פרק 10. בקרה אופטימאלית במובן LQG והכללותיה*

בבעיית הבקרה האופטימאלית שבה טיפלנו עד כה הנחנו כי וקטור המצב כולו נמדד במדויק ומשמש את הבקר בחישוב אות הבקרה. בפרק זה נתבונן במקרה הכללי יותר, שבו אנו מודדים רק אות יציאה התלוי במצב, כאשר אות זה אף עשוי להיות רועש.

הבקר האופטימאלי שנקבל, תחת ההנחות המתאימות, מוגדר על ידי צרוף שני החלקים הבאים:

1. שיערוך אופטימאלי $\hat{x}_t$ של וקטור המצב x_t, מתוך מדידות היציאה (כלומר: מסנן קלמן).
2. בקר משוב-מצב (LQR) אופטימאלי, כאשר שיערוך המצב $\hat{x}_k$ מחליף את המצב המדויק x_k.

הפרדה זו של הבקר האופטימאלי קרויה עקרון ההפרדה של הבקרה האופטימאלית. הפרדה זו נראית אינטואיטיבית וטבעית – אך יש לציין שהיא אכן אופטימאלית רק תחת ההנחות שנציין – בפרט: מערכת ליניארית, קריטריון ריבועי, ורעשים גאוסיים. הבקר המתקבל קרוי בהתאם בקר LQG (Linear-Quadratic-Gaussian).

הדיון בפרק זה יתנהל עבור מערכות בזמן רציף. התוצאות בזמן הבדיד הן דומות. הוכחות לא יינתנו פה, וניתן למוצאן בספרי לימוד מתקדמים: למשל

H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, 1972.

בחלקו השני של הפרק נביא דיון מקיף יותר בהכללה של בעיית ה-LQG, וההסתכלות על בעיה זו בתחום התדר (בקרת H_2). זהו חומר מתקדם שמובא לידיעה בלבד.

<u>תוכן העניינים</u>:

10.1 בקר LQG

המערכת: נתבונן במערכת בזמן רציף, כפי שתיארנו בפרק על מסנן קלמן: מערכת לינארית וקבועה בזמן, עם רעשי מצב ומדידה:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad t \geq 0$$
$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

אנו מניחים את "ההנחות הרגילות" למודל הגאוסי (מודל גאוס-מרקוב): המצב ההתחלתי $x(0)$ הוא וקטור אקראי בעל פילוג גאוסי, ואילו $\{w(t)\}$ ו-$\{v(t)\}$ הינם רעשים לבנים, גאוסיים, בעלי ממוצע אפס, ובלתי תלויים זה בזה ובמצב ההתחלתי $x(0)$. נסמן

$$x(0) \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_0)$$
$$E(w(s)w(t)^T) = W\delta(t-s)$$
$$E(v(s)v(t)^T) = V\delta(t-s) \qquad (V > 0)$$

מבנה הבקר: האותות הידועים לבקר הם אך ורק המדידה y ואות הבקרה u (עד הזמן הנוכחי). כלומר, גודל אות הבקרה $u(t)$ בזמן t הינו פונקציה של המשתנים $\{y(s), u(s) : 0 \leq s < t\}$ בלבד. (בנוסף מותרת כמובן גם תלות בפרמטרי המודל הנתון).

קריטריון המחיר: הבעיה בה אנו דנים היא בעיית רגולציה, כלומר המטרה להביא את המצב $x(t)$ קרוב לאפס, תוך התחשבות באנרגית הבקרה.

נתבונן ב**קריטריון המחיר הממוצע**:

$$J_{av} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left\{\int_0^T \left(x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) \right) dt \right\}$$

נשים לב כי קריטריון זה כולל שני "מיצועים":

1. תוחלת, אשר נדרשת עקב נוכחות הרעשים הסטוכסטיים.
2. מיצוע בזמן, על פני אינטרוול הזמן האינסופי.

המיצוע בזמן הוא הכרחי, זאת כיוון **שבנוכחות הרעש לא ניתן להבטיח כי מצב המערכת ישאף לאפס**, ולכן האינטגרל האינסופי (ללא מיצוע) יהיה בעל ערך אינסופי לכל בקר. זהו הבדל עקרוני בין בעיית ה- LQR לבעיית ה- LQG.

<u>משפט</u> (ללא הוכחה) : נניח כי המערכת $(A,B,Q^{1/2})$ הינה סטביליזבילית ודטקטבילית, וכך גם המערכת $(A,W^{1/2},C)$.

