

שערוך וזיהוי במערכות דינמיות (048825)

גיליון תרגילים 6

מסננים לא לינאריים, HMMs

תרגיל רשות: להגשה עד 28.7.08

1. מסנן קלמן המורחב (EKF):
 נדרש לשערך משתנה מקרי סקלרי x , שהינו קבוע בזמן, מתוך מדידות מהצורה:

$$z_k = h(x) + v_k, \quad k = 0, 1, \dots$$
 כאשר $h(x)$ פונקציה נתונה, ואילו v רעש לבן. ניתן לראות בעיה זו כשערוך של מיקום אופקי (x) מתוך מדידות גובה רועשות, כאשר $h(x)$ היא מפת גבהים נתונה.
 נניח ראשית כי $h(x) = \sin(x)$.
 א. רשמו מודל מצב עבור הבעיה, ורשמו את משוואות ה-EKF.
 ב. דונו בתוצאות הצפויות עבור ערכים שונים של המשתנה x ושל תנאי התחלה (\bar{x}_0, \bar{P}_0) .
2. מסנן נקודות-סיגמה (UKF) ומסנן חלקיקים:
 עבור בעיית השערוך של השאלה הקודמת: רישמו באופן מפורש ככל האפשר את המשוואות המתקבלות עבור שני מסננים אלה.
3. מסנן קלמן המורחב (EKF) – עקיבה פולארית:
 נתבונן בבעיית עקיבה מישורית, עם מדידה פולארית של המיקום. נניח כי מודל התנועה הינו הפשוט ביותר, כלומר הילוך מקרי בכל אחת מהקואורדינטות במישור (x, y) :

$$x(k+1) = x(k) + \omega_1(k), \quad y(k+1) = y(k) + \omega_2(k)$$
 כאשר ω_1 ו- ω_2 רעשים לבנים בלתי תלויים, עם קווריאנסים נתונים.
 א. מיקום נקודה (x, y) נמדד בקואורדינטות פולאריות (r, θ) . נניח כי רעשי המדידה בשתי קואורדינטות אלו הינם בלתי תלויים, אם כי גודלו של רעש הטווח פרופורציונלי ל- r . פתחו את משוואות ה-EKF כאשר משתני המצב הם (x, y) .
 ב. חזרו על הסעיף הקודם עבור משתני מצב פולריים, כלומר (r, θ) . השוו בקצרה.
 ג. הניחו עתה כי נמדדת הזווית θ בלבד. פתחו מסנן מתאים לשערוך המיקום במקרה זה. האם לדעתכם המסנן יצליח לעקוב אחר מיקום הגוף?
4. HMMs:
 א. הוכיחו את הנוסחה לחישוב הפילוג של זוגות מצבים:

$$p(x_{t-1}, x_t | y_0^n) = \frac{1}{c} p(x_{t-1}, y_0^{t-1}) p(y_{t+1}^n | x_t) a(x_t | x_{t-1}) b(y_t | x_t)$$
 ב. לבעיית שערוך ה-MAP של x_0^n מתוך y_0^n , פתחו ורישמו באופן מלא את אלגוריתם ויטרבי בכיוון האחורי (החל מזמן n).
 ג. עבור מודל HMM בעל שני מצבים ושתי יציאות, עם פרמטרים (לא טריוויאליים) לבחירתכם: חשבו בעזרת אלגוריתם ויטרבי את סדרת המצב הסבירה ביותר (x_0^4) בהנתן סדרת היציאה $y_0^4 = 10010$. פרטו את שלבי החישוב. מהי הסדרה x_0^5 הסבירה ביותר?
 ד. הוכיחו את נוסחאות השערוך-מחדש (re-estimation) עבור פרמטרי המצב (π_0, A) , וכן עבור פרמטרי היציאה (b) במקרה הבדיד ובמקרה הגאוסי.