פרק 6. תורת היציבות של ליאפונוב

תורת היציבות של ליאפונוב מבוססת על עבודתו של המתמטיקאי הרוסי אלכסנדר ליאפונוב (Lyapunov), אשר התפרסמה לראשונה בשנת 1892. תורה זו, על הרחבותיה השונות, הינה עד היום הכלי המרכזי לניתוח יציבות של מערכות לא-לינאריות.

הרעיון הבסיסי הינו השימוש ב"פונקצית אנרגיה" מוכללת (הנקראת פונקציית ליאפונוב) שהיא פונקציה של מצב המערכת הנוכחי, ואשר ערכה יורד עם הזמן "לאורך מסלולי המערכת".

בפרק זה נביא מבוא קצר לתורת היציבות של ליאפונוב עבור מערכות לא לינאריות. (נושא זה נדון ביתר הרחבה בקורסי בקרה לא-לינארית.) לאחר מכן נתמקד במערכות לינאריות, ונציג קריטריון יציבות אשר מסתמך על "משוואת ליאפונוב האלגברית". קריטריון זה יידרש גם כאשר נדון בהמשך בבקרה אופטימאלית.

6.1. יציבות מערכות לא-לינאריות

בסעיף זה נציג מבוא קצרצר לתורת היציבות של ליאפונוב עבור מערכות לא-לינאריות. תחילה נחזור על החומר שנלמד בבקרה 1 לגבי הגדרת יציבות של נקודות שיווי משקל (נש"מ), ולגבי קריטריון היציבות באמצעות לינאריזציה סביב הנש"מ.

א. הגדרת יציבות נש"מ (חזרה)

נתבונן במערכת מצב לא-לינארית, קבועה בזמן ונטולת כניסה, עם מצב $x(t)\in\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t)=f(x(t)),\quad t\geq 0$$

אנו מניחים כי הפונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות (כלומר: הנגזרות החלקיות לפי רכיבי x קיימות ורציפות), וכי קיים פתרון יחיד למשוואה בתחום $0\leq t<\infty$, עבור כל תנאי התחלה $x(0)$.

נקודת שיווי משקל (נש"מ, equilibrium point) של המערכת היא נקודה $x^*\in\mathbb{R}^n$ במישור המצב המקיימת $f(x^*)=0$. [סימון חליפי לנש"מ: x^{eq} או x_{eq}]

בנש״מ כזו מתקיים כמובן $\dot{x}(t)=f(x^*)=0$, ולכן אם המערכת נמצאת במצב זה היא תישאר שם.
למערכת לא-לינארית עשוי להיות מספר כלשהו של נש״מ (כולל 0 ואינסוף נקודות).

יציבות במובן החלש: נש״מ x^* תקרא יציבה במובן החלש (או: יציבה-ליאפונוב) אם

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \;\; \delta>0 \;:\;\; \|x(0)-x^*\|<\delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)-x^*\|<\varepsilon \quad \forall t>0$$

- הגדרת יציבות זו היא אכן החלשה ביותר: המסלול $x(t)$ נדרש ״להישאר קרוב״ לנש״מ x^*, אך לא בהכרח להתכנס אליה.
- נש״מ שאיננה יציבה לפי הגדרה זו נקראת <u>בלתי-יציבה</u> (unstable).

יציבות אסימפטוטית: נש״מ x^* הינה <u>יציבה אסימפטוטית</u> אם היא יציבה במובן החלש, ובנוסף: קיים מספר $r>0$ (רדיוס התכנסות) כך ש:

$$\|x(0)-x^*\|<r \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x(t)=x^*$$

עבור נש״מ x^* יציבה אסימפטוטית, נגדיר את **תחום המשיכה** Ω של x^* כקבוצת תנאי ההתחלה המבטיחים התכנסות ל- x^*. כלומר:

$$\Omega=\left\{x_0\in\mathbb{R}^n \;:\; x(0)=x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} x(t)=x^*\right\}$$

<u>דוגמה 1</u>: מערכת לינארית יציבת במובן החלש, אך לא אסימפטוטית:
נתבונן באוסצילטור ההרמוני הבסיסי: $\ddot{y}(t)+y(t)=0$. בחירת משתני מצב $x_1=y,\, x_2=\dot{y}$ נותנת:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}x$$

למערכת נש״מ יחידה בראשית, $x^*=0$. הפתרון הזמני:

$$x(t)=e^{At}x(0)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}x(0)$$

המסלולים במרחב המצב הם מעגלים ברדיוס קבוע (הנקבע לפי תנאי ההתחלה).
המסלול אינו מתקרב לראשית, אך גם אינו מתרחק ממנה.

