פרק 11. * מערכות ליניאריות משתנות בזמן

(Linear Time-Varying Systems)

בפרק זה נציג את המתמטיקה הבסיסית של מערכות ליניאריות משתנות בזמן במרחב המצב, כאשר נתמקד במערכות בזמן רציף (בזמן בדיד הדיון פשוט יותר).

משוואות המצב למערכת מצב משתנה בזמן הינן:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \ge t_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

דוגמא למערכת משתנה בזמן היא טיל אשר שורף דלק תוך תנועתו, ועקב כך מסתו יורדת בתלות בזמן. שנוי זה מתבטא בהשתנות זמנית של מטריצות המערכת. דוגמא נוספת היא לווין הנמצא במסלול אליפטי סביב כדור הארץ, דבר המתבטא בשינוי מחזורי בכוח הגרביטציה הפועל עליו.

נציין כי למערכות משתנות בזמן אין פרוש פשוט בתחום התדר. לפיכך מרבית הניתוח נעשה בתחום הזמן.

נציג ראשית את משוואות המצב ופתרונן, ולאחר מכן נתייחס לשאלות של יציבות, קונטרולביליות ואובזרוובילית עבור מערכות אלו.

11.1. ייצוג הפתרון

נתמקד ראשית במשוואת המצב ללא כניסה:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

עם תנאי התחלה $x(t_0) = x_0$. לשם פשטות הסימון נניח כי $A(t)$ מוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$, כך שניתן לקבוע את t_0 כרצוננו.

קיום ויחידות הפתרון: במערכת משתנה בזמן קיום ויחידות הפתרונות אינם מובטחים, ויש צורך בתנאים נוספים כדי להבטיח זאת. תנאים אלה מתקבלים מהתיאוריה הכללית של משוואות דיפרנציאליות. תנאי מספיק לקיום ויחידות הינו כי $A(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין של הזמן, כלומר פונקציה רציפה פרט אולי למספר סופי של קפיצות בכל אינטרוול סופי. אנו נניח מעתה כי דרישה זו מתקיימת.

<u>א. מצב סקלרי</u> : נתבונן ראשית במקרה של מערכת במימד אחד, כלומר

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)$$

כאשר $x(t)$ ו- $a(t)$ סקלריים. במקרה זה קל להראות כי

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) x(t_0), \qquad t \geq t_0$$

נוח להגדיר את הפונקציה הבאה –

$$\phi(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

כך שמתקיים :

$$x(t) = \phi(t,t_0)\,x(t_0)$$

הפונקציה $\phi(t,t_0)$ נקראת <u>פונקצית המעבר</u> של המצב.

<u>ב. מצב וקטורי</u> : נתבונן עתה במקרה של מצב וקטורי, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ כאשר $n \geq 2$. במקרה זה $A(t)$ היא כמובן מטריצה ריבועית $n \times n$. ניתן לשער כי גם פה מתקיים :

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right) x(t_0)$$

אולם שוויון זה <u>אינו מתקיים</u> בדרך כלל. הסיבה הבסיסית לכך היא חוסר הקומוטטיביות של מטריצות באופן כללי ($A_1A_2 \neq A_2A_1$), ובעקבות כך לאי השוויון :

$$e^{A_1}e^{A_2} \neq e^{A_1+A_2}$$

באופן כללי, ניתן להציג את הפתרון בצורה הבאה :

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0)$$

כאשר $\Phi(t,t_0)$ נקראת <u>מטריצת המעבר</u> של המצב. (נציין כי במקרה הכללי אין נוסחה סגורה עבור $\Phi(t,t_0)$, ולכן מדובר בייצוג נוח של הפתרון אך לא בנוסחה מפורשת.)

