# שערוך וזיהוי במערכות דינמיות
## **<u>גיליון תרגילים 1</u>**

<u>שערון סטטיסטי (חזרה)</u> להגשה ב- 7/4/09

1. נתונה המדידה $z = x + v$, כאשר $x$ ו-$v$ מ"א בלתי-תלויים סטטיסטית, $x$ מפולג אחיד על פני הקטע החצוי $[0,2]\cup[4,6]$, ואילו $v$ מפולג אחיד בקטע $[0,1]$. חשבו את המשערכים הבאים עבור $x$ : LS, MMSE, LMMSE, ML, MAP.

2. משתנה אקראי בדיד $y$ המקבל אחד מהערכים $1,\dots,k$ בהסתברויות $\theta_1,\dots\theta_k$ בהתאמה (כאשר $\sum_{i=1}^{k}\theta_i = 1$) נדגם $N$ פעמים באופן בלתי תלוי.

   א. רשמו את פילוג ההסתברות של המדגם המתקבל.

   ב. חשבו את משערך הסבירות המירבית עבור ההסתברויות $\theta_1,\dots\theta_k$ על סמך מדגם זה.

3. פילוג דיריכלה $k$-מימדי עם פרמטרים חיוביים $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ מוגדר על ידי צפיפות ההסתברות:

$$p_\alpha(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha)}\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{\alpha_i - 1} & : \quad \theta_1,\dots\theta_k > 0, \sum_{i=1}^{k}\theta_i = 1 \\ 0 & : \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר $B(\alpha)$ קבוע נרמול. ניתן להראות כי $E(x_i) = \alpha_i / \sum_{j=1}^{k}\alpha_j$.

משפחת פילוגי הסתברות $\{p(\theta)\} = \{p_\alpha(\theta) : \alpha \in A\}$ (משפחת פילוגים במשתנה $\theta$ ופרמטר $\alpha$) ומשפחה של פילוגים מותנים (פונקציות סבירות) $\{p(y\,|\,\theta) : \theta \in \Theta\}$ נקראות צמודות (conjugate) זו לזו באם הפילוג הפוסטריאורי $p(\theta\,|\,y)$ נמצא במשפחה $\{p(\theta)\}$ במידה ופילוג האפריורי $p(\theta)$ נמצא במשפחה זו.

   א. הראו כי משפחת הפילוגים הגאוסיים (במימד נתון) צמודה למשפחת הפילוגים המותנים הגאוסיים בעלי וקטור ממוצעים $\theta$ ומטריצת קווריאנס נתונה.

   ב. הראו כי משפחת פילוגי דיריכלה צמודה לפילוג (המותנה) של משתנה אקראי בדיד כפי שהוגדר בשאלה 2. מהו הפרמטר $\alpha$ המתקבל עבור הפילוג האפוסטריאורי?

   ג. הראו כי הראו כי משפחת פילוגי דיריכלה צמודה למשפחת הפילוגים (המותנים) המולטינומיאליים, אשר מתקבלת על ידי $N$ מדידות בלתי תלויות של המשתנה הבדיד הנ"ל. מהו הפרמטר $\alpha$ המתקבל עבור הפילוג הפוסטריאורי?

ד. חשבו את משערך MMSE המתקבל עבור ההסתברויות $\theta_1,\dots\theta_k$ כאשר מניחים כי הפילוג האפריורי עבורן הוא דיריכלה עם פרמטר $\alpha$, והמדידות כמו בשאלה 2. השוו את התוצאה המתקבלת לזו שהתקבלה שם.

4. א. העזרו בעקרון הניצבות לתוחלת מותנית כדי להראות כי $\hat{x}_{MMSE}(y)=E(x\,|\,y)$

ב. עבור מ"א וקטוריים $(x,y)$ שהם גאוסיים במשותף, חשבו באופן מפורש את הפילוג המתונה $p(x\,|\,y)$ והוכיחו בעזרתו את נוסחאות הממוצע והווריאנס המותנים (עמ' 9 ברשימות).

ג. הוכיחו את נוסחת המשערך הלינארי האופטימאלי $\hat{x}_{LMMSE}(y)$, ואת עקרון הניצבות המתאים למשערך זה.

5. בבעיית השיערוך הבייסיאני של וקטור מקרי $x$ מתוך מדידה $z$, הראו כי עבור שלושת הקריטריונים הבאים מתקבל משערך זהה:

א. $\min_{\hat{x}} E[(x-\hat{x})^T M(x-\hat{x})\,|\,z]$, כאשר $M$ מטריצה סימטרית חיובית מוגדרת ($M>0$).

ב. $\min_{\hat{x}} \mathrm{trace}\{P\}$, כאשר $P=E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T\,|\,z]$

ג. $\min_{\hat{x}} \mathrm{trace}\{MP\}$, כאשר $M$ ו- $P$ כאמור לעיל.