<u>דוגמה 2</u>: נתבונן במערכת המנוונת: $\dot{x}(t)=0$. מהן נקודות שיווי המשקל של המערכת? מה יציבותן?

ב. לינאריזציה ויציבות (חזרה)

נגדיר את מטריצת היעקוביין של המערכת בנש"מ נתונה x^*:

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ,..., & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & ,..., & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x=x^*}$$

יהיו $\lambda_1,...,\lambda_n$ הע"ע של המטריצה A. אזי:

(1) הנש"מ x^* הינה <u>יציבה אסימפטוטית</u> אם $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$ לכל i.

(2) הנש"מ x^* <u>בלתי-יציבה</u> אם $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$ עבור i כלשהו.

גישה זו לניתוח יציבות בעזרת לינאריזציה נקראת גם "השיטה הלא-ישירה של ליאפונוב".

חסרונות השיטה הלא-ישירה:

א. היא אינה מאפשרת להעריך את תחום המשיכה – שהוא כמובן בעל חשיבות מהותית.

ב. ניתוח היציבות של המטריצה A עשוי להיות מסובך – בפרט אם מדובר בניתוח מערכת הכוללת פרמטרים.

ג. השיטה הישירה (הכללית) של ליאפונוב

תהי $V(x)$ פונקציה ממשית בסביבה $S \subset \mathbb{R}^n$ כלשהי של נש״מ x^*. נניח כי $V(x)$ גזירה ברציפות שם.

נגדיר את **פונקציית הנגזרת של** $V(x)$ **לאורך מסלולי המערכת** $\dot{x} = f(x)$, שתסומן <u>$\dot{V}(x)$</u>, באופן הבא :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) =$$

$$\equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

משמעות פונקציה זו מתבררת באם נחשב את הנגזרת הזמנית של הפונקציה $V\left(x(t)\right)$, כאשר המצב $x(t)$ משתנה לפי משוואת המערכת $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$:

$$\frac{d}{dt} V\left(x(t)\right) = \frac{\partial V}{\partial x}\left(x(t)\right) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\left(x(t)\right) \cdot f\left(x(t)\right)$$

$$= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) \bigg|_{x = x(t)}$$

מכאן, שהנגזרת הזמנית במצב $x(t) = x_0$ כלשהו שווה ל- $\dot{V}(x_0)$.

נדגיש עם זאת ש- $\dot{V}$ הינה פונקציה של המצב x, ולא של הזמן t.

<u>דוגמה 3 :</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}, \qquad V(x) = \tfrac{1}{2} x_1^2 + x_2^2, \qquad \dot{V}(x) = ?$$

המשפט היסודי של תורת ליאפונוב הינו הבא.

<u>משפט (יציבות חלשה ויציבות אסימפטוטית)</u>

תהי $V(x)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבה פתוחה D של נש"מ x^*, ואשר מקיימת שם את התכונות הבאות:

(1) $V(x^*)=0$, $V(x)>0$ עבור $x\neq x^*$ [V "חיובית מוגדרת"]

(2) $\dot{V}(x)<0$ עבור $x\neq x^*$ [$\dot{V}$ "שלילית מוגדרת"]

אזי הנש"מ x^* הינה <u>יציבה אסימפטוטית</u>.

אם במקום (2) מתקיימת התכונה החלשה יותר

(2') $\dot{V}(x)\leq 0$ עבור $x\neq x^*$ [$\dot{V}$ "שלילית חצי-מוגדרת"]

אזי הנש"מ x^* יציבה במובן החלש.

לא נוכיח משפט זה פה. הוכחה מלאה ותוצאות נוספות ניתן למצוא למשל בספר [H. Khalil, Nonlinear Systems].

ניתן להבין את התוצאה העיקרית באופן הבא: הפונקציה $V(x(t))$ הינה בעלת ערך חיובי, ונגזרתה לפי t שלילית. לפיכך היא תתכנס לערכה המינימלי, 0, אשר מתקבל בנקודה $x=x^*$. הסבר גיאומטרי נוסף בהמשך.