אזי בקר אופטימאלי עבור קריטריון המחיר הממוצע J_{av} נתון על ידי

$$u(t)=-K\hat{x}(t)$$

כאשר :

1. $\hat{x}(t)$ הוא המשערך האופטימאלי של המצב, אשר מתקבל מתוך מסנן קלמן <u>הסטציונרי</u> :

$$\tfrac{d}{dt}\hat{x}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L^{*}(y(t)-C\hat{x}(t));\quad \hat{x}_0=(any)$$

כאשר $$L^{*}=\Sigma C^{T}V^{-1}$$

ואילו $\Sigma\geq 0$ היא פתרון של משוואת ריקאטי האלגברית :

$$A\Sigma+\Sigma A^{T}-\Sigma C^{T}V^{-1}C\Sigma+W=0$$

2. ההגבר K הוא הגבר <u>קבוע בזמן</u>, שהוא ההגבר האופטימאלי עבור בעיית ה-LQR המתאימה על פני אופק זמן אינסופי, כלומר

$$K=R^{-1}B^{T}P$$

כאשר P היא הפיתרון של משוואת ריקאטי האלגברית

$$A^{T}P+PA+Q-PBR^{-1}B^{T}P=0$$

<u>הערות למשפט</u> :

1. ניתן לראות כי הבקר האופטימאלי הינו בקר **לינארי וקבוע בזמן** בעל מבנה אובזרוור-קונטרולר, כאשר האובזרוור הוא המשערך האופטימאלי של המצב (מסנן קלמן), ואילו הגבר הקונטרולר הינו ההגבר האופטימאלי לבעיית ה-LQR המתאימה.

2. לפיכך, המערכת הכוללת (מערכת מבוקרת + בקר) דומה לזו שראינו בפרק על בקר אובזרוור-קונטרולר, בצרוף הרעשים $w(t), v(t)$. מערכת זו ניתן לתאר על ידי משוואות המצב:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w(t) \\ Lv(t) \end{bmatrix},\quad \tilde{x}\triangleq x-\hat{x}$$

3. כזכור, הערכים העצמיים של החוג הסגור המתקבל הם צרוף הע״ע של מטריצת הקונטרולר : $A-BK$, ומטריצת האובזרוור : $A-LC$. מערכת זו תהיה כמובן יציבה (בהנחות המשפט).

<u>הערות נוספות</u> :

4. במקום להסתכל על המחיר הממוצע, ניתן להתבונן במחיר הרגעי הגבולי (במצב המתמיד) :

$$J_{ss} \triangleq \overline{\lim_{t\to\infty}} E\left(x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) \right)$$

הבקר שתיארנו הינו אופטימאלי גם ביחס לקריטריון זה.

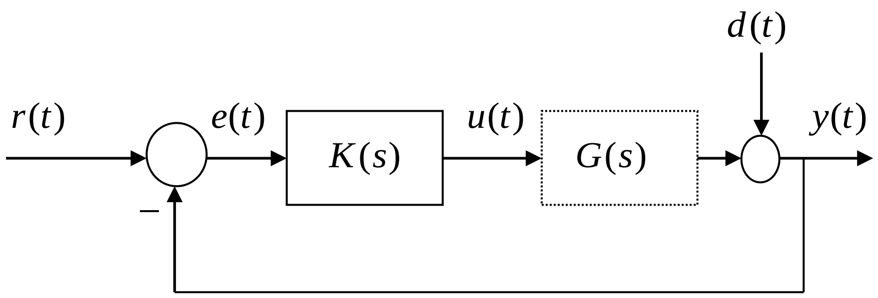
5. <u>שולי יציבות</u> : כפי שראינו, לחוג המשוב המתקבל עבור בקר LQR שולי יציבות מובטחים המתבטאים בערכים מובטחים של עודף הפאזה ועודף ההגבר. **דבר זה <u>אינו</u> נכון לגבי בקר LQG** : במקרה זה, שולי היציבות המתקבלים עלולים להיות קרובים שרירותית לאפס (בתלות בבעיה הספציפית). לפיכך, **בתכן LQG יש לבדוק ולוודא בנפרד את שולי היציבות המתקבלים**.

(נעיר כי קיימות שיטות המיועדות ״לשחזר״ את שולי היציבות של בקר LQR גם בתכן LQG, המדובר בחומר מתקדם שלא ניכנס אליו פה.)

10.2 * בעיית LQG המוכללת (Extended LQG Control Problem)

בעיית ה-LQG הבסיסית, כפי שהוצגה לעיל, מתמקדת ברגולציה של המצב (או היציאה) סביב נקודת שיווי משקל. מטרתנו פה להציג הכללה של בעיה בסיסית זו, אשר מאפשרת טיפול בבעיות בקרה כלליות – כולל **עקיבה** אחר כניסת ייחוס, **דחיית הפרעות**, ו**הנחתת רעשים**.

