פרק 2. משוב מצב והצבת קטבים

בפרק זה נתאר את שיטת הבקרה הבסיסית ביותר במרחב המצב – שימוש במשוב מצב מלא, לצורך הצבת קוטבי המערכת במיקום רצוי.
כפי שנראה, השימוש בוקטור המצב כולו לצורך המשוב מאפשר הצבת כל קטבי החוג הסגור במיקום רצוי. זאת בניגוד למשוב יציאה (בו התמקדנו בבקרה 1), אשר מאפשר שליטה מוגבלת בלבד על מיקום הקטבים.

2.1 משוב מצב

נתבונן במערכת המצב הבאה, בזמן רציף:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

הערות:

- אנו מניחים לשם פשטות כי $D=0$.
- נציין כי למשוואת היציאה חשיבות משנית בלבד בדיון הנוכחי.
- לשם נוחות אנו מתמקדים במערכת בזמן רציף, אולם האמור נכון גם לזמן הבדיד.

כזכור, פונקציית התמסורת של המערכת הינה: $H(s)=C(sI-A)^{-1}B$.

בפרט, קטבי המערכת (לפני צמצום) הינם הערכים העצמיים של A, דהיינו פתרונות המשוואה האופיינית:

$$a(s)\triangleq\det(sI-A)=0$$

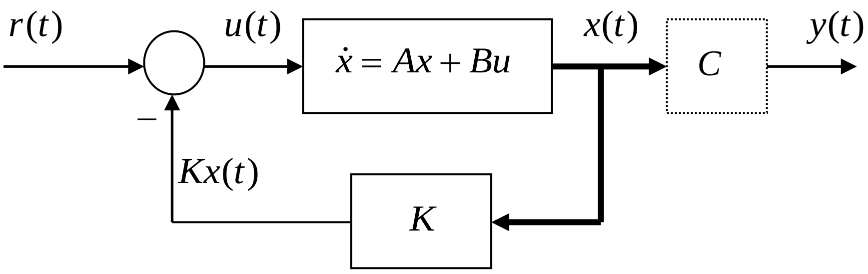
<u>משוב מצב</u> עבור מערכת זו מוגדר כלהלן:

$$u(t)=r(t)-Kx(t)$$

כאשר $K=[k_1,k_2,\ldots,k_n]$ הינו וקטור הגברים מתאים, ואילו $r(t)$ הינה כניסת ייחוס.
בכתיבה סקלרית נקבל:

$$\begin{aligned}u(t) &= r(t)-\sum\nolimits_{i=1}^{n}k_i x_i(t)\\ &= r(t)-(k_1x_1(t)+k_2x_2(t)\ldots+k_nx_n(t))\end{aligned}$$

הסכמה הבאה מתארת את מבנה המערכת המתקבלת עם משוב המצב :



ננסה לתאר את המערכת שהתקבלה באמצעות משוואות מצב מתאימות. על ידי הצבת הכניסה u במשוואות המערכת המקורית נקבל :

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(r - Kx)$$
$$= (A - BK)x + Br$$

משוואת היציאה היא ללא שינוי : $y = Cx$

ניתן לראות כי קיבלנו מערכת משוואות מצב, כאשר :

- הכניסה u מוחלפת בכניסת הייחוס r
- מטריצת המערכת A מוחלפת במטריצה $A_K = A - BK$.
- כל השאר ללא שינוי

נשים לב כי B הוא וקטור עמודה, ואילו K וקטור שורה. איברי המטריצה A_K ניתנים במפורש כלהלן :

$$[A_K]_{ij} = [A - BK]_{ij} = a_{ij} - B_i k_j$$

למערכת המצב שהתקבלה יש קטבים חדשים, שהם הערכים העצמיים של המטריצה $A - BK$. נראה עתה כי ניתן (בתנאי מתאים) לבחור את מיקום כל הערכים העצמיים האלה כרצוננו, על ידי בחירה מתאימה של וקטור ההגברים K.

