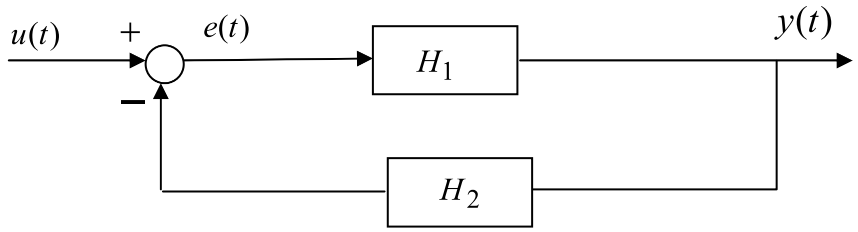
פרק 6. משפט ההגבר הקטן

בפרק זה נדון ביציבות של מערכת משוב מהצורה:



המטרה הבסיסית הינה להסיק את יציבות מערכות המשוב הכוללת מתוך יציבות מרכיביה. למרות שניתן לדון ביציבות אסימפטוטית ואף ביציבות כניסה-למצב, מושג היציבות המתאים יותר לדיון בסיסי במערכת זו הינו יציבות כניסה-ליציאה, שניתן לראותו כהכללה של יציבות BIBO.

בפרק זה נגדיר את מושג היציבות כניסה ליציאה (יציבות IO), ונתאר את ״משפט ההגבר הקטן״ שהינו תנאי מספיק (לרוב שמרני) ליציבות מערכת משוב.

<u>6.1. יציבות כניסה-ליציאה</u>

נתבונן במערכת H מהצורה

$$y = Hu$$

כאשר $u = \{u(t), t \in T\}$ הוא אות הכניסה, $y = \{y(t), t \in T\}$ הוא אות היציאה, ו- T הוא ציר הזמן. בד"כ נניח כי $T = [0, \infty)$. המערכת H מתארת למעשה העתקה (מיפוי) בין מרחבי האותות המתאימים.
לשם פשטות נניח תמיד כי האותות הינם רציפים למקוטעין, וכן כי הם סקלריים (מערכת SISO). כמו כן נניח כי המערכת היא סיבתית:

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t \le \tau \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \le \tau$$

נפנה עתה להגדרה זהירה יותר של מרחבי האותות בהם נטפל.

נציין כי ההתיחסות לזמנים $t \ge 0$ בלבד נוחה לצורך טיפול במערכות לא יציבות, וכן מאפשרת טיפול במערכות עם תנאי התחלה (קבועים או חסומים).

<u>א. יציבות L_∞</u>

נגדיר ראשית את נורמת-אינסוף על מרחב האותות:

נורמת L_∞:
$$\| u \|_{L_\infty} = \sup_{t \ge o} | u(t) |$$

ניתן להראות כי הגדרה זו מקיימת את תכונות הנורמה:

א. $u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \| u \| = 0$

ב. $\| au \| = a \| u \|$ לכל סקלר a

ג. אי שוויון המשולש: $\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$

נגדיר עתה את מרחב L_∞ כמרחב כל האותות (הרציפים למקוטעין) בעלי נורמת L_∞ סופית.

<u>הגדרה</u> (מאותות ומערכות): המערכת $y = Hu$ הינה יציבה BIBO אם

$$\| u \|_{L_\infty} < \infty \quad \Rightarrow \quad \| y \|_{L_\infty} < \infty$$

הגדרה מעט מחמירה יותר, המתאימה יותר לניתוח מערכות לא לינאריות, היא הבאה:

<u>הגדרה :</u> המערכת $y = Hu$ הינה יציבה-L_∞ אם קיימת פונקציה רציפה $\alpha(\cdot)$ כך ש :

$$\| y \|_{L_\infty} \le \alpha(\| u \|_{L_\infty})$$

לבסוף, ההגדרה הבאה דורשת כי פונקצית החסם $\alpha(\cdot)$ תהיה לינארית.