כמוטיבציה להגדרת הבעיה הכללית, נתבונן במערכת הבקרה הבסיסית הבאה :



המטרה, כזכור, הינה להבטיח עקיבה נאמנה של היציאה $y(t)$ אחר אות הייחוס $r(t)$, בנוכחות הפרעה אפשרית $d(t)$ (וכן רעש מדידה $n(t)$ שהושמט לשם פשטות), תוך הפעלת מאמץ בקרה $u(t)$ קטן.

כדי לנסח מטרות אלה במונחים של בקרה אופטימאלית, הרעיון הוא לייצג את כל האותות החיצוניים למערכת (במקרה זה $r(t)$ ו- $d(t)$) כתהליכים אקראיים, ולהביא למינימום את התוחלת הריבועית של אותות היציאה המתאימים.

לשם דוגמא : נניח כי אנו מעוניינים בעקיבה אחר אותות ייחוס בתחום התדרים $0 \le \omega \le 10\text{rad/sec}$ (כלומר : רוחב הסרט הנדרש של החוג הסגור הוא כ- 10rad/sec). נייצג את אות הייחוס $r(t)$ באופן הבא :

$$r(t) = w_r(t) * h_r(t), \quad H_r(s) = \frac{r_0}{(1+s/10)^k}$$

כאשר $w_r(t)$ הינו רעש לבן סטנדרטי (עם ממוצע אפס וצפיפות 1), ואילו $H_r(s)$ הינו מסנן "צובע" ברוחב הסרט המתאים. את תלילות המסנן ניתן לקבוע בעזרת ריבוי הקוטב k - לרוב מספיק $k=1$.

באותו אופן, אם $d(t)$ ההפרעה מרוכזת בתדרים $1\text{r/s} \le \omega \le 10\text{r/s}$, ניתן לייצגה על ידי הרעש הצבוע :

$$d(t) = w_d(t) * h_d(t), \quad H_d(s) = d_0 \frac{s}{(s+1)} \frac{10}{(s+10)}$$

כקריטריון ביצועים, ניתן למזער את תוחלת ההספק (במצב המתמיד) של אותות השגיאה והבקרה, עם משקל יחסי מתאים :

$$J_{ss} \triangleq \lim_{t\to\infty} E\left(|e(t)|^2 + \rho |u(t)|^2\right)$$

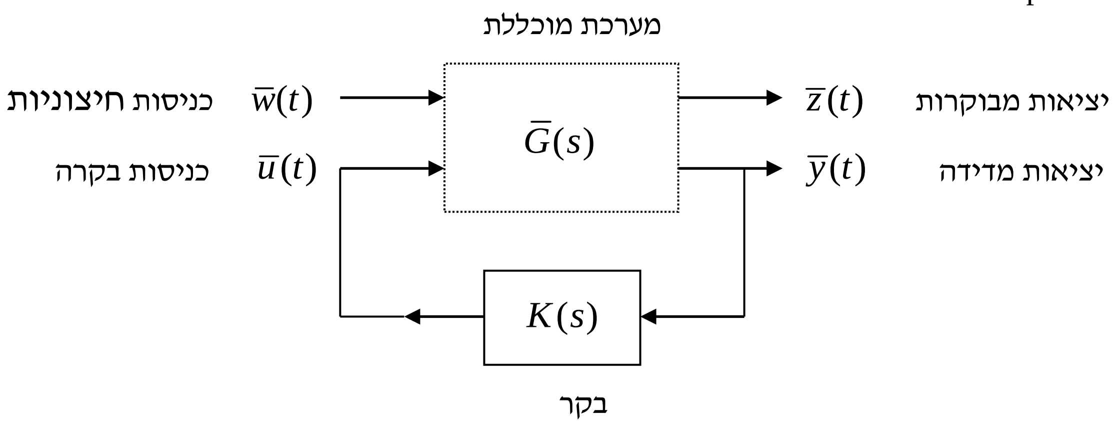
באופן כללי יותר, ניתן להוסיף מסננים מתאימים כפונקציות משקל לאותות הבסיסיים :

$$e_o(t) = e(t) * h_e(t), \quad u_o(t) = e(t) * h_u(t)$$

ולהביא למינימום את הקריטריון המוכלל:

$$J_{ss} \triangleq \lim_{t\to\infty} E\left(\| z(t) \|^2\right), \quad z(t) \triangleq \begin{pmatrix} e_o(t) \\ u_o(t) \end{pmatrix}$$