2.2 הצבת קטבים

נניח כי אנו מעוניינים כי קטבי המערכת בחוג סגור יתקבלו בנקודות נתונות $\{p_i^c, i=1,\ldots,n\}$ במישור המרוכב (כאשר כל קוטב מרוכב מופיע כמובן עם הצמוד הקומפלקסי שלו). המשפט הבא מראה כי ניתן לקבל זאת עבור משוב מצב מתאים, בתנאי שהמערכת המבוקרת הינה קונטרולבילית.

משפט

תהי $S=(A,B,C)$ מערכת קונטרולבילית מסדר n.

יהי $\alpha(s)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_n$ פולינום כלשהו מסדר n, בעל מקדמים ממשיים.

אזי ניתן למצוא וקטור הגברים (ממשיים) $K=[k_1,\ldots,k_n]$ כך שמתקיים

$$\det(sI-(A-BK))=\alpha(s)$$

משמעות המשפט: קטבי החוג הסגור (שהם הע"ע של $A_K \triangleq A-BK$) יתקבלו בנקודות שהן שרשי הפולינום $\alpha(s)$.

לפיכך, בהינתן הקטבים הרצויים $\{p_i^c, i=1,\ldots,n\}$, נוכל לחשב את הפולינום המתאים

$$\alpha(s)=\prod_{i=1}^n (s-p_i^c)$$

ולחשב את ההגבר K המתאים לו (לפי נוסחה שנפתח בהמשך). גישה זו לתכן מערכת משוב נקראת הצבת קטבים (pole placement).

הוכחת המשפט: נניח ראשית כי מערכת המצב הינה בצורה קנונית של קונטרולר: $S=(A_c,B_c,C_c)$. אזי:

$$A_K \equiv A_c-B_cK=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}[k_1,\ldots,k_n]$$

$$=\begin{bmatrix} -a_1-k_1 & -a_2-k_2 & \ldots & -a_n-k_n \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

קיבלנו כי A_c-B_cK גם היא בצורת קונטרולר, ולכן הפולינום האופייני שלה הוא

$$a_K(s) \triangleq \det(sI-(A_c-B_cK)) = s^n + (a_1+k_1)s^{n-1} + \ldots + (a_n+k_n)$$

על ידי השוואת מקדמים עם הפולינום הרצוי $\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, נראה כי הבחירה הבאה תיתן $a_K(s) = \alpha(s)$, כנדרש :

$$a_i + k_i = \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \underline{k_i = \alpha_i - a_i}$$

בכתיב וקטורי :

$$K_c = \underline{\alpha} - \underline{a}$$

כאשר $\underline{\alpha} = [\alpha_1,\ldots,\alpha_n], \quad \underline{a} = [a_1,\ldots,a_n]$

נתבונן עתה במערכת קונטרולבילית כלשהי $S=(A,B,C)$, בעלת פולינום אופייני $a(s) \triangleq \det(sI-A)$. כזכור, מערכת זו שקולה למערכת בצורת קונטרולר, דהיינו

$$x_c = T^{-1}x, \quad A_c = T^{-1}AT, \quad B_c = T^{-1}B$$

כאשר

$$T = \mathcal{C}\mathcal{C}_c^{-1} = \mathcal{C}\mathbf{a}$$

$$\mathcal{C} = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ידוע לנו כי עבור הבחירה $K_c = \underline{\alpha} - \underline{a}$, הפולינום האופייני של המטריצה $(A_c - B_cK_c)$ יהיה $\alpha(s)$ כנדרש. אולם :

$$A - BK = TA_cT^{-1} - TB_cK = T(A_c - B_cKT)T^{-1}$$

לפיכך, אם נבחר K שמקיים $KT = K_c$, כלומר $K = K_cT^{-1}$, נקבל כי למטריצה $A-BK$ פולינום אופייני $\alpha(s)$, כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>נוסחת ההגבר</u> (Bass-Gura) : מהוכחת המשפט, נובע כי וקטור ההגבר הנדרש לקבלת פולינום אופייני $\alpha(s)$ בחוג הסגור נתון על ידי

$$K = K_c T^{-1} = (\underline{\alpha} - \underline{a})T^{-1} = (\underline{\alpha} - \underline{a})(\mathcal{C}\mathcal{a})^{-1}$$
$$= \underline{(\underline{\alpha} - \underline{a})\mathcal{a}^{-1}\mathcal{C}^{-1}}$$

נוסחה זו נקראת נוסחת Bass-Gura.