<u>הגדרה :</u> המערכת $y = Hu$ הינה "יציבה-L_∞ עם הגבר סופי" אם קיימים קבועים γ, β כך שמתקיים :

$$\| y \|_{L_\infty} \le \gamma \| u \|_{L_\infty} + \beta$$

הקבוע הקטן ביותר γ המקיים הגדרה זו (או הגבול התחתון של קבועים כאלה) נקרא הגבר-L_∞ של המערכת H, ויסומן $\gamma(H, L_\infty)$. כל קבוע γ המקיים את ההגדרה מהווה חסם עליון על הגבר המערכת. הקבוע β נקרא גורם ההטיה (bias), ומאפשר לכלול בהגדרה מערכות שעבורן $y \ne 0$ כאשר $u = 0$ (למשל מערכת דינאמית בעלת תנאי התחלה קבועים, שונים מאפס).

<u>דוגמא</u> : מערכות סטטיות – מהו ההגבר במערכת ערך מוחלט? מערכת "אזור מת"? מערכת רוויה? מערכת ריבועית?

<u>יציבות L_∞ של מערכת לינארית קבועה בזמן</u>. נתבונן במערכת הקונבולוציה הסיבתית $y = h * u$, דהיינו $y(t) = \int_0^t h(t-s)u(s)ds$ (כאשר $h(t) = 0$ עבור $t < 0$). מערכת זו יציבה-L_∞ עם הגבר סופי *אם ורק אם* $\| h \|_{L_1} := \int_0^\infty | h(t) | \, dt < \infty$. במקרה זה, ההגבר הוא $\gamma(h, L_\infty) = \| h \|_{L_1}$, ומתקיים $\| y_\tau \|_{L_\infty} \le \| h \|_{L_1} \| u_\tau \|_{L_\infty}$. [ההוכחה : באותות ומערכות].

ב. יציבות L_p

עד כה מדדנו את "גודל" האות לפי ערכו המכסימלי. לצרכים מסוימים נוח או נדרש להשתמש במדד אחר – כגון אנרגיית האות.
לצורך זה ניזכר בהגדרה הבאה:

נורמת L_p $(1 \le p < \infty)$:
$$\| u \|_{L_p} = \left[\int_0^\infty | u(t) |^p dt \right]^{1/p}$$

המקרה החשוב ביותר הוא, כמובן,

נורמת L_2:
$$\| u \|_{L_2} = \left[\int_0^\infty | u(t) |^2 dt \right]^{1/2}$$

מרחב L_p הינו מרחב כל האותות (הרציפים למקוטעין) בעלי נורמת L_p סופית.

ניתן לחזור על הגדרות היציבות שלעיל, כאשר במקום בנורמת L_∞ נשתמש בנורמת L_p.
בפרט, נחזור על ההגדרה הבאה:

<u>הגדרה:</u> המערכת $y = Hu$ הינה "יציבה-L_p עם הגבר סופי" אם קיימים קבועים γ, β כך שמתקיים:

$$\| y \|_{L_p} \le \gamma \| u \|_{L_p} + \beta$$

במקרה זה γ המינימלי הינו הגבר-L_p של המערכת, ויסומן בהתאם $\gamma(H, L_p)$.

נציין כי תכונות היציבות המתקבלות לפי הנורמות השונות אינן שונות מהותית (ובפרט מתלכדות עבור מערכות לק"ב – ראה להלן). *ההבדל העיקרי יהיה בהגבר המערכת המתקבל לפי ההגדרות שונות.*

<u>הערה:</u> ניתן להרחיב את כל ההגדרות הנ"ל באופן מיידי גם למערכות MIMO, כאשר בהגדרת נורמת האותות, במקום הערכים המוחלטים $| y(t) |, | u(t) |$ נשתמש בנורמה מתאימה (למשל האאוקלידית) על וקטורי הכניסה והיציאה.