כדי לראות כי מתקיים ייצוג זה, <u>נגדיר</u> את $\Phi(t,t_0)$ באופן הבא :

יהי $(\phi_i(t,t_0),\ t \geq t_0)$ הפתרון $x(t)$ של המערכת $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ עם תנאי התחלה $x(t_0) = e_i$ (וקטור יחידה עם 1 במקום ה- i). נגדיר :

$$\Phi(t,t_0) = \left[\phi_1(t,t_0),\ldots,\phi_n(t,t_0)\right]$$

אזי, כל תנאי התחלה $x(t_0)=\left(x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)\right)^T$ ניתן לביטוי כסכום הבא :

$$x(t_0)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t_0)e_i$$

ולכן, מתכונת הסופרפוזיציה של מערכות לינאריות (לינאריות בתנאי התחלה) :

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t_0)\phi_i(t,t_0)\equiv\Phi(t,t_0)\,x(t_0)$$

כידוע, עבור מערכת לק״ב ($A(t)\equiv A$), מטריצת המעבר נתונה ע״י $\Phi(t,t_0)=e^{A\cdot(t-t_0)}$.

במקרה הכללי אין נוסחה סגורה, אך מתקיימות מספר תכונות שימושיות.

<u>תכונות מטריצת המעבר</u> : מתוך ההגדרה, ניתן להראות כי מתקיימות התכונות הבאות :

1. $\Phi(t,t)=I$ לכל t.
2. $\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$ (קיום משוואת המערכת)
3. $\Phi(t_1,t_2)\Phi(t_2,t_3)=\Phi(t_1,t_3)$ לכל $t_1\geq t_2\geq t_3$ (תכונת semi-group).

נציין כי תכונה (2) מתקבלת למשל על ידי גזירת כל אחת מעמודות Φ, ותכונה (3) על ידי השוואת הביטויים הבאים :

$x(t_1)=\Phi(t_1,t_3)\,x(t_3)$ לעומת $x(t_2)=\Phi(t_2,t_3)\,x(t_3)$, $x(t_1)=\Phi(t_1,t_2)\,x(t_2)$.

בנוסף לכך ניתן להראות כי $\Phi(t,t_0)$ מטריצה <u>לא-סינגולרית</u> לכל $t\geq t_0$. לפיכך ניתן להגדיר $\Phi(t_0,t)=\Phi(t,t_0)^{-1}$ (צעידה אחורה בזמן). כמו כן, מתכונה (3) נקבל :

$$\Phi(t,\tau)=\Phi(t,t_0)\Phi(\tau,t_0)^{-1}.$$

כלומר : מתוך מטריצות המעבר $\Phi(t,t_0)$ (עבור t_0 קבוע) ניתן לחשב את $\Phi(t,\tau)$ לכל t,τ.

* תכונה מעניינת נוספת הינה הנוסחה הבאה (Jacobi-Leuville) :

$$\det(\Phi(t,t_0))=\exp\left(\int_{t_0}^{t}tr(A(\tau))d\tau\right)$$

הוכחת הנוסחה ע״י גזירה וחשבון מטריצות. מנוסחה זו מתקבל מייד כי אכן $\Phi(t,t_0)$ אינה סינגולרית (מדוע?).

<u>ג. המקרה הקומוטטיבי</u> : נתבונן עתה במקרה המיוחד שבו מטריצת המערכת מקיימת את תנאי הקומוטטיביות :

$$A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t) \quad \forall t,\tau$$

תנאי זה מתקיים באופן טריביאלי למערכת קבועה בזמן, למערכת סקלרית, וכן כאשר כל המטריצות $A(t)$ אלכסוניות.