<u>נוסחת Ackerman</u> : זוהי נוסחה חליפית לוקטור ההגבר (שנותנת כמובן אותה תוצאה). נביא אותה לשם השלמות, ללא הוכחה :

$$K = q_n \alpha(A)$$

כאשר $q_n = [0,\ldots,0,1]\mathcal{C}^{-1} \equiv \text{last row of } \mathcal{C}^{-1}$, $\alpha(A) \triangleq \alpha(s)\big|_{s=A}$.

<u>הערה</u> : למערכת מסדר נמוך (בפרט 2), ניתן למצוא את ההגבר הדרוש ישירות על ידי חישוב הדטרמיננט והשוואת מקדמים במשוואה $\det(sI - A + BK) = \alpha(s)$.

<u>פונקציית התמסורת של החוג הסגור</u> :

כזכור, עם הפעלת משוב המצב קיבלנו את המערכת הבאה בחוג סגור :

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$
$$y = Cx$$

מהי פונקציית התמסורת של מערכת זו?

נסמן :

$$H_K(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq \frac{b_K(s)}{a_K(s)}$$

כפי שראינו קטבי המערכת (פולינום המכנה) תלויים בהגבר K, וניתן למקמם כרצוננו. מה לגבי האפסים?

<u>טענה</u> : $\underline{b_K(s) = b(s)}$, כאשר $b(s)$ פולינום המונה של המערכת המקורית.

כלומר : משוב מצב אינו משנה את אפסי המערכת.

<u>הוכחה</u>: כאשר המערכת בצורת קונטרולר: $S=(A_c,B_c,C_c)$, כפי שראינו גם החוג הסגור $S_K=(A_c-KB_c,B_c,C_c)$ בצורת קונטרולר, ופולינום המונה נקבע לפי איברי $C_c=[b_1,\ldots,b_n]$, אשר אינם מושפעים מההגבר K.

למערכת קונטרולבילית כלשהי: כזכור התמרת שקילות אינה משנה את תמסורת המערכת (ובפרט את פולינום המונה), ולכן המסקנה לגבי מערכת בצורת קונטרולר תקפה לכל מערכת קונורולבילית. מ.ש.ל.

נסכם את ממצאינו עד כה:

בהינתן מערכת מצב $\dot{x}=Ax+Bu,\ \ y=Cx$, בעלת פונקציית תמסורת $H(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)}$,

1. נקבע מיקום רצוי לקטבי המערכת, ומתוכם את הפולינום האופייני הרצוי $\alpha(s)$.
2. בהנחה כי המערכת קונטרולבילית, ניתן לחשב (בעזרת נוסחת בס-גורה, נוסחת אקרמן, או השוואת מקדמים) וקטור הגברים K ומשוב מצב $x(t)=r(t)-Kx(t)$, כך שלמערכת המתקבלת תהיה בעלת הקטבים הנדרשים.
3. תמסורת המערכת המתקבלת (בין כניסת הייחוס r ליציאה y) הינה $H_K(s)=b(s)/\alpha(s)$. כלומר: האפסים ללא שינוי.

אנו רואים שמשוב המצב שולט רק על מכנה פונקצית התמסורת, אך לא על המונה. כיוון שכך, הוא עשוי שלא לספק פתרון מושלם לבעיית הבקרה. שימושים נפוצים למשוב מצב הינם:

א. כחוג משוב פנימי, כחלק ממערכת בקרה שלמה (למשל: ייצוב מערכת-מבוקרת לא יציבה, לפני סגירת חוג משוב חיצוני).

ב. לבעית הרגולטור – ייצוב היציאה או המצב סביב ערך רצוי.

ג. לבעית העקיבה – לאחר התאמות מסוימות.

בהמשך נפרט לגבי שני היישומים האחרונים.