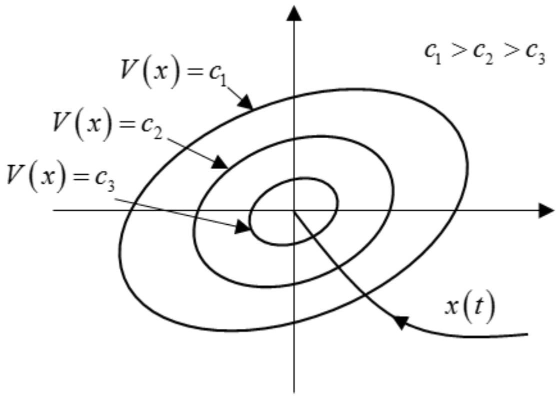
<u>הערות</u>:

1. פונקציה $V(x)$ המקיימת את תכונות המשפט נקראת <u>פונקציית ליאפונוב</u> (או פונקציית ליאפונוב חלשה, בהתאמה) עבור המערכת הנדונה.
2. ניתן להראות כי לנש"מ יציבה אסימפטוטית תמיד קיימת פונקצית ליאפונוב. כלומר: התנאי הוא מספיק והכרחי כאחת!
3. הקושי העיקרי ביישום שיטת ליאפונוב הינו <u>מציאת</u> פונקציית ליאפונוב מתאימה. לעתים ניתן להיעזר בהבנה הפיסיקלית של המערכת למציאת פונקציה כזו (למשל: פונקציית אנרגיה במערכת סגורה).
4. מועמדת ראשונה לפונקציית ליאפונוב הינה הפונקציה הריבועית: $V(x)=\|x\|^2$ או $V(x)=x^T Px$ עבור $P>0$. אולם לרוב נדרשת פונקציה מורכבת יותר המותאמת לדינמיקת המערכת.

<u>הסבר גיאומטרי למשפט</u>: נתבונן בקווי הגובה של הפונקציה $V(x)$:

$$L_c = \{x : V(x) = c\}$$

נניח $x^* = 0$. עבור $c > 0$ בעל ערך קטן, נקבל בקרבת הראשית את התמונה העקרונית הבאה:



מרציפות נובע כי קווי הגובה סגורים עבור c מספיק קטן. כמו כן עבור $c \to 0$ הם מתכנסים לראשית. מכאן נוכל להבין את טענות המשפט:

1. אם $\dot{V}(x) \le 0$ נובע כי $\frac{d}{dt}V(x(t)) \le 0$. לפיכך אם $x(0)$ נמצא בתוך קו גובה סגור L_c, אז $x(t)$ לא יוכל לצאת ממנו. מכן נובעת הטענה לגבי יציבות חלשה.
2. אם $\dot{V}(x) < 0$ עבור $x \neq 0$, נקבל כי $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$ כל עוד $V(x(t)) > 0$, כלומר "יורדים" בקווי הגובה לקראת הראשית. נשאר להראות כי $V(x(t)) \to 0$, ומכאן יתקבל $x(t) \to 0$.

<u>דוגמה 4</u>:

א. חיקרו את יציבות המערכת הסקלרית $\dot{x} = f(x) = -x^3$ סביב הנש"מ בראשית.

ב. חיקרו את יציבות הנש"מ בראשית של המערכת הבאה (אוסצילטור הרמוני עם איבר לא-לינארי):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3 \end{cases}$$

(*) תחום המשיכה של נש"מ

- נזכור כי תחום המשיכה של נש"מ x^* הוא אוסף המצבים ההתחלתיים כך שמסלול $x(t)$ המתחיל בהם מתכנס ל- x^*.
- כללית קשה למצוא את תחום המשיכה כולו, אולם שיטת ליאפונוב מאפשרת לנו למצוא חלק ממנו. כיצד?

- השערה ראשונה, שאינה נכונה: לנש״מ יציבה אסימפטוטית, הקבוצה D ממשפט היציבות כלולה כולה בתחום היציבות.
- משפט: תהי $V(x)$ פונקציית ליאפונוב בתחום D עבור נש״מ x^*. לכל $d>0$, אם הקבוצה $\Omega_d=\{x:V(x)\le d\}$ חסומה וכלולה ב- D, אזי Ω_d כלולה בתחום המשיכה של x^*.

