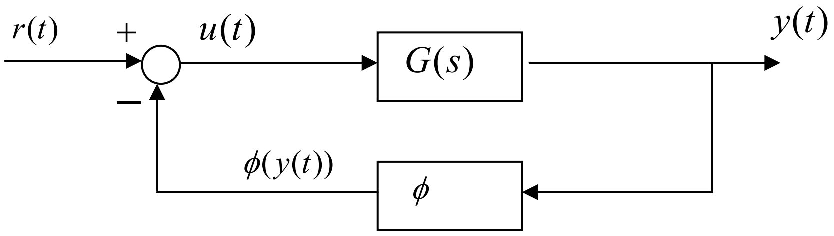
פרק 7. יציבות מוחלטת של מערכות משוב

נעבור עתה לדיון ביציבות של מערכת משוב מסוג מסוים – הכוללת מערכת לינארית ורכיב לא-לינארי סטטי. נקבל תנאים מספיקים ליציבות, הנקראים: קריטריון המעגל, וקריטריון פופוב. תוצאות אילו מהוות מעין הכללה של קריטריון נייקוויסט המוכר מתורת המערכות ה לינאריות.

סעיפי הפרק הנוכחי:

7.1. הגדרת יציבות מוחלטת

המערכת הבסיסית שבה נתעניין היא מהצורה:



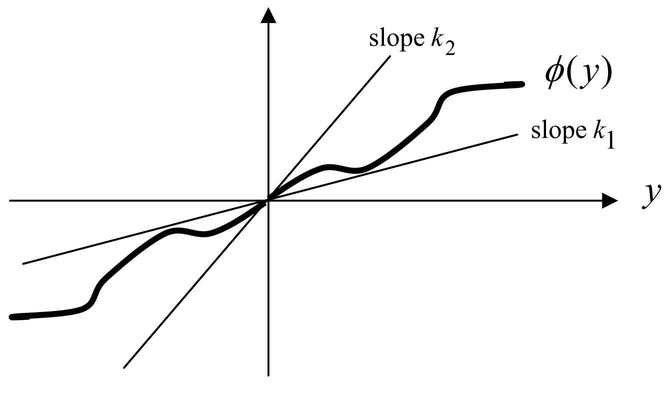
$G(s)$ הינה פונקצית התמסורת של מערכת לק"ב. נניח כי היא "פרופר" (דרגת מונה אינה גדולה מדרגת המכנה), וכי המערכת בחוג סגור תמיד מוגדרת היטב.

ϕ מייצגת מערכת סטטית (חסרת זיכרון) לא-לינארית, אשר מקיימת את התנאי הבא:

<u>תנאי הסקטור</u>: הפונקציה $\phi(y)$ תיקרא "מוגבלת לסקטור $[k_1,k_2]$", כאשר k_1,k_2 קבועים ממשיים, באם:

$$k_1 \le \frac{\phi(y)}{y} \le k_2 \qquad (\forall y \ne 0)$$

המשמעות הגראפית מודגמת בציור הבא:



<u>הגדרה:</u> מערכת המשוב המתוארת לעיל תיקרא <u>יציבה בהחלט</u> (Absolutely Stable) ביחס לסקטור $[k_1,k_2]$, היא יציבה (במובן מתאים) עבור <u>כל</u> פונקציה ϕ המוגבלת לסקטור זה.

כדי להשלים את ההגדרה עלינו להגדיר את מובן היציבות שבו נשתמש. קיימות שתי אפשרויות:

א. <u>יציבות אסימפטוטית</u>: במקרה זה נניח כי $r(t)\equiv 0$, ונגדיר וקטור מצב מתאים עבור המערכת. נגדיר ראשית מימוש מינימאלי (כלשהו) של המערכת $G(s)$:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

כאשר $C(sI-A)^{-1}B+D=G(s)$. נניח לשם פשטות כי $D=0$ (המערכת פרופר ממש).