נציין כי למשוב המצב, כפי שתואר עד כה, קיים חיסרון מעשי והוא <u>הצורך למדוד את כל משתני המצב</u> לצורך חישוב אות המשוב. דבר זה עשוי להיות קשה או יקר לביצוע. בהמשך הקורס נראה כיצד ניתן להתגבר על כך, וזאת על ידי <u>הערכת</u> וקטור המצב מתוך מדידת יציאת המערכת.

2.3 בעיית הרגולציה ומשוב מצב

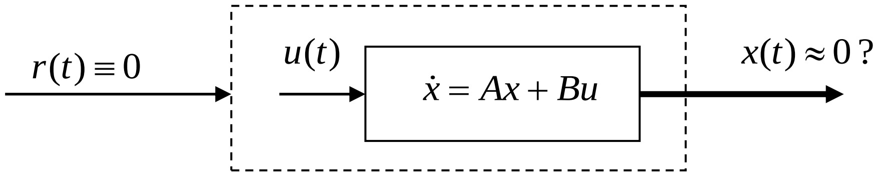
בעיית הרגולציה הינה סוג מסוים (ונפוץ) של בעיית הבקרה – מטרתה לייצב את ערך היציאה (או וקטור המצב כולו) סביב ערך רצוי, שהוא נקודת שיווי משקל של המערכת.

ניסוח בסיסי של בעיית רגולציית-מצב הינו כלהלן : בהינתן משוואת המצב

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \quad x(0) = x_0$$

יש למצוא בקר אשר מביא את וקטור המצב $x(t)$ לאפס, מכל תנאי התחלה, עם קצב התכנסות רצוי (מהיר מספיק).

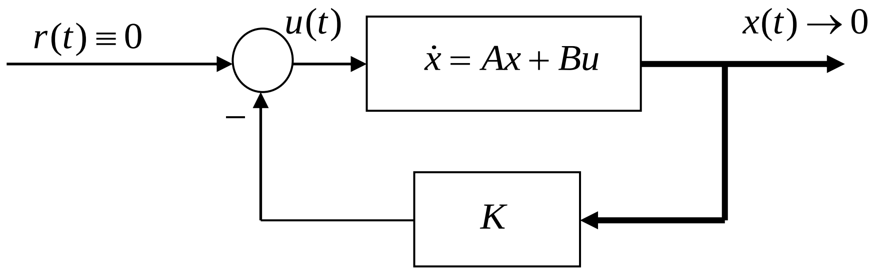
ניתן לתאר את הבעיה באופן סכמטי כמקרה מיוחד של בעיית עקיבה, שבה המצב (והיציאה) נדרשים "לעקוב" אחר אות ייחוס $r(t)$ השווה זהותית אפס :



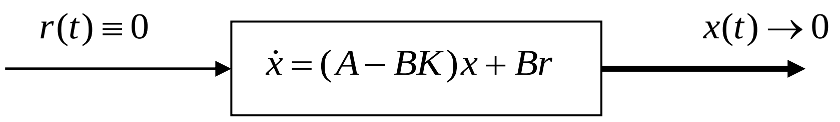
ה"פתרון" הפשוט ביותר לקבלת מצב 0 הינו לכאורה $u(t) \equiv 0$. פתרון זה ייכשל כאשר המערכת אינה יציבה, או שהמודים של A הינם איטיים מדי (ע"ע קרובים לראשית).

במקרה זה ניתן להיעזר במשוב מצב על מנת לשנות את מיקום הע"ע בחוג סגור.

המערכת המתקבלת :



או באופן שקול :



עבור בחירה מתאימה של הע״ע של מטריצת החוג הסגור $(A-BK)$, נקבל התכנסות של $x(t)$ לאפס בקצב רצוי.

אזהרה: אין לבחור ע״ע מהירים יתר על הנדרש – המחיר עשוי להיות הגבר גבוה ולכן מאמץ בקרה גדול. נציין כי בהמשך הקורס נדון בבחירה ״אופטימאלית״ של ע״ע אלה, לפי קריטריון מחיר המשקלל את גודל מאמץ בקרה עם קצב התכנסות המצב לערך הרצוי.

הערות נוספות

1. מובן כי התכנסות $x(t)$ לאפס גוררת התכנסות דומה של היציאה $y(t)=Cx(t)$.