יציבות גלובלית:

- תהי $V(x)$ פונקציית ליאפונוב עבור נש״מ x^*, אשר מקיימת את תנאי היציבות על פני המרחב כולו ($D=\mathbb{R}^n$), ובנוסף $\lim_{\|x\|\to\infty}V(x)=\infty$ (״פונקציה לא-חסומה רדיאלית״). אזי הנש״מ יציבה אסימפטוטית גלובלית, כלומר תחום המשיכה הוא המרחב כולו. [שאלה: כמה נש״מ כאלו יכולות להיות במערכת נתונה?]

<u>דוגמה 5</u>: נתונה המערכת:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2^2\\ \dot{x}_2=-x_2+x_1^2\end{cases}$$

חיקרו את יציבות הנש״מ בראשית, ואת תחום המשיכה שלה. היעזרו בפונקציית ליאפונוב ריבועית.

6.2. משוואת ליאפונוב ויציבות מערכות לק"ב

נתבונן במערכת המצב הלינארית הבסיסית ביותר (נטולת כניסה):

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

כזכור:

- המערכת נקראת <u>יציבה אסימפטוטית</u> אם $x(t) \to 0$ כאשר $t \to \infty$, וזאת לכל תנאי התחלה $x(0)$.
- המערכת יציבה אסימפטוטית *אם ורק אם* $\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0$ לכל ע"ע λ_i של A.

בסעיף זה נתאר קריטריון יציבות אלגברי שהוא שקול לתנאי האחרון. הטיפול פה יהיה אלגברי מעיקרו, וכפי שנראה קיים קשר הדוק בין תנאי זה לפונקציית ליאפונוב מתורת היציבות הכללית.

נזכיר ראשית את המושגים הנדרשים של תבנית ריבועית, ומטריצה חיובית מוגדרת. נציין כי אנו מתמקדים במטריצות ממשיות בלבד.

<u>תבנית ריבועית</u>: תהי $P = \left[p_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n}$ מטריצה ריבועית ממשית. המטריצה P מגדירה תבנית ריבועית בוקטור המשתנים $x = \left(x_1,\dots,x_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = x^T Px = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} x_i x_j$$

למשל: $f(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2$ ...

כל תבנית ריבועית ניתן להגדיר באמצעות מטריצה <u>סימטרית</u>: $P = P^T$. אם P אינה סימטרית, ניתן להחליפה במטריצה הסימטרית $\tilde{P} = \frac{1}{2}(P + P^T)$ אשר נותנת תבנית ריבועית בעלת ערך זהה.

<u>הגדרה:</u> מטריצה P תקרא <u>חיובית מוגדרת</u> (ונסמן $P > 0$) אם היא סימטרית, ומתקיים

$$x^T Px>0 \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 .$$

הערה : עבור וקטור משתנים מרוכבים $x \in \mathbb{C}^n$, התבנית הריבועית מוגדרת ע"י x^*Px . ניתן לראות בקלות כי $P > 0$ גורר גם $x^*Px > 0$ לכל $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$.

תזכורת (מאלגברה לינארית) : עבור מטריצה סימטרית P , התנאים הבאים הינם שקולים :

1. P חיובית מוגדרת : $P > 0$.
2. כל הערכים העצמיים הינם חיוביים : $i = 1,\dots,n \quad , \quad \lambda_i(P) > 0$.
   (נזכיר כי למטריצה סימטרית הע"ע תמיד ממשיים).
3. כל המינורים הראשיים של P הינם חיוביים : $m = 1,\dots,n \quad , \quad \det(P_{1:m,1:m}) > 0$

נחזור לדיון במערכת הלינארית $\dot{x}(t) = Ax(t)$, שהיא בעלת נש"מ $x^* = 0$. ננסה למצוא פונקצית ליאפונוב ריבועית מהצורה $V(x) = x^T Px$. כדי לקיים את תכונה (1) נדרש $P > 0$. לבדיקת תכונה (2) נחשב את $\dot{V}$. ניתן לחשב לפי ההגדרה (תרגיל), או בעזרת הנגזרת הזמנית :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} V(x(t)) &= \tfrac{d}{dt} x(t)^T Px(t) = x(t)^T A^T Px(t) + x(t)^T PAx(t) \\ &= x(t)^T (A^T P + PA) x(t) \end{aligned}$$

ומכאן,

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA) x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

נסמן $A^T P + PA = -Q$. אם מתקיים כי $A^T P + PA < 0$ (כלומר $Q > 0$), אזי נקבל כי

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0 \quad \forall x \neq 0$$

לפיכך $V(x)$ הינה פונקציית ליאפונוב, והראשית $x = 0$ יציבה אסימפטוטית.