<u>משפט</u> : תחת תנאי הקומוטטיביות הנ״ל, מתקיים :

$$\Phi(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)$$

לא נוכיח טענה זו באופן מלא, אך נציין את הנקודות העיקריות בהוכחה :

- תחת תנאי המשפט, המטריצה $A(t)$ קומוטטיבית עם המטריצה $M(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$.
- מכאן ניתן להראות כי $\frac{d}{dt}(M(t)^k) = kA(t)M(t)^{k-1}$ לכל $k \geq 1$.
- על ידי גזירה של הטור : $\Phi(t,t_0) = \exp(M(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M(t)^k}{k!}$,

ניתן עתה להראות (כמו במקרה הסקלרי) כי מתקיימת התכונה היסודית של מטריצת המעברים :

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0) .$$

כהערה, נציין כי עבור מטריצות קומוטטיביות : $A_1A_2 = A_2A_1$ מתקיים $e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_2}e^{A_1} = e^{A_1+A_2}$. את ההוכחה נשאיר כתרגיל.

ד. <u>המערכת הכוללת עם כניסה</u> : נתבונן עתה במשוואות המצב המלאות :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \geq t_0$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

אנו נניח כי הכניסה היא כזו שקיים פתרון. תנאי מספיק לכך הוא כי הכניסה רציפה-למקוטעין וחסומה.

תהי $\Phi(t,\tau)$ מטריצת המעבר המתאימה למערכת. בדומה למערכת לק״ב, ניתן לבטא את הפתרון הכללי כאינטגרל קונוולוציה מתאים.

<u>טענה</u>.

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

<u>הוכחה</u> : ע״י גזירה ניתן להראות בקלות כי $x(t)$ שהוגדר במשפט מקיים את המשוואה $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, וכן מתקיים תנאי ההתחלה $x(t_0)$.

ביטוי עבור $\underline{y(t)}$ מתקבל כמובן על ידי הצבת $x(t)$ במשוואת היציאה.

<u>התגובה להלם</u> (למשל) מתקבלת מתוך ביטויים אלה כלהלן : עבור הלם יחידה בזמן t_0, כלומר $u(t) = I\delta(t-t_0)$, נקבל

$$x(t) = \Phi(t,t_0)B(t_0)$$

לפיכך

$$y(t) \triangleq h(t;t_0) = C(t)\Phi(t,t_0)B(t_0) + D(t_0)\delta(t-t_0)$$

11.2. יציבות

קיימת וריאציות רבות של הגדרות יציבות למערכות משתנות בזמן, הקשורות לקצב ההתכנסות, התכנסות אחידה בזמן ותנאי התחלה, ועוד. אנו נעסוק פה בקצרה רק בתכונת היציבות הבסיסית ביותר, דהיינו יציבות אסימפטוטית. נתחיל בהגדרה המוכרת :

הגדרה : המערכת $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$ יציבה אסימפטוטית (מזמן התחלתי t_0) אם מתקיים $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ לכל תנאי התחלה $x(t_0)=x_0$.

קל לראות מתוך נוסחת הפתרון $x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)$ כי המערכת יציבה אסימפטוטית (מזמן התחלתי t_0) אם ורק אם $\lim_{t\to\infty}\Phi(t,t_0)=0$.

לרוע המזל, כאשר אין ביטוי סגור עבור מטריצת המעבר Φ, הקריטריון האחרון אינו ניתן לבדיקה ישירה. באופן כללי אין קריטריון כללי ובר-בדיקה ליציבות מערכות משתנות בזמן, ויש להעזר בשיטות כלליות כגון שיטת ליאפונוב לבדיקת היציבות במערכת ספציפית.

נציין כי ניתן להתעניין גם ביציבות אס' ללא ציון הזמן ההתחלתי, כלומר מזמן התחלתי t_0 כלשהו. אולם מתוך הקשר $\Phi(t,\tau_0)=\Phi(\tau_0,t_0)^{-1}\Phi(t,t_0)$ ניתן לראות כי יציבות אס' מזמן t_0 גוררת יציבות אסימפטוטית מזמן התחלתי כלשהו τ_0 (נציין כי תכונה זו אינו טריוויאלית ואינה מתקיימת למשל במערכות בזמן בדיד) . לפיכך ניתן להתייחס ליציבות אס' של המערכת מבלי לציין את זמן ההתחלה.