2. יש לציין כי גורם חשוב בבעיית הרגולציה הינו התגברות על הפרעות חיצוניות ורעשי מדידה, אולם אנו לא מתייחסים לכך בשלב זה.

3. רגולציה סביב נש״מ כלשהי:

נתבונן במערכת מצב לא לינארית: $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))$.

נניח כי (u_e,x_e) נקודת שיווי משקל (נש״מ), כלומר: $f(x_e,u_e)=0$. מטרתנו לייצב את וקטור המצב $x(t)$ סביב x_e.

כזכור מבקרה 1, ע״י לינאריזציה ומירכוז המשתנים סביב הנש״מ, ניתן לקבל את המערכת הלינארית המקורבת:

$$\dot{x}_\delta(t)=Ax_\delta(t)+Bu_\delta(t)$$

כאשר

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_e,u_e),\quad B=\frac{\partial f}{\partial u}(x_e,u_e),\quad x_\delta(t)=x(t)-x_e,\quad u_\delta(t)=u(t)-u_e .$$

המטרה עתה הינה לייצב את וקטור המצב הממורכז $x_\delta(t)=x(t)-x_e$ סביב האפס.

זו בדיוק בעיה הרגולציה שהגדרנו בתחילה.

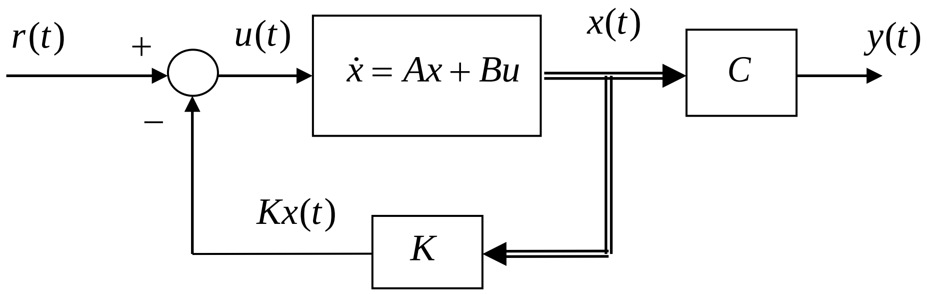
משוב המצב יהיה מהצורה: $u_\delta(t)=0-Kx_\delta(t)$

כלומר (במונחים של המערכת המקורית): $\underline{u(t)=u_e-K(x(t)-x_e)}$

2.4 עקיבה בעזרת משוב מצב

בעיית העקיבה הינה הבעיה הבסיסית בתכן מערכות בקרה : אנו מעוניינים כי היציאה $y(t)$ תעקוב כניסת ייחוס $r(t)$, כך ששגיאת העקיבה $e(t)=r(t)-y(t)$ תהיה קטנה.

נבדוק ראשית האם משוב מצב בסיסי (ללא תוספות) יכול לספק פתרון לבעיית העקיבה.



כזכור, משוואות החוג הסגור המתקבל עם משוב המצב הינן :

$$\dot{x}=(A-BK)x+Br$$
$$y=Cx$$

ופונקצית התמסורת בין $r(t)$ ל- $y(t)$ הינה :

$$H_K(s)=C(sI-A+BK)^{-1}B=\frac{b(s)}{\alpha_K(s)}=\frac{b_1s^{n-1}+\ldots+b_n}{s^n+\alpha_1s^{n-1}+\ldots+\alpha_n}$$

כאשר פולינום המכנה $\alpha_K(s)$ ניתן לבחירה לפי מיקום הקטבים הרצויים, ופולינום המונה $b(s)$ זהה לזה של המערכת המקורית.

