK_0)\right)x$$
$$:= x^T P_0 x$$

כאשר

$$P_0 = Q + K_0^T R K_0 + (A - BK_0)^T P_1 (A - BK_0)$$

לאחר הצבת K_0 וסידור איברים, ניתן לבטא את P_0 גם בצורה הבאה :

$$P_0 = A^T P_1 A + Q - A^T P_1 B (R + B^T P_1 B)^{-1} B^T P_1 A$$

לסיכום, קיבלנו כי :

$$u*(0) = -K_0 x(0)$$

$$V_0(x) = x^T P_0 x$$

כאשר P_0, K_0 חושבו לעיל.

<u>$N > 1$</u> : נעבור למקרה הכללי ,

$$J(u) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)\right) + x(N)^T P_N x(N) \quad \to \quad \min$$

כאשר $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad x(0) = x_0$

$$Q \ge 0, \quad R > 0, \quad P_N \ge 0$$

עתה :

$$V_N(x) = x^T P_N x$$

באופן דומה לפיתוח הקודם ניתן לקבל :

$$V_{N-1}(x) = \min_u \{x^T Q x + u^T R u + V_N(Ax + Bu)\} = x^T P_{N-1} x$$

כאשר

$$P_{N-1} = A^T P_N A + Q - A^T P_N B (R + B^T P_N B)^{-1} B^T P_N A$$

והמינימום מתקבל עבור

$$u_{N-1}^*(x) = -K_{N-1} x, \quad K_{N-1} = (R + B^T P_N B)^{-1} B^T P_N A$$

מכיוון שלפונקציה $V_{N-1}(x)$ צורה ריבועית דומה לזו של $V_N(x)$, הרי שניתן להמשיך באינדוקציה ולקבל את הבקר האופטימלי שבמשפט. QED

<u>ב. $N=\infty$</u>: כהקדמה לפרק הבא, נתבונן עתה במקרה של בקר LQR בזמן בדיד עם אופק זמן אינסופי. נראה (עקרונית) כיצד ניתן לקבל את הפתרון למקרה זה מתוך משוואות הבקר לאופק זמן סופי. אנו מניחים פה כי המטריצות A,B,Q,R אינן תלויות בזמן.

כאשר $N\to\infty$, ניתן להראות (תחת תנאים מתאימים) כי קיים הגבול $\lim_{N\to\infty} P_k = P$ לכל k קבוע, כאשר המטריצה P אינה תלויה בזמן k. לפיכך ההגבר K_k המתקבל מתוך $P_k=P$ אינו תלוי בזמן אף הוא, והבקרה האופטימלית הינה <u>משוב מצב קבוע בזמן</u>: $u_k^* = -Kx_k$.

נשאר לחשב את מטריצת הגבול P. מטריצה זו תתקבל מתוך פתרון משוואת ריקאטי עם $P_{k+1}=P_k\equiv P$ (משוואת ריקאטי האלגברית).

<u>ג. זמן רציף</u>: בזמן רציף, בעיית ה-LQR על גבי אופק זמן סופי הינה:

$$J(u) \triangleq \int_0^T \Big(x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \Big) dt + x(T)^T P_T x(T) \quad \to \quad \min$$

כאשר

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0)=x_0$$
$$Q\ge 0, \quad R>0, \quad P_T \ge 0$$

קיימות מספר דרכים לפתור בעיה זו: אחת מהן היא על ידי דיסקרטיזציה של הבעיה עם מרווח דגימה $\varepsilon\to 0$, ושימוש בתוצאות שקיבלנו בזמן הבדיד. בכל מקרה, התוצאה המתקבלת הינה:

$$u^*(t) = -K(t)x(t), \qquad K(t) = R^{-1}B^T P(t) A$$

כאשר $P(t)$ מתקבלת מתוך משוואת ריקאטי הדיפרנציאלית:

$$-\tfrac{d}{dt}P(t) = A^T P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t)$$

עם תנאי הקצה $P(T)=P_T$.

גם פה הפתרון עבור $T=\infty$ (בקר LQR הקבוע בזמן לאופק זמן אינסופי) מתקבל עקרונית מהפתרון הנ"ל ע"י הצבה $P(t)\equiv P$ $\frac{d}{dt}P(t)=0,$ ריקאטי. על פתרון זה נפרט בפרק הבא.