<u>יציבות L_p של מערכת לק"ב</u>. נתבונן שוב במערכת $y = h * u$. גם פה ניתן להראות (לאו דווקא בקלות) כי המערכת יציבה-L_p עם הגבר סופי *אם ורק אם* $\| h \|_{L_1} < \infty$, ומתקיים $\| y_\tau \|_{L_p} \le \| h \|_{L_1} \| u_\tau \|_{L_p}$.

אולם במקרה זה $\| h \|_{L_1}$ הינו רק חסם עליון על הגבר L_p, ובד"כ גדול ממנו ממש.

<u>הגבר-L_2 של מערכת לק"ב</u>. להגבר L_2 חשיבות מיוחדת תורת הבקרה, ובפרט בתורת הבקרה האופטימאלית ובקרה רובוסטית. נציין את התוצאה החשובה הבאה:

<u>משפט</u>: הגבר-L_2 של מערכת יציבה $y = h * u$ נתון על ידי

$$\gamma(h, L_2) = \sup_{\omega \ge 0} | H(j\omega) |$$

כאשר $H(j\omega)$ היא תגובת התדר של המערכת: $H(j\omega) = \int_0^\infty h(t) e^{-i\omega t} dt$.

גודל זה קרוי גם "נורמת H_∞ של תגובת התדר", ומסומן $\| H \|_\infty$.

<u>הוכחה</u>: נראה רק כיוון אחד. לפי משפט פרסוול (עם $u = y = 0$ עבור $t < 0$)

$$\| y \|_{L_2}^2 = \int_0^\infty y(t)^2 dt = \int_{-\infty}^\infty | H(j\omega) U(j\omega) |^2 \, d\omega / 2\pi$$
$$\le \| H \|_\infty^2 \int_{-\infty}^\infty | U(j\omega) |^2 \, d\omega / 2\pi = \| H \|_\infty^2 \| u \|_{L_2}^2$$

ומכאן ש-$\| H \|_\infty$ מהווה חסם עליון על ההגבר. כדי להראות שוויון, עלינו למצוא אות כניסה (בעל אנרגיה סופית) שרוב האנרגיה שלו מרוכזת בקרבת התדר שבו $| H(j\omega) |$ מכסימלית – לא נמלא פה את הפרטים.

ג. הערות והשלמות מתמטיות

כדי להשלים את הגדרת המערכת באופן מתמטי, עלינו להגדיר גם את מרחב הכניסה והיציאה עליהם היא מוגדרת, דבר שלא עשינו עד כה.

נניח כי אנו מעוניינים בנורמות L_p של האותות. ניתן לנסות ולהגדיר את מרחבי היציאה והכניסה כ- L_p עצמו. אולם הגדרה כזו לא תאפשר טיפול במערכת לא יציבה, שבה אות היציאה עשוי להתבדר כאשר $t \to \infty$ (גם כאשר הכניסה סופית). לפיכך, נרחיב את מרחבי אותות הכניסה והיציאה בהם אנו דנים.

עבור אות $u = \{u(t), t \geq 0\}$ וזמן $\tau \geq 0$ כלשהם, נגדיר את <u>האות הקטוע</u> u_τ:

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t): & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & : t > \tau \end{cases}$$

<u>מרחב L_p המורחב</u> מוגדר כלהלן:

$$L_{pe} = \{u \,|\, \| u_\tau \|_{L_p} < \infty \text{ for every } \tau > 0\}$$

מרחב זה הינו עדיין מרחב לינארי (אולם אינו מרחב נורמי), וכולל בתוכו את L_p.

דוגמא: האות $u(t) = t$ הינו במרחב L_{pe}, אולם לא ב-L_p.

המערכת H תוגדר עתה כמיפוי $H: L_{pe} \to L_{pe}$.