על ידי הצבת $u=\phi(y)$ נקבל את משוואת המצב הבאה עבור החוג הסגור (עם $r=0$):

$$\dot{x}=Ax-B\phi(Cx)$$

מכיוון ש: $\phi(0)=0$ (כפי שנובע מתנאי הסקטור), מתקבל כי הראשית ($x=0$) הינה נש"מ. ניתן לפיכך להתייחס ליציבות אסימפטוטית של הראשית. הדרישה המקובלת בהגדרת היציבות המוחלטת היא כי הראשית תהיה יציבה אסימפטוטית גלובאלית. [ניתן לראות כי תכונה זו אינה תלויה במימוש שבחרנו עבור $G(s)$, כל עוד הוא מינימאלי.]

ב. <u>יציבות במובן כניסה-ליציאה</u>: כפי שהגדרנו בפרק הקודם. אנו נשתמש פה ביציבות ביחס לנורמת L_2.

נציין כי התורה המלאה של יציבות מוחלטת מתייחסת בד"כ ליציבות אסימפטוטית. אולם אנו נתמקד פה ביציבות-L_2, דבר שיאפשר לנו לגזור את קריטריון המעגל ישירות מתוך משפט ההגבר הקטן.

הערות נוספות:

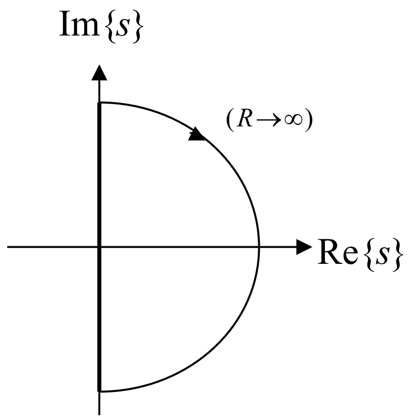
1. נציין כי הדיון להלן תקף גם כאשר משנים את סדר הבלוקים (למשל המקרה בו ϕ מקדים את G בחוג הקדמי), אולם לשם קונקרטיות נתייחס לסידור שבציור.
2. הדיון להלן בקריטריון המעגל תקף גם כאשר הפונקציה $\phi = \phi(t, y)$ משתנה בזמן. במקרה זה נדרוש קיום תנאי הסקטור לכל זמן t.

<u>השערת אייזרמן:</u> ברור כי תנאי הכרחי ליציבות מוחלטת הוא כי המערכת הלינארית המתקבלת עבור $\phi(y) = ky$, תהיה יציבה לכל $k_1 \le k \le k_2$. בשנת 1949 הועלתה השערה כי זהו גם תנאי <u>מספיק</u>. אולם השערה זו הופרכה עד מהרה. בעקבות זאת פותחו תנאים מספיקים (אך לא הכרחיים) ליציבות מוחלטת – ביניהם קריטריוני המעגל ופופוב.

7.2. קריטריון המעגל

ניזכר תחילה בקריטריון נייקוויסט ליציבות מערכות משוב לינאריות.

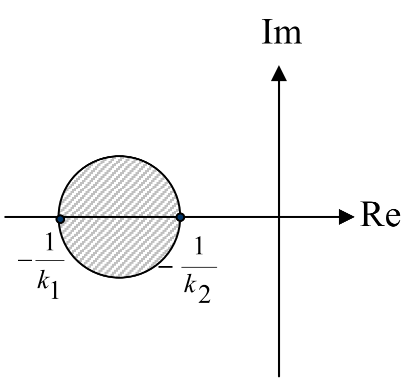
<u>עקום נייקוויסט</u> (השלם) של פונקציית תמסורת $G(s)$ הינו העקום המותווה על ידי $G(s)$, כאשר s משתנה לאורך עקום Γ המקיף את כל חצי המישור הימני בכיוון השעון.



הערה: באם קיימים קטבים על הציר המדומה יש "להשאירם" מחוץ לעקום על ידי עקיפתם מימין.