נחשב את ערך היציאה במצב המתמיד עבור כניסה קבועה (בהנחת יציבות כמובן) :

$$r(t)\equiv R_0 \quad \Rightarrow \quad y_{ss}=R_0H_k(0)=R_0\frac{b_n}{\alpha_n}$$

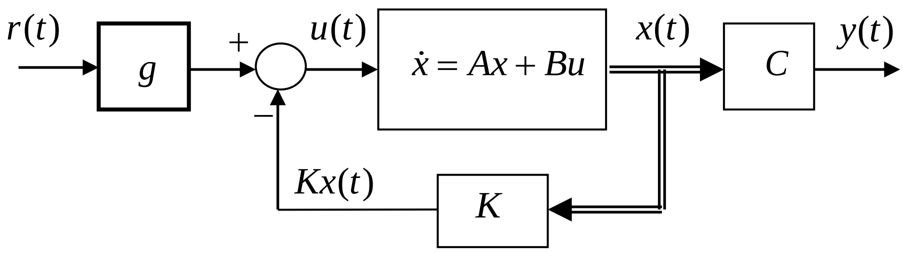
לצורך עקיבה עם שגיאה 0 אחר כניסה קבועה נדרש לפיכך :

$$H_k(0)=\frac{b_n}{\alpha_n}=1$$

אולם b_n נקבע על ידי המערכת המקורית, ו- α_n מתקבל מתוך בחירת הקטבים הרצויים (משיקולים דינמיים). לפיכך, בדרך כלל לא נקבל $H_k(0)=1$. נעבור עתה על שניים מהפתרונות אפשריים לבעיה.

א. <u>הוספת הגבר בחוג פתוח</u> :

הפתרון הפשוט ביותר הינו הוספת הגבר קבוע לכניסת הייחוס :



את ההגבר g נבחר לקבלת $gH_k(0)=1$, כלומר $g=\frac{1}{H_k(0)}=\frac{\alpha_n}{b_n}$.

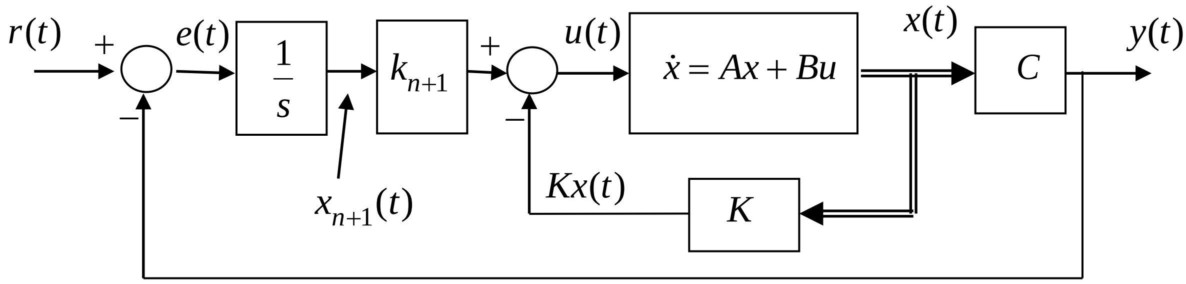
<u>החיסרון</u> בפתרון זה הוא שזהו למעשה <u>פתרון בחוג פתוח</u> : במידה והערך של $H_k(0)$ בפועל שונה מהערך שבו התחשבנו לצורך התכן (לפי מודל המערכת), הבדל זה יתבטא באופן ישיר בשגיאה העקיבה.

ב. <u>הוספת אינטגרטור בחוג המשוב</u>

בקורס בקרה 1 ראינו כי ניתן לקבל שגיאת מצב-מתמיד 0 לכניסת מדרגה באופן רובוסטי (ללא ידיעת הגבר המערכת במדויק) על ידי הוספת אינטגרטור בחוג המשוב.

אנו מעוניינים לממש עיקרון זה גם במערכת המבוססת על משוב מצב, אך כמובן תוך שמירת היכולת להציב את קטבי החוג הסגור כרצוננו.

בציור מוראה מבנה מתאים למערכת בקרה המשלבת משוב מצב עם בקרה אינטגרלית. לווקטור ההגבר $K=[k_1,\ldots,k_n]$ נוסף הגבר נוסף, k_{n+1}, שגם הוא נתון לבחירתנו. השאלה כיצד לבחור את K ו-k_{n+1} ולקבלת קטבים רצויים בחוג הסגור?