יציבות רגעית לעומת יציבות אסימפטוטית: נניח כי לכל זמן t, המטריצה $A(t)$ (כמטריצה קבועה) הינה יציבה-הורביץ. האם ניתן להסיק מכך כי המערכת יציבה אסימפטוטית?

התשובה היא שלילית. ניתן לבנות דוגמא פשוטה שבה $A(t)$ יציבה-הורביץ לכל t, אך המערכת הכוללת אינה יציבה אס' !

ניתן גם לבנות דוגמא הפוכה – שבה $A(t)$ היא לא-יציבה לכל לכל t, אך המערכת הכוללת יציבה אס'.

פונקצית ליאפונוב משותפת: נציין מקרה מסוים שבו ניתן להסיק יציבות בעזרת משוואת ליאפונוב.

<u>טענה</u>: נניח כי קיימת מטריצה $P>0$ וקבוע $\varepsilon>0$ כך שמתקיים לכל מטריצה $A(t)$:

$$A(t)^T P + PA(t) \le -\varepsilon I$$

אזי המערכת יציבה אסימפטוטית, וההתכנסות לראשית של $x(t)$ היא בקצב אקספוננציאלי (לפחות).

<u>הוכחה</u>: נבחר פונקצית ליאפונוב $V(x)=x^T Px$. אזי

$$\dot V(x,t) = x^T \left(A(t)^T P + PA(t)\right) x \le -\varepsilon \| x \|^2$$

מכאן כי $V(x)$ פונקצית ליאפונוב ויציבות נובעת לפי משפטי היציבות של ליאפונוב.

באופן מפורש, עקב $V(x) \le \lambda_{\max}(P) \| x \|^2$ נובע מכאן כי $\dot V(x,t) \le -\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} V(x)$, ולפיכך כי $V(x(t)) \to 0$ (בקצב אקספוננציאלי), ולפיכך גם $x(t) \to 0$ (בקצב אקספוננציאלי).

11.3. * קונטרולביליות ואובזרוביליות

הגדרה : מערכת לינארית משתנה בזמן היא קונטרולבילית בקטע $[t_0,t_1]$ אם לכל מצב התחלתי $x(t_0)=x_0$ ומצב סופי רצוי x_1, קיים אות כניסה $\{u(t),\ t\in[t_0,t_1]\}$, שעבורו $x(t_1)=x_1$.

הערות :

1. ההגדרה דומה לזו שבה השתמשנו כשדנו במערכות לק״ב, אך פה חשוב לציין את הזמן ההתחלתי t_0 : כיוון שהמערכת משתנה בזמן, ייתכן עקרונית שתהיה קונטרולבילית מזמן t_0 מסוים אך לא מאחר.
2. כמו כן דרשנו לשם פשטות כי המצב הרצוי x_1 יתקבל בדיוק בזמן t_1. דרישה זו אינה עקרונית, וניתן להראות כי ניתן להחלישה לדרישה כי $x(t)=x_1$ עבור $t\in[t_0,t_1]$ כלשהו, וזאת ללא שינוי בתוצאות שלהלן.

נתבונן במטריצה תלויה-בזמן $M(t)$ על קטע $t\in[t_0,t_1]$. נניח כי איברי $M(t)$ הם פונקציות רציפות-למקוטעין בקטע זה.

נאמר כי שורות המטריצה $M(t)$ תלויות ליניארית בקטע $[t_0,t_1]$ אם קיים וקטור $v\neq 0$ שעבורו $v^T M(t)=0$ לכל $t\in[t_0,t_1]$ (פרט, אולי, למספר סופי של נקודות). אחרת, שורות $M(t)$ בלתי-תלויות לינארית בקטע זה.

למה : שורות $M(t)$ בלתי-תלויות לינארית בקטע $[t_0,t_1]$ אם ורק אם המטריצה הבאה חיובית מוגדרת :

$$G(t_0,t_1)\triangleq\int_{t_0}^{t_1}M(t)M(t)^T\,dt\ >\ 0$$

המטריצה $G(t_0,t_1)$ נקראת מטריצת הגרמיאן (Gramian) של שורות $M(t)$.