<u>קריטריון נייקוויסט</u>: מערכת משוב לינארית בעלת המשוואה האופיינית $1+kG(s)=0$ הינה יציבה אסימפטוטית (כל הקטבים בחצי המישור השמאלי הפתוח של המישור המרוכב) *אם ורק אם* עקום נייקויסט השלם של $G(s)$ מקיף את הנקודה $(-\frac{1}{k})$ m פעמים נגד כיוון השעון, כאשר m מספר הקטבים ה"לא-יציבים" ($\text{Re}(p)>0$) של $G(s)$.

נגדיר עתה את המעגל $D(k_1,k_2)$ במישור המרוכב, כמוראה בציור.



<u>משפט (קריטריון המעגל).</u> נניח כי ϕ מוגבלת לסקטור $[k_1,k_2]$. המערכת יציבה בהחלט (במובן של יציבות אסימפטוטית ובמובן של יציבות L_2) אם מתקיים אחד התנאים הבאים:

1. כאשר $0<k_1<k_2$: עקום נייקויסט של $G(s)$ אינו נכנס למעגל $D(k_1,k_2)$, ומקיף אותו m פעמים נגד כיוון השעון (כאשר m מספר הקטבים הלא-יציבים של $G(s)$).
2. כאשר $0=k_1<k_2$: $G(s)$ יציב אסימפטוטית, ועקום נייקויסט של $G(s)$ נמצא כולו מימין לקו $\mathrm{Re}(s)=-\frac{1}{k_2}$.
3. כאשר $k_1<0<k_2$: $G(s)$ יציב אסימפטוטית, ועקום נייקויסט של $G(s)$ כולו בתוך המעגל $D(k_1,k_2)$.

<u>הוכחה</u>: ניתן פה הוכחה לגבי יציבות L_2 בלבד.

א. סקטור סימטרי: נניח ראשית כי הסקטור האמור הוא סימטרי מהצורה $[k_1,k_2]=[-k,k]$. המקרה הרלוונטי הוא (3). נפעיל את משפט ההגבר הקטן:

$$g(\phi,L_2)\le k$$

לגבי $G(s)$, ברור כי ליציבות עם $k=0$ נדרשת יציבות $G(s)$. לפיכך:

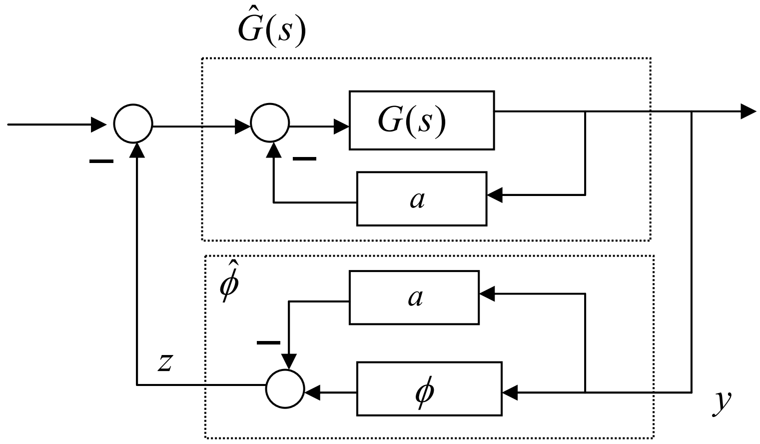
$$g(G,L_2)=\|G(j\omega)\|_\infty .$$

מכאן תנאי מספיק ליציבות-L_2 של מערכת המשוב הינו יציבות $G(s)$, ובנוסף:

$$g(\phi,L_2)g(G,L_2)<1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\|G(j\omega)\|_\infty<1/k}$$

התנאי האחרון שקול לכך שעקום נייקויסט של $G(j\omega)$ נמצא כולו המעגל $D(-k,k)$.

ב. הרחבה לסקטור כללי: ע"י שימוש בהתמרת החוג המוראית בציור הבא ניתן עתה לעבור מפונקציה ϕ המוגבלת לסקטור כללי $[k_1,k_2]$ לפונקציה $\hat{\phi}$ המוגבלת לסקטור סימטרי $[-k,k]$, ואז נוכל להפעיל את התנאי מ-(א).