הדיון לעיל מוביל לניסוח בעיית הבקרה הכללית הבאה, הידועה כ**בעיית ארבעת-הבלוקים** (four-block problem):



<u>משוואות המערכת המוכללת</u>:

$$\bar{z}(s) = G_{11}(s)\bar{w}(s) + G_{12}(s)\bar{u}(t)$$
$$\bar{y}(s) = G_{21}(s)\bar{w}(s) + G_{22}(s)\bar{u}(t)$$

או בקיצור:

$$\begin{bmatrix} \bar{z}(s) \\ \bar{y}(s) \end{bmatrix} = \bar{G}(s)\begin{bmatrix} \bar{w}(s) \\ \bar{u}(s) \end{bmatrix}, \quad \bar{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

<u>כניסה חיצונית</u>: $\bar{w}(t)$ הינו וקטור של כניסות חיצוניות, אשר רכיביו הינם רעשים לבנים סטנדרטיים בלתי-תלויים סטטיסיטית:

$$E(\bar{w}(t)) = 0, \quad E(\bar{w}(s)\bar{w}(t)^T) = \delta(t-s)I$$

<u>קריטריון הבקרה</u>: יש להביא למינימום את הגודל:

$$J_{ss} \triangleq \lim_{t\to\infty} E\left(\| \bar{z}(t) \|^2\right)$$

<u>תרגיל</u>:

א. הראו כי בעיית LQG הסטנדרטית היא מקרה פרטי של הבעייה הכללית.

ב. הראו כי הדוגמה שתיארנו בתחילת הסעיף היא מקרה פרטי של הבעייה הכללית.

<u>הערה:</u> נציין כי עבור בקר נתון $K(s)$, ניתן לחשב את פונקציית התמסורת $T_{\bar{w}\to\bar{z}}(s)$. על ידי הצבת הבקר במשוואות המערכת המוכללת נקבל:

$$T_{\bar{w}\to\bar{z}}(s) = G_{11} + G_{12}(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

10.3 * פתרון בעיית LQG המוכללת

לצורך מציאת הבקר האופטימאלי, נמצא ראשית מימוש-מצב עבור המערכת המוכללת $\bar{G}(s)$:

$$\begin{bmatrix} \bar{z}(s) \\ \bar{y}(s) \end{bmatrix} = \bar{G}(s) \begin{bmatrix} \bar{w}(s) \\ \bar{u}(s) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\dot{x}_t &= Ax_t + B_1\bar{w}_t + B_2\bar{u}_t \\ \bar{z}_t &= C_1x_t + D_{12}\bar{u}_t \qquad (D_{11}=0) \\ \bar{y}_t &= C_2x_t + D_{21}\bar{w}_t + D_{22}\bar{u}_t \end{aligned}$$

הנחות נוספות:

1. המערכת (A, B_2, C_2) היא סטביליזבילית ודטקטיבילית
2. המטריצה D_{21} בעלת דרגת שורות מלאה (קיים רכיב "רעש" $\bar{w}_t$ בכל רכיבי $\bar{y}_t$).
3. המטריצה D_{12} בעלת דרגת עמודות מלאה (כל רכיבי הכניסה $\bar{u}_t$ משפיעים על $\bar{z}_t$)
4. המטריצה $\begin{bmatrix} A-sI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ היא בעלת דרגת שורות מלאה לכל $s = j\omega$
5. המטריצה $\begin{bmatrix} A-sI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ היא בעלת דרגת עמודות מלאה לכל $s = j\omega$

משפט: הבקר האופטימאלי הינו שילוב של אובזרוור אופטימאלי (מסנן קלמן) עם משוב מצב אופטימאלי:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\hat{x}_t &= A\hat{x}_t + B_2\bar{u}_t + L(\bar{y}_t - C_2\hat{x}_t - D_{22}\bar{u}_t) \\ \bar{u}_t &= -K\hat{x}_t \end{aligned}$$

כאשר:

$$\begin{aligned} K &= (D_{12}^T D_{12})^{-1}(B_2^T X + D_{12}^T C_1) \\ L &= (YC_2^T + B_1 D_{21}^T)(D_{21}D_{21}^T)^{-1} \end{aligned}$$