הוכחה : תרגיל.

<u>משפט</u>: המערכת $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ היא קונטרולבילית בקטע $[t_0, t_1]$ אם ורק אם שורות המטריצה $M(t) \triangleq \Phi(t_1, t)B(t)$, הן בלתי תלויות לינארית בקטע זה.

תנאי אקויולנטי (לפי הלמה) הוא כי המטריצה הבאה תהיה חיובית מוגדרת:

$$G_c(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)B(t)^T \Phi(t_1, t)^T dt \;>\; 0$$

המטריצה $G_c(t_0, t_1)$ נקראת **גרמיאן הקונטרולביליות** של המערכת.

<u>הוכחה</u>: נצא מנוסחת הפיתרון:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)u(t)dt$$

א. הכרחיות התנאי: אם תנאי המשפט אינו מתקיים, אזי (לפי הגדרת תלות לינארית) קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש: $v^T \Phi(t_1, t)B(t) = 0$ בקטע $[t_0, t_1]$. לפיכך, כאשר $x(t_0) = 0$, נקבל: $v^T x(t_1) = 0$. ברור לפיכך כי הערכים האפשריים של $x(t_1)$ מוגבלים המקרה זה.

ב. מספיקות התנאי: נניח כי $G_c(t_0, t_1) > 0$. נראה כי לכל x_0, x_1 קיימת כניסה כנדרש. נבחר: $u(t) = B(t)^T \Phi(t_1, t)^T V$, כאשר הוקטור V יוגדר בהמשך. הצבה בנוסחת $x(t_1)$ וביצוע האינטגרציה נותנת:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\,x(t_0) + G(t_0, t_1)V$$

לפיכך, בחירת

$$V = G(t_0, t_1)^{-1}(x_1 - \Phi(t_1, t_0)\,x(t_0))$$

תיתן $x(t_1) = x_1$, כנדרש.

<u>אובזרוובילוית</u> : נתאר בקצרה את התוצאות המקבילות עבור אובזרוביליות המערכת.

<u>הגדרה</u> : מערכת לינארית משתנה בזמן היא <u>אובזרוובילית בקטע $[t_0,t_1]$</u> אם ניתן לחשב את המצב ההתחלתי $x(t_0)$ מתוך ערכי הכניסה והיציאה בקטע זה, כלומר מתוך $\{y(t),u(t)\,:\,t\in[t_0,t_1]\}$.

<u>משפט</u> : המערכת

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$
$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)$$

היא אובזרוובילית בקטע $[t_0,t_1]$ אם ורק אם עמודות המטריצה $M(t)\triangleq C(t)\Phi(t,t_0)$, הן בלתי תלויות לינארית בקטע זה.

אקויולנטית, נדרש כי המטריצה הבאה תהיה חיובית מוגדרת :

$$G_o(t_0,t_1)\triangleq\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,t_0)^T C(t)^T C(t)\Phi(t,t_0)dt\ >\ 0$$

המטריצה $G_o(t_0,t_1)$ נקראת **גרמיאן האובזרוביליות** של המערכת.

<u>הוכחה</u> (חלקית) : נראה כיצד ניתן לשחזר את $x(t_0)$ כאשר $G_o(t_0,t_1)>0$.

נניח לשם פשטות כי $u=0$. לפיכך

$$y(t)=C(t)x(t)=C(t)\Phi(t,t_0)x(t_0)$$

וכן :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,t_0)^T C(t)^T y(t)dt &= \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,t_0)^T C(t)^T C(t)\Phi(t,t_0)x(t_0)dt\\ &= G_o(t_0,t_1)x(t_0)\end{aligned}$$

לפיכך

$$x(t_0)=G_o(t_0,t_1)^{-1}\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,t_0)^T C(t)^T y(t)dt$$