נבחר: $a=(k_1+k_2)/2$. קל לראות כי $\hat{\phi}=\phi-a$, מוגבלת לסקטור $[-k_0,k_0]$, כאשר $k_0=(k_2-k_1)/2$. כמו כן, $\hat{G}(s)=G(s)/(1+aG(s))$ לפיכך, תנאי מספיק ליציבות המערכת המקורית הינו: $\hat{G}(s)$ יציבה, וכן

$$\left\| \frac{G(j\omega)}{1+aG(j\omega)} \right\|_\infty < \frac{1}{k_0}$$

ניתן לראות (על ידי הצבת $G=x+jy$ ומעט אריתמטיקה) כי התנאי האחרון שקול לתנאי המשפט לגבי הכניסה (או אי-הכניסה) של עקום הנייקויסט של $G(jw)$ למעגל $D(k_1,k_2)$. בנוסף לכך, נפעיל את קריטריון נייקויסט להבטחת יציבות $\hat{G}(s)$ בשלושת המקרים:

(1) ליציבות $\hat{G}(s)$ נדרש כי הנייקויסט של $G(s)$ יקיף את הנקודה $(-1/a)$ m פעמים נגד כיוון השעון. אולם נקודה זו מתקבלת בתוך המעגל $D(k_1,k_2)$, ולכן דרישה זו שקולה להקפת המעגל m פעמים.

(2) מיציבות $G(s)$ נובע כי $m=0$. מכיוון שהנקודה $-1/a=-2/k_2$ משמאל לקו $\mathrm{Re}(s)=-\frac{1}{k_2}$, הרי הנייקוויסט של $G(s)$ אינו מקיף נקודה זו ולכן $\hat{G}(s)$ יציבה.

(3) באופן דומה ל-(2), מכיוון שהנקודה $-1/a$ מחוץ למעגל $D(k_1,k_2)$ נובע כי הנייקויסט של $G(s)$ אינו מקיף נקודה זו ולכן $\hat{G}(s)$ יציבה.

מ.ש.ל.

7.3. קריטריון פופוב ליציבות מוחלטת

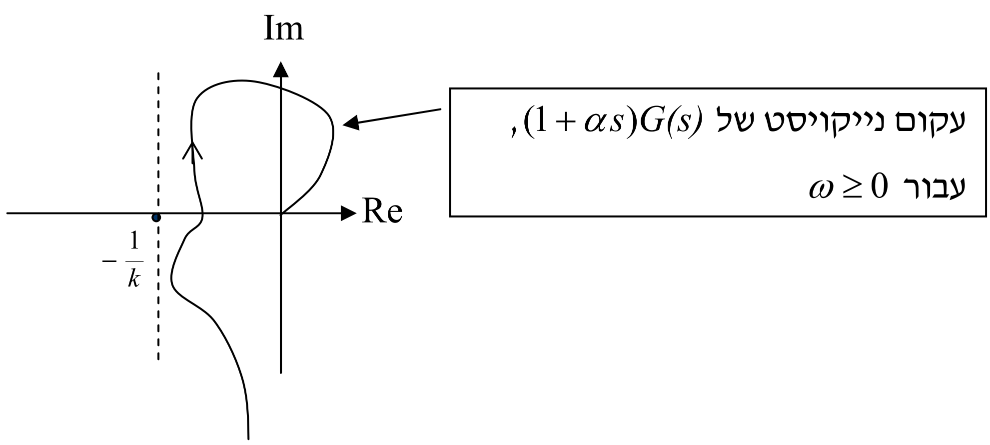
זהו קריטריון נוסף ליציבות מוחלטת. נתאר אותו (ללא הוכחה) רק עבור המקרה שבו $k_1 = 0$.