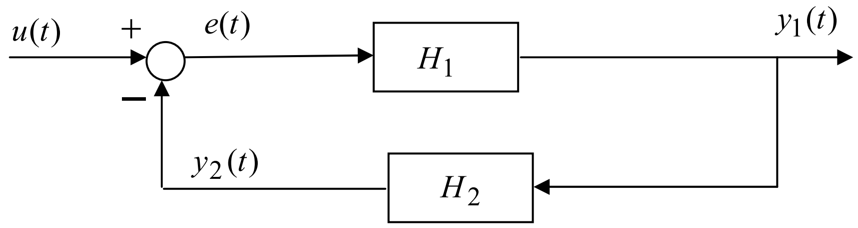
יציבות למערכות אילו מוגדרת לעיתים באופן מעט שונה ממהגדרה שהצגנו לעיל. למשל, בספרי הלימוד ההגדרה להגבר סופי הינה הבאה.

<u>הגדרה</u>: המערכת $H: L_{pe} \to L_{pe}$ הינה יציבה-L_p עם הגבר סופי אם קיימים קבועים β, γ כך שלכל $\tau > 0$ מתקיים: $\| y_\tau \|_{L_p} \leq \gamma \| u_\tau \|_{L_p} + \beta$.

ניתן להראות כי עבור מערכת סיבתית, ההגדרות (והגברי המערכת המתקבלים) הינן שקולות.

6.2 יציבות מערכות משוב

נתבונן במערכת המשוב הבסיסית:



נקבע נורמת L_p כלשהי ($1 \le p \le \infty$), ונסמנה לשם קיצור L. את הנורמה המורחבת L_{pe} נסמן L_e.

נניח כי המערכות H_1, H_2 הינו יציבות-L עם הגבר סופי, דהיינו קיימים קבועים γ_i, β_i כך שמתקיים

$$\| y_1 \|_L \le \gamma_1 \| e \|_L + \beta_1 , \quad \forall e \in L_e$$

$$\| y_2 \|_L \le \gamma_2 \| y_1 \|_L + \beta_2 , \quad \forall y_1 \in L_e$$

נניח כי מערכת המשוב מוגדרת היטב, במובן שלכל כניסה $u \in L_e$, כל האותות במערכת מוגדרים באופן יחיד ושייכים ל-L_e.

<u>משפט ההגבר הקטן</u> (גרסה מפושטת): נניח כי $\gamma_1\gamma_2 < 1$. אזי מערכת המשוב הנ"ל (בין הכניסה u ליציאה y_1) הינה יציבה-L עם הגבר סופי γ, כאשר $\gamma \le \gamma_1 /(1-\gamma_2\gamma_1)$.

הוכחה:

$$\| y_2 \| = \| H_2 y_1 \| \le \gamma_2 \| y_1 \| + \beta_2 = \gamma_2 \| H_1 e \| + \beta_2 \le \gamma_2 (\gamma_1 \| e \| + \beta_1) + \beta_2 = \gamma_2\gamma_1 \| e \| + \beta_0$$

כאשר $\beta_0 = \gamma_2\beta_1 + \beta_2$. לפיכך

$$\| e \| = \| u - y_2 \| \le \| u \| + \gamma_2\gamma_1 \| e \| + \beta_0$$

ומכאן

$$\| e \| \le \frac{\| u \|}{1-\gamma_2\gamma_1} + \frac{\beta_0}{1-\gamma_2\gamma_1}$$

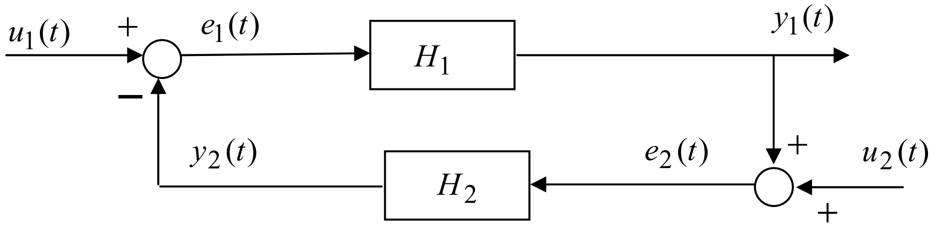
נשתמש עתה בחסם $\| y_1 \|_L \le \gamma_1 \| e \|_L + \beta_1$ ונקבל

$$\| y_1 \| \le \frac{\gamma_1}{1-\gamma_2\gamma_1} \| u \| + (\frac{\gamma_1\beta_0}{1-\gamma_2\gamma_1} + \beta_2)$$