המשוואה המטריצית באה, אשר קושרת בין זוג מטריצות Q ו- P , נקראת משוואת ליאפונוב (ביתר פירוט : משוואת ליאפונוב האלגברית לזמן רציף) :

$$A^T P + PA = -Q \qquad *$$

עבור מטריצות A ו- Q נתונות, זוהי משוואה לינארית באיברי המטריצה P .

ראינו זה עתה כי אם קיימות מטריצות חיוביות מוגדרות $Q>0$, $P>0$ אשר מקיימות את משוואת ליאפונוב, אזי המערכת $\dot{x}=Ax$ יציבה אסימפטוטית. המשפט הבא מחזק אבחנה זו :

<u>משפט:</u> (יציבות לפי משוואת ליאפונוב)

תהי A מטריצה ריבועית כלשהי.

תהי $Q>0$ מטריצה חיובית-מוגדרת כלשהי. אזי התנאים הבאים שקולים :

(1) A מטריצה יציבה-הורביץ , כלומר $\operatorname{Re}(\lambda_i(A))<0$ לכל $i=1,\ldots,n$.

(2) למשוואת ליאפונוב (*) קיים פתרון P שהוא חיובי מוגדר : $P>0$.

יתר על כן : אם A יציבה-הורביץ, אזי ל-(*) פיתרון יחיד.

<u>הוכחה</u> :

<u>א</u>. (2) $\Leftarrow$ (1) : יהיו $Q>0$, $P>0$ מטריצות חיוביות-מוגדרות המקיימות את משוואה (*). נראה כי A יציבה-הורביץ. (כפי שכבר ראינו טענה זו נובעת ממשפט ליאפונוב הכללי, אולם פה נביא הוכחה אלגברית ישירה.)

יהי λ_i ע"ע של A , עם וקטור עצמי v_i. נדרש להראות כי $\operatorname{Re}(\lambda_i)<0$.

הכפלת (*) ב- v_i מימין וב- v_i^* (הצמוד ההרמיטי) משמאל נותנת :

$$v_i^*(A^TP+PA)v_i=-v_i^*Qv_i$$

נשים לב כי $Av_i=\lambda_i v_i$, ולכן $v_i^*A^T=(Av_i)^*=\lambda_i^*v_i^*$. מכאן,

$$v_i^*(A^TP+PA)v_i=\lambda_i^*v_i^*Pv_i+\lambda_i v_i^*Pv_i=2\operatorname{Re}(\lambda_i)v_i^*Pv_i$$

קיבלנו כי

$$2\operatorname{Re}(\lambda_i)v_i^*Pv_i=-v_i^*Qv_i$$

אולם $v_i\neq 0$ (מהגדרת וקטור עצמי), וכן $Q>0$, $P>0$, ולכן $q_i\triangleq v_i^*Qv_i>0$, $p_i\triangleq v_i^*Pv_i>0$. לפיכך

$$\operatorname{Re}(\lambda_i)=\frac{-(v_i^*Qv_i)}{2(v_i^*Pv_i)}<0\,.$$

<u>ב</u>. (1) $\Leftarrow$ (2) : נניח כי A יציבה-הורביץ, $Q>0$. עלינו להראות כי קיימת $P>0$ שמקיימת את משוואה (*). לצורך זה נגדיר מטריצה P באופן הבא :

$$P \triangleq \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

(האינטגרל מוגדר איבר-איבר כמובן), ונראה כי מטריצה זו מקיימת את כל התכונות הנדרשות.

(1) האינטגרל מתכנס וסופי : כזכור איברי e^{At} (ובדומה איברי $e^{A^T t}$) כוללים סכום של אקספוננטים מהצורה $e^{\lambda_i(A)t}$, שהם דועכים אקספוננציאלית אם A יציבה-הורביץ. לכן כל איבר של האינטגרל מתכנס וסופי.

(2) $P>0$: סימטריה נובעת כיוון שהאינטגרנד סימטרי. נראה כי $v^T P v > 0$ לכל $v \neq 0$:

$$v^T P v = \int_0^\infty (v^T e^{A^T t}) Q (e^{At} v) dt \triangleq \int_0^\infty w(t)^T Q w(t) dt$$

כאשר $w(t) \triangleq e^{At} v$. אולם e^{At} אינה סינגולרית (היא בעלת הפכי e^{-At}), ולכן $w(t) \neq 0$ לכל t.