משפט (קריטריון פופוב). נניח כי ϕ מוגבלת לסקטור, וכי $G(s)$ יציבה אסימפטוטית. נניח בנוסף כי קיים $\alpha > 0$ המקיים:

$$\mathrm{Re}\{(1+j\alpha\omega)G(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0 \qquad \forall \omega \ge 0$$

וכן כי $(1+s\alpha)$ אינו מצטמצם עם המכנה של $G(s)$. אזי המערכת יציבה בהחלט (במובן יציבות אסימפטוטית).

אינטרפרטציה גרפית של הדרישה במשפט:

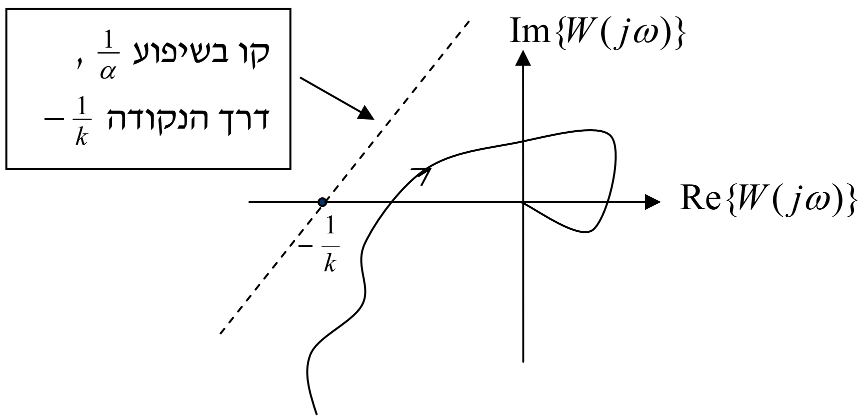


ניתן להציג את הדרישה במשפט פופוב גם באמצעות תגובת התדר של $G(s)$ עצמה. את התנאי ניתן לרשום כך:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} - \alpha\omega \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0 \qquad \forall \omega \ge 0$$

נשרטט "עקום נייקויסט" של הפונקציה $W(j\omega) \doteq \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j\omega \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$ עבור $\omega \ge 0$, כלומר שרטוט במישור המרוכב של $\omega \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$ לעומת $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$ כאשר ω פרמטר. זהו "עקום פופוב" של $G(j\omega)$.

הדרישה האחרונה שקולה לכך כי עקום פופוב יהיה כולו מימין לקו המצויר עבור קבוע כלשהו $\alpha > 0$.



* 7.4. קריטריון המעגל ומערכות חיוביות

המשפטים הקודמים לגבי יציבות מוחלטת והוכחותיהם (עבור יציבות אסימפטוטית) קשורים למספר מושגים בסיסיים מתורת המערכות – בפרט לנושא מערכות חיוביות (Positive-Real), הלמה של קלמן-יעקובוביץ, ומערכות פסיביות. נושאים אלה הינם בעלי עניין בפני עצמם, אך מפאת קוצר הזמן נסתפק בתיאור קצר.

א. מערכות חיוביות

נתבונן בפונקצית תמסורת (רציונאלית) $G(s)$.

<u>הגדרה</u>. $G(s)$ תיקרא

- Positive Real (PR) אם $\mathrm{Re}(s) \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\{G(s)\} \geq 0$.
- Strictly Positive Real (SPR) אם $G(s-\varepsilon)$ הינה PR עבור $\varepsilon > 0$ איזשהו, כלומר $\mathrm{Re}(s) \geq -\varepsilon \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\{G(s)\} \geq 0$.

ניתן לאפיין תכונות אלה בעזרת ערך התמסורת על הציר המדומה, כלהלן:

<u>משפט</u>. $G(s)$ הינה PR אם ורק אם:

א. אין לה קטבים בעלי $\mathrm{Re}(s) > 0$ (יציבות "חלשה").

ב. $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0, \;\forall \omega$

קל לראות כי תנאים <u>הכרחיים</u> ל-PR הינם:

- הדרגה היחסית של $G(s)$ תהיה 0 או 1
- אין אפסים בעלי $\mathrm{Re}(s) > 0$ ("מינימום פאזה" במובן החלש).