□

למשפט פשוט זה קיימים שימושים נרחבים בתורת הבקרה.

נתאר עתה גירסה מלאה יותר של המשפט, המתייחסת ליציבות מערכת המשוב בכללה. במערכת כזו קיימת כמובן חשיבות לגודלם של כל האותות במערכת, ולא רק אות היציאה. בנוסף, בכניסת או יציאת כל תת-מערכת עשויים להופיע רעשים והפרעות, אשר עלולים לגרום לחוסר יציבות. כדי לקחת כל זאת בחשבון, נתבונן במערכת המורחבת:



נגדיר עתה את הכניסה למערכת כווקטור הכניסות $u=(u_1,u_2)^T$, ואת היציאה כווקטור האותות: $y=(e_1,e_2,y_1,y_2)$. יציבות המערכת נבדקת ביחס לכניסות ויציאות אלו.

<u>משפט ההגבר הנמוך</u> (גרסה מלאה): נניח כי $\gamma_1\gamma_2<1$. אזי מערכת המשוב המורחבת הינה יציבה-L עם הגבר סופי γ.

<u>הוכחה</u>: תרגיל. נציין כי מספיק להראות כי לכל אחד מאותות היציאה z_j (y_i או e_i) מתקיים אי שוויון מהצורה: $\| z_j \| \le \gamma_{j1} \| u_1 \| + \gamma_{j2} \| u_2 \| + \beta_j$.

זאת כיוון ש- $\| y \| \le \| y_1 \| + \| y_2 \| + \| e_1 \| + \| e_2 \|$ (מאי-שוויון המשולש), וכן $\gamma_{j1} \| u_1 \| + \gamma_{j2} \| u_2 \| \le \max\{\gamma_{j1},\gamma_{j2}\} C \| u \|$ עבור קבוע C כלשהו התלוי בנורמה. □

יש להדגיש כי משפט זה נותן תנאי מספיק בלבד, ובדרך כלל ייתן הערכה שמרנית לגבי היציבות. ניתן להבין זאת אם נבחן אותו במקרה של מערכות לינאריות: תנאי זה מתייחס להגבר בלבד, ומתעלם לחלוטין מהפאזה של תגובות התדר (בניגוד לקריטריון נייטוויסט, למשל). נראה זאת בדוגמאות הבאות.

<u>דוגמא 1</u>: נניח כי H_1 היא מערכת לק"ב עם פונקצית תמסורת $G(s)=1/(s^2+2s+4)$ ואילו H_2 היא אלמנט רוויה עם הגבר K בתחום הלינארי. נבדוק יציבות לפי המשפט, עם נורמת L_2. קל לראות כי $\gamma(H_2,L_2)=|K|$. כמו כן,

$$\gamma(H_1,L_2)=\max_{\omega\geq 0}|G(j\omega)|=\ldots=|G(j\sqrt{2})|=1/\sqrt{12}$$