כדי לענות על כך נציג את המערכת הכוללת (מסדר $n+1$) כמערכת מצב. ראשית נגדיר משתנה מצב נוסף כמוראה בציור:

$$x_{n+1}(t)=\int_0^t e(\tau)d\tau \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_{n+1}=e=r-y=r-Cx$$

עבור וקטור המצב המורחב $\bar{X}=[x^T,x_{n+1}]^T$ נקבל לפיכך:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n\times1} \\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_{n+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times1} \\ 1\end{bmatrix}r$$

נסמן:

$$.\ \bar{A}=\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n\times1} \\ -C & 0\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix} B \\ 0\end{bmatrix}$$

אם נוסיף עתה את משוב מצב המוראה בציור:

$$u=-Kx+k_{n+1}x_{n+1}\triangleq-\bar{K}\bar{X}$$

כאשר הגדרנו $\underline{\bar{K}=(K,-k_{n+1})}$, נקבל את משוואת המצב של החוג הסגור:

$$\frac{d}{dt}X=(\bar{A}-\bar{B}\bar{K})\bar{X}+\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times1} \\ 1\end{bmatrix}r$$

מטריצת המערכת של החוג הסגור היא $(\bar{A}-\bar{B}\bar{K})$, ובאם הצמד $(\bar{A},\bar{B})$ קונטרולבילי, הרי שניתן להציב את $n+1$ קטבי החוג הסגור כרצוננו ע"י בחירת $\bar{K}$.

נציין כי הצמד $(\bar{A},\bar{B})$ קונטרולבילי אם ורק אם: (1) הצמד המקורי (A,B) קונטרולבילי, ובנוסף (2) למערכת המקורית (A,B,C) אין אפס בראשית. (ללא הוכחה – מהו הסבר אינטואיטיבי לכך?)

<u>ניתוח חליפי באמצעות פונקציית התמסורת</u> : גישה חליפית לחישוב ההגברים במערכת עם בקרה אינטגרלית מתבססת על ניתוח פונקציית התמסורת המתקבלת. גישה זו מאפשרת להתחשב גם בערך רצוי לפולינום האופייני $\alpha_K(s)$ של מערכת המשוב הפנימי.

עבור המערכת שבציור, פונקציית התמסורת של המערכת הכוללת $T(s)$ הינה :

$$T(s)=\frac{\frac{k_{n+1}}{s}\frac{b(s)}{\alpha_K(s)}}{1+\frac{k_{n+1}}{s}\frac{b(s)}{\alpha_K(s)}}=\frac{k_{n+1}b(s)}{s\alpha_K(s)+k_{n+1}b(s)}$$

הפולינום האופייני של מערכת זו הינו :

$$\bar{\alpha}(s)=s\alpha_K(s)+k_{n+1}b(s)$$

ניתן עתה להתקדם בשני אופנים :

<u>גישה 1</u> : נבחר פולינום $\bar{\alpha}(s)$ רצוי (מסדר $n+1$), נחשב את k_{n+1} ו-$\alpha_K(s)$, ולבסוף נבחר וקטור משוב K שנותן את $\alpha_K(s)$ שחושב. לחישוב k_{n+1} ו-$\alpha_K(s)$:

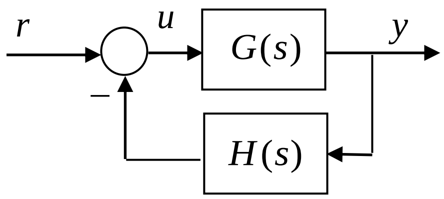
א. ראשית נחשב את k_{n+1} על ידי הצבת $s=0$:

$$s=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{\alpha}(0)=0+k_{n+1}b(0) \quad\Rightarrow\quad k_{n+1}=\bar{\alpha}(0)/b(0)$$

ב. הפולינום הדרוש $\alpha_K(s)$ מתקבל עתה לפי $\alpha_K(s)=(\bar{\alpha}(s)-k_{n+1}b(s))/s$.

<u>גישה 2</u> : נתחיל מבחירת $\alpha_K(s)$ עבור קטבי החוג הפנימי. עתה נבחר k_{n+1} לקבלת ערכים סבירים לפולינום האופייני הכולל $\bar{\alpha}(s)$. (ניתן להיעזר בשרטוט רות-לוקוס לשם כך!). ייתכן ונידרש לניסוי-וטעיה בבחירת $\alpha_K(s)$.