ואילו המטריצות $X > 0$, $Y > 0$ הם הפתרונות החיוביים-מוגדרים היחידים של משוואות ריקאטי הבאות:

$$A^T X + XA + C_1^T C_1 - (XB_2 + C_1^T D_{12})(D_{12}^T D_{12})^{-1}(B_2^T X + D_{12}^T C_1) = 0$$

$$AY + YA^T + B_1 B_1^T - (YC_2^T + B_1 D_{12}^T)(D_{21}D_{21}^T)^{-1}(C_2 Y + D_{21}B_1^T) = 0$$

10.4 * בקרה אופטימאלית בתחום התדר : בקרת H_2

נראה עתה כי ניתן לנסח את בעיית LQG המוכללת כמונחים של פונקציות תמסורת בלבד, מבלי להזדקק לאותות אקראיים כלל. פירוש זה "מחזיר" את נושא הבקרה הלינארית האופטימאלית לתחום התדר, והוא הנוח והשימושי ביותר להגדרה וביצוע תכן אופטימאלי. גישת תכן זו קרויה בקרת אופטימאלית במובן H_2, או "בקרת H_2".

לצורך זה ניזכר ראשית בהגדרה של נורמה ריבועית בתחום התדר.

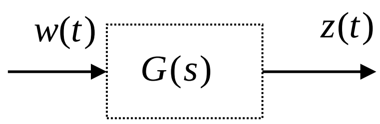
<u>הגדרה</u>: **נורמת** H_2 של פונקציית תמסורת סקלרית ויציבה $G(s)$ מוגדרת על ידי:

$$\| G \|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} | G(j\omega)|^2 \, d\omega\right)^{1/2}$$

כזכור, אם נסמן ב- $g(t)$ את התגובה להלם, אזי מתקיים (משפט פרסוול):

$$\| G \|_{H_2} = \| g \|_2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt,$$

יתר על כן, מתקיימת התכונה הבאה (מעבר של רעש לבן דרך מסננת לינארית):



- אם $w(t)$ רעש לבן סטנדרטי (מנורמל), ו- $z(s) = G(s)w(s)$, אזי מתקיים במצב המתמיד:

$$E(z(t)^2) = \| G \|_{H_2}^2$$

<u>הכללה למקרה הוקטורי</u>: כאשר האותות $w(t)$ ו- $z(t)$ וקטוריים, מתקבלת מטריצת תמסורת $G(s) = \left[G_{ij}(s) \right]$ במימד מתאים. במקרה זה נגדיר:

$$\| G \|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{ij} | G_{ij}(j\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2}$$

אם $w(t)$ וקטור של רעשים לבנים סטנדרטיים ובלתי-תלויים סטטיסטית, וכן $z(s) = G(s)w(s)$, אזי מתקיים במצב המתמיד:

$$E(\| z(t) \|^2) = \| G \|_{H_2}^2$$

כאשר $\| z(t) \|^2 = \sum_j | z_j(t) |^2$.

נחזור לבעיית LQG המוכללת. מהתכונה האחרונה אנו מקבלים מיידית את השקילות הבאה :

הבקר האופטימאלי עבור בעיית ה-LQG המוכללת, דהיינו הבקר אשר מביא למינימום את הקריטריון

$$J_{ss} \triangleq \lim_{t\to\infty} E\left(\|\bar{z}(t)\|^2\right)$$

כאשר $\bar{w}(t)$ רעש לבן סטנדרטי (דהיינו : הבקר אשר פותר את בעיית ה-LQG),

הינו הבקר $K(s)$ אשר מביא למינימום את נורמת H_2 של פונקציית התמסורת בין $\bar{w}_t$ ל- $\bar{z}_t$,

דהיינו : $\|T_{\bar{w}\to\bar{z}}(s)\|_{H_2} \;\to\; \min$.

בכך ניסחנו את בעיית הבקרה האופטימאלית כבעיית מינימיזציה של נורמת H_2 של פונקציית תמסורת מתאימה. ניסוח זה של הבעייה נקרא בקרה אופטימאלית במובן H_2, או פשוט בקרת H_2 .

נשים לב כי, בניגוד לניסוח LQG של הבעיה, ניסוח H_2 הינו דטרמיניסטי לחלוטין וכולל פונקציות תמסורת בלבד. כאמור הבעיות שקולות מבחינת פתרונן – ההבדל הוא באינטרפרטציה, כאשר החשיבה בתחום התדר היא לעיתים טבעית יותר לצורך הגדרת בעיית הבקרה.

הערה : קיימות נורמות נוספות בעלות עניין בתכן בקרים – ובפרט נורמת H_∞, אשר מתמקדת בערך <u>המכסימאלי</u> של תגובת התדר $|T(j\omega)|$, וקשורה באופן הדוק לבקרה רובוסטית. נושא זה נדון בקורסים מתקדמים לתארים גבוהים.