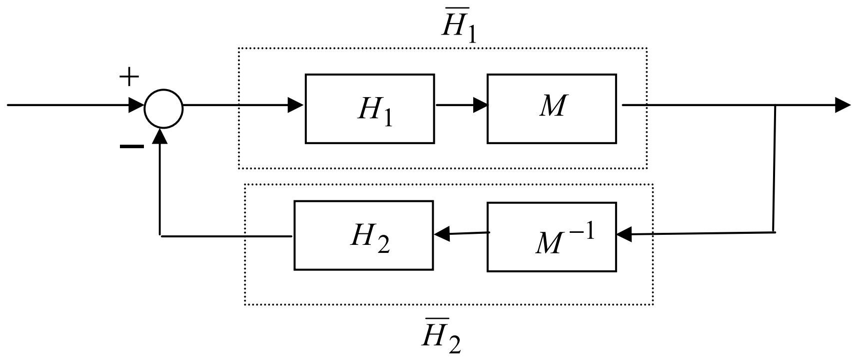
הדרישה $\gamma_1\gamma_2<1$ נותנת פה את תנאי היציבות $|K|<\sqrt{12}$.

<u>דוגמא 2</u>: בדוגמא הקודמת נניח כי H_2 היא אלמנט הגבר K, ללא רוויה. המערכת המתקבלת היא מערכת לינארית. הפעלת משפט ההגבר הנמוך תיתן אותה הערכה לתחום היציבות: $|K|<\sqrt{12}$. נשווה זאת לתוצאה המדויקת. המשוואה האופיינית של החוג הסגור היא $1+KG(s)=0$, דהינו $s^2+2s+(4+K)=0$. המערכת יציבה אםם $K>-4$.

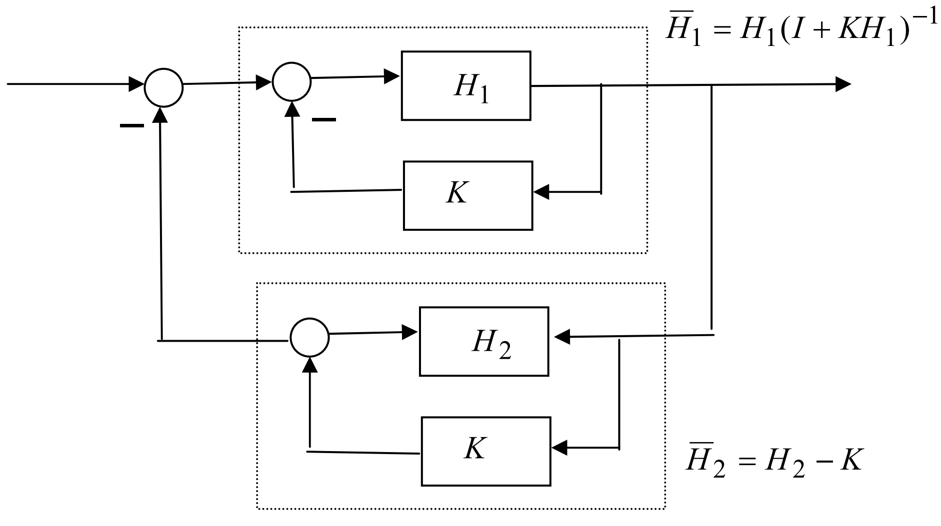
<u>טרנספורמציות חוג</u>:

לעיתים ניתן לשפר את ההערכות השמרניות המתקבלות ממשפט ההגבר הנמוך על ידי שימוש ב"טריק" פשוט של ביצוע טרנספורמציה של מערכת המשוב הנתונה למערכת משוב שונה, אשר יציבותה גוררת את יציבות המערכת המקורית. נציין שתי טרנספורמציות שימושיות לצורך זה.

טרנספורמציה I: נניח כי M מערכת יציבה (ביחס לנורמה המתאימה), ובעלת הפכי M^{-1} שגם הוא יציב. אזי יציבות מערכת המשוב המקורית שקולה ליציבות המערכת הבאה:



טרנספורמציה II: נניח כי K מערכת לינארית יציבה, וכן כי המיפוי $(I+KH_1)^{-1}$ מוגדר היטב ויציב. אזי יציבות מערכת המשוב המקורית נובעת מיציבות המערכת הבאה:



ניתן לראות כי שני הבלוקים החדשים למעשה מבטלים זה את זה.