משפט. $G(s)$ הינה SPR אם ורק אם:

א. אין לה קטבים בעלי $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ (יציבות הורוביץ).

ב. $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \ \forall \omega$

גם במקרה זה נדרשת דרגה יחסית של 0 או 1, וכן אי-קיום אפסים בעלי $\mathrm{Re}(s) > 0$ (מינימום פאזה).

דוגמאות:

- $G(s) = \dfrac{1}{s}$ הינה PR, אך לא SPR.
- $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $a > 0$ הינה SPR.
- $G(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1}$ אינה PR (דרגה יחסית 2).
- $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2-s+1}$ אינה PR (בלתי יציבה).
- $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$ היא SPR: היא יציבה הורוביץ, וכן

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} > 0$$

ב. הלמה של קלמן-יעקובוביץ

התוצאה הבסיסית הבאה קושרת בין תכונת PR של פונקציית תמסורת לבין תכונות אלגבריות של מימוש המצב שלה.

לשם פשטות נביא פה רק את הגרסה המתאימה ל- $G(s)$ שהיא strictly proper (כלומר $D=0$ במימוש המצב).

<u>משפט</u>: תהי $G(s)$ פונקציית תמסורת בעלת מימוש מינימלי (או אף קונטרולבילי בלבד), $[A,B,C]$. נזכיר כי ב"מימוש" הכוונה פשוט כי: $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$.

אזי $G(s)$ הינה SPR אםם קיימות מטריצות סימטריות $P>0$, $Q>0$ כך ש:

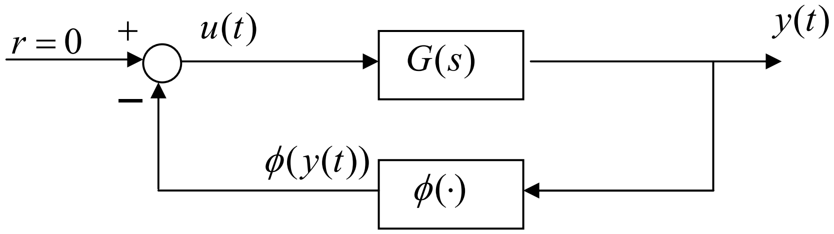
$$A^T P + PA = -Q$$

$$PB = C^T$$

[תזכורת: המשוואה הראשונה היא משוואת ליאפונוב, המתקיימת לכל מערכת יציבה].

<u>ג. שימוש לקריטריון המעגל</u>

נחזור למערכת המשוב ולבעיית היציבות בהחלט שלה (ביחס ליציבות אסימפטוטית).



ניסוח שקול לקריטריון המעגל שראינו לעיל הינו כלהלן (את השקילות ניתן להראות תוך שימוש בהגדרות ומעט אלגברה).

<u>משפט</u> (קריטריון המעגל – ניסוח SPR). נניח כי

- ϕ מוגבלת לסקטור $[k_1, k_2]$
- $\dfrac{G(s)}{1+k_1G(s)}$ יציבה
- $\dfrac{1+k_2G(s)}{1+k_1G(s)}$ הינה SPR

אזי המערכת יציבה בהחלט.

נראה (בקווים כלליים) כיצד ניתן להוכיח תוצאה זו. נוכיח תחילה את הגרסה הפרטית הבאה:

<u>למה:</u> . נניח כי $G(s)$ הינה SPR, פרופר-ממש, וכי ϕ מוגבלת לסקטור $[0,\infty)$. אזי מערכת המשוב יציבה בהחלט.