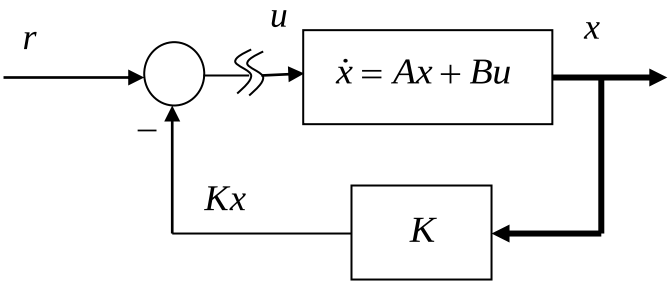
2.5 תמסורת החוג ושולי היציבות



כזכור מ"בקרה 1", המשוואה האופיינית של חוג משוב "קלאסי" היא $1+L(s)=0$, כאשר $L(s)=G(s)H(s)$ היא תמסורת החוג.

תמסורת זו קובעת לפיכך את מיקום קטבי החוג סגור, וניתן לחשב מתוכה את "שולי היציבות" של המערכת – ובפרט את עודף הפאזה ועודף ההגבר של חוג. פרמטרים חשובים אלה מבטאים קשורים כזכור לריסון המערכת, ואת עמידותה לשינויים בתמסורת המערכת המבוקרת.

עבור המערכת שלנו (עם משוב מצב), ניתן לחשב את תמסורת החוג $L(s)$ על ידי פתיחת חוג הבקרה במקום המוראה:



ונקבל:

$$L(s)=K(sI-A)^{-1}B$$

ניתן לחשב עתה את שולי היציבות (בפרט עודף הפאזה ועודף ההגבר) עבור תמסורת זו.
חשוב לבצע בדיקה זו לכל מערכת בקרת-משוב, ללא קשר לשיטת התכן.

2.6 זמן בדיד

קיימת זהות אלגברית מלאה בין מערכות מצב בזמן רציף למערכות בזמן בדיד בכל הנוגע למשוב מצב והצבת קטבים.

עבור המערכת בזמן בדיד :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

משוב המצב הינו מהצורה :

$$u(k) = r(k) - Kx(k)$$

וניתן להשתמש בכל הנוסחאות שלמדנו לבחירת וקטור ההגבר K. ההבדל העיקרי הינו במיקום הרצוי של הקטבים בחוג סגור – כמובן שעתה נרצה למקמם במיקום מתאים בתוך מעגל היחידה.

בהקשר של הוספת אינטגרטור לשיפור השגיאה במצב המתמיד, נציין כי אינטגרטור בזמן בדיד נתון ע״י התמסורת $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$, שהיא המקבילה של $\dfrac{1}{s}$ בזמן הרציף.

2.7 מערכות מרובות כניסות

עד כה התמקדנו במערכות בעלות כניסה (ויציאה) יחידה (SISO). נעמוד בקצרה על נקודות דמיון ושוני עבור מערכות מרובות כניסות.

משוואות המערכת והמשוב ללא שינוי בכתיבה מטריצית:

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ u = r - Kx \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = (A - BK)x + Br$$

כאשר הפעם (עבור שתי כניסות):

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad B = [B_1, B_2], \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

נציין שתי תכונות בסיסיות:

1. בדומה למקרה של כניסה יחידה: ניתן להציב כרצוננו את קטבי החוג הסגור (= הערכים העצמיים של המטריצה $A_K = A - BK$) אם ורק אם הצמד (A, B) הוא קונטרולבילי.

2. בשונה מהמקרה של כניסה יחידה: הבחירה של מקדמי המטריצה K אינה יחידה (הדבר סביר כי ב- K יש הפעם עודף פרמטרים, כלומר יותר מ- n).

.

לבחירה חד משמעית של פרמטרי ההגבר K נדרש להוסיף שיקולים ודרישות נוספים. דרך מקובלת וסדורה לעשות זאת היא בגישה של בקרה אופטימלית, עליה נעמוד בהמשך הקורס.