כיוון ש- $Q>0$ נקבל $w(t)^T Q w(t) > 0$, כלומר האינטגרנד חיובי ממש, ולכן האינטגרל חיובי ממש.

(3) נראה לבסוף כי $A^T P + PA = -Q$. נשים לב ראשית לזהות :

$$-Q = 0 - Q = e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_0^\infty = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^T t} Q e^{At}\right) dt$$

מצד שני, אם נבצע את הגזירה ונזכור כי $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$, נקבל :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^T t} Q e^{At}\right) dt &= A^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt\right) + \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt\right) A \\ &= A^T P + PA\end{aligned}$$

(מהגדרת P). השוואת שני הביטויים האחרונים נותנת את השוויון הדרוש.

את החלק האחרון של הטענה (יחידות הפתרון) לא נוכיח פה.

מ.ש.ל.

הערות למשפט:

1. מהמשפט האחרון נובע מיידית כי: המטריצה A יציבה-הורביץ אם ורק אם קיימת מטריצה $P>0$ כך ש: $A^T P + PA < 0$. אך ניסוח זה פחות נוח לשימוש.

2. חשיבותו של קריטריון היציבות בעזרת משוואת ליאפונוב הינה בעיקר לצרכים תיאורטיים. אך נציין כי הוא מאפשר גם בדיקת יציבות תוך מספר סופי של פעולות (בדומה לקריטריון Routh-Hurwitz), ללא צורך בחישוב הערכים העצמיים:

א. נבחר $Q>0$ כלשהו (למשל $Q=I$).

ב. נמצא פתרון סימטרי P למשוואת ליאפונוב (מערכת משוואות לינאריות בעלת $n(n+1)/2$ משתנים).

ג. נבדוק אם $P>0$ (למשל ע"י חישוב המינורים הראשיים).

דוגמאות:

א. $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$.

הפולינום האופייני הוא $a(s)=s^2+12s+32$, וברור כי A יציבה-הורביץ.

נפתור את משוואת ליאפונוב עבור $Q=I$:

$A^T P+PA=-I$

$$\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(כיוון שאנו מחפשים פתרון סימטרי, הצבנו כבר $P_{12}=P_{21}\triangleq p_3$). מכאן נקבל שלוש משוואות לינאריות שפתרונן: $p_3=\frac{1}{16}$, $p_2=\frac{1}{16}$, $p_1=\frac{5}{16}$, כלומר:

$$P=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

קל לבדוק כי $P>0$, ומכאן נובע כי A יציבה-הורביץ.

ב. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

ברור כי מטריצה זו אינה יציבה-הורביץ. משוואת ליאפונוב עבור $Q=2I$ הינה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2p_1 & -p_3 \\ -p_3 & -4p_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

הפתרון הינו:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצה זו אינה חיובית-מוגדרת, ומכאן כי A אינה יציבה-הורביץ.

ג. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

גם מטריצה זו אינה יציבה-הורביץ. משוואת ליאפונוב עם $Q = 2I$ הינה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2p_1 & 0 \\ 0 & -2p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & p_3 \\ p_3 & 1 \end{bmatrix}$$

במקרה זה קיימים פתרונות מרובים (p_3 יכול לקבל ערך כלשהו), וכמובן אף אחד מהם אינו חיובי-מוגדר.

6.3. זמן בדיד

שיטת ליאפונוב ישימה גם למערכות בזמן בדיד. נציין פה בקצרה את השינויים הדרושים לעומת הזמן הרציף.

- מערכת לא-לינארית בזמן בדיד: $x(k+1) = f(x(k))$.
- הגדרת נש"מ: $x^* = f(x^*)$.
- תכונות נדרשות עבור פונקצית ליאפונוב:

  (1) $V(x) > 0$ עבור $x \neq x^*$.

  (2) $\Delta V(x) \triangleq V(f(x)) - V(x) < 0$ עבור $x \neq x^*$.

עבור המערכת הלינארית $x(k+1) = Ax(k)$:

- יציבות אסימפטוטית מתקבלת כמובן כאשר $|\lambda_i(A)| < 1$
- משוואת ליאפונוב לזמן הבדיד הינה $A^T PA - P = -Q$, כאשר $P > 0$, $Q > 0$.