<u>הוכחה</u>: נבחר מימוש מינימאלי (A,B,C) של $G(s)$. נבחן פונקצית ליאפונוב ריבועית: $V(x)=x^TPx$. נקבל

$$\dot V(x)=\dot x^TPx+x^TP\dot x=(x^TA^T+uB^T)Px+x^TP(Ax+Bu)$$
$$=x^T(A^TP+PA)x-2x^TPB\phi(y)$$

נשתמש עתה בלמת K-Y: נבחר $P>0$ שמקיים

$$A^T P + PA = -Q < 0$$
$$PB = C^T \quad \Rightarrow \quad x^T PB = x^T C^T = y$$

לפיכך

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x - 2y\phi(y) \le -x^T Q x$$

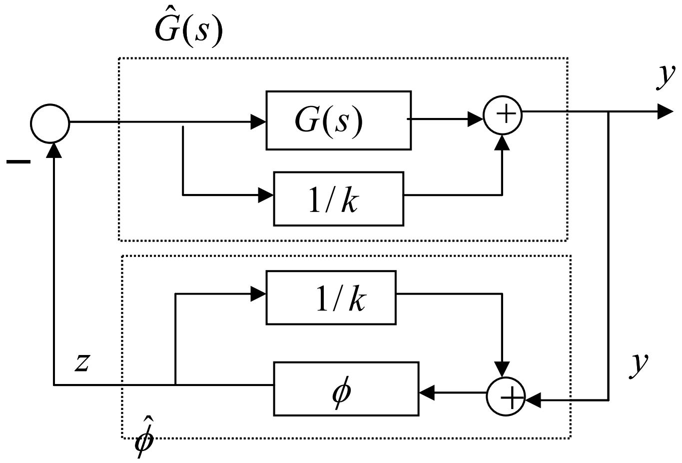
(אי-השוויון האחרון נובע מתנאי הסקטור על ϕ). לפיכך $V(x)$ פונקציית ליאפונוב, ומתקבלת יציבות אסימפטוטית של הראשית עבור כל ϕ כנ"ל. □

ניתן להוכיח תוצאה זו באופן דומה גם כאשר $G(s)$ פרופר (ולא בהכרח ממש), ע"י שימוש בגרסה המתאימה של למת K-Y.

את ההרחבה לסקטור כללי $[k_1, k_2]$ ניתן לבצע על ידי מספר טרנספורמציות אלגבריות.

הרחבה לסקטור $[0,k]$:

נתבונן במערכת השקולה:



ניתן להראות כי אם ϕ מוגבלת לסקטור $[0,k]$, אזי $\hat{\phi}$ מוגבלת לסקטור $[0,\infty)$. כמו כן,

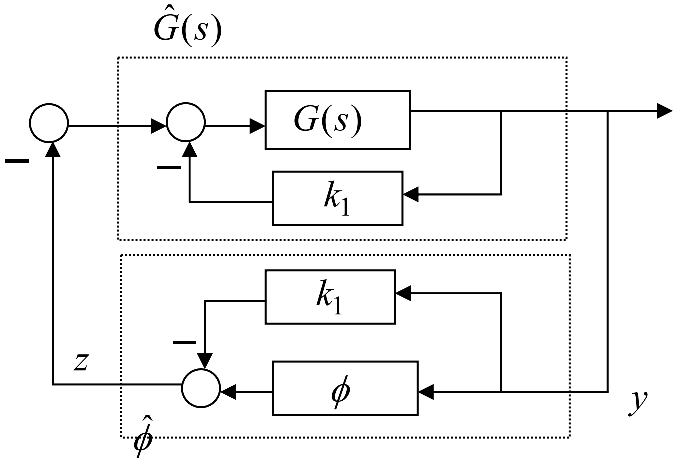
$$(1+kG)\ \text{SPR} \quad \Leftrightarrow \quad (G+\frac{1}{k})\ \text{SPR} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{G}\ \text{SPR}$$

לפיכך קיבלנו:

אם ϕ מוגבלת לסקטור $[0,k]$ וכן $(1+kG)$ SPR,

אזי $\hat{\phi}$ מוגבלת לסקטור $[0,\infty)$ וכן $\hat{G}$ SPR,

ולפי הלמה האחרונה המערכת יציבה בהחלט.



הרחבה לסקטור $[k_1, k_2]$:

ע״י שימוש בהתמרת החוג המצוירת ניתן עתה לעבור מסקטור $[0,k]$ לסקטור כללי $[k_1, k_2]$.