



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת חשמל

תורת המעגלים החשמליים

(044105)

רשימות לפי הרצאותיו של

פרופ' לוי שכטר

מהדורת נובמבר 2005

כתיבה ועריכה מעודכנת: **ד"ר סאמר בנא** פברואר 2005

כתיבה ועריכה ראשונית: **עידו ליבנה וניר גלזמן** אוקטובר 2003

תוכן העניינים

1. מבוא והגדרות

1	1.1	מבוא
2	1.2	מעגל מקובץ
4	1.3	גדלים מאפיינים
8	1.4	כיווני ייחוס
12	1.5	רכיבים ליניאריים אידיאליים – משוואות מצב
13	1.6	חוק קריכהוף לזרמים
15	1.7	חוק קריכהוף למתחים
17	1.8	תרגיל מסכם
19	1.9	שיקולי סימטריה

2. רכיבי המעגל החשמלי

22	2.1	מיון רכיבים במעגל חשמלי
23	2.2	נגד
23	2.2.1	נגד ליניארי קבוע בזמן
25	2.2.2	נגד ליניארי תלוי זמן
28	2.2.3	נגד לא ליניארי
31	2.2.4	הכללה – ריבוי הדקים

34	קבל	2.3
38	סליל	2.4
41	שיקולי הספק ואנרגיה ברכיבים פסיביים	2.5
44	מקורות בלתי תלויים	2.6
48	מקורות מבוקרים	2.7
3. משפטי רשת		
52	משפט הסופרפוזיציה	3.1
56	משפט ההצבה	3.2
57	משפט תבנין – נורטון	3.3
64	משפט ההדדיות	3.4
4. משטר מתמיד סינוסי		
66	הנחות יסוד	4.1
66	תיאור אות סינוסואידלי באמצעות פאזור	4.2
67	תכונות הפאזור	4.3
68	אימפדנס ואדמיטנס	4.4
70	דוגמא - מעגל RLC טורי	4.5
76	ניתוח מעגלים בשיטת הצמתים	4.6
79	ניתוח מעגלים בשיטת העיניים	4.7

82	שיקולי הספק ואנרגיה במשטר מתמיד סינוסי	4.8
86	דוגמא – העברת הספק מקסימלי – תיאום אימפדנסים	4.9
88	עיקרון הסופרפוזיציה ומקורות בתדרים שונים	4.10
93	מעגלי תהודה	4.11
105	מעגלי תהודה – דוגמא #1	4.12
113	מעגלי תהודה – דוגמא #2	4.13
118	מעגלי תהודה – דוגמא מסכמת	4.14

5. תופעות מעבר במעגלים מסדר ראשון

125	מבוא לפתרון מעגלים בתחום הזמן	5.1
126	תגובה לכניסה אפס (ZIR)	5.2
132	תגובה למצב התחלתי אפס (ZSR)	5.3
136	תגובה כוללת: לכניסה ולתנאי התחלה	5.4
139	תגובת מעגל מסדר ראשון לפונקצית המדרגה	5.5
144	תגובת מעגל מסדר ראשון לפונקצית דלתא של דיראק	5.6
148	שיקולי אנרגיה והספק במעגלים מסדר ראשון	5.7
151	ZIR במעגל RC עם רכיבים תלויי זמן	5.8

6. תופעות מעבר במעגלים מסדר שני

154	מעגלים מסדר שני – מבוא	6.1
155	תגובה לכניסה אפס	6.2
167	תגובה לתנאי התחלה אפס	6.3
175	משפט גרין	6.4
179	שימוש בהתמרת פורייה לפתרון משוואות דיפרנציאלית רגילות	6.5
183	הערכת פונקצית גרין ברישומה האינטגרלי	6.6
186	משוואות מצב – מרחב המצב	6.7
190	שיקולי אנרגיה והספק במעגלים מסדר שני	6.8
196	דוגמא מסכמת	6.9
209	פתרון מצב מתמיד סינוסי לעומת פתרון תופעת מעבר	6.10

7. שיטות מטריציות

216	ניתוח מעגלים בשיטת הצמתים	7.1
222	משפט תלגן – חוק שימור האנרגיה	7.2
223	ניתוח מעגלים בשיטת העיניים	7.3
228	הכללת השיטה למקורות מבוקרים	7.4
230	הוכחת השקילות לפי תבנית או נורטון בשיטת המטריצות	7.5

8. מעגלים לא ליניאריים

235	מבוא	8.1
236	נקודת עבודה במעגל לא לינארי	8.2
242	פתרון בשיטת ההפרעות : סטייה מלינאריות של רכיב אוהמי	8.3
246	סטייה מלינאריות במעגלים לא ליניאריים עם רכיבים ריאקטיביים	8.4
251	שיקולי אנרגיה במעגל לא לינארי	8.5
254	תופעת מעבר במעגל לא לינארי	8.6
258	כאוס במעגל לא לינארי	8.7

9. תופעות צימוד

266	מבוא	9.1
267	צימוד השראותי	9.2
271	פתרון מעגל חשמלי במצב מתמיד סינוסי ובו סלילים מצומדים	9.3
276	שנאי אידיאלי	9.4
279	צימוד קיבולי	9.5

10. תכנון מעגלים חשמליים

292	10.1 מבוא
293	10.2 מעגל מייצר פולסים

11. רשת זוגיים

301	11.1 הקדמה
302	11.2 אפיון רשת זוגיים
303	11.3 מטריצת אמפידנסים
304	11.4 מטריצת אדמיטנסים
306	11.5 דוגמאות
306	11.5.1 רשת T
307	11.5.2 רשת Π
308	11.5.3 ניתוח מעגל מסדר 3 במצב מתמיד סינוסי
311	11.6 מטריצה היברדית
312	11.7 מטריצת העברה – תמסורת
315	11.8 דוגמאות למטריצת העברה
320	11.9 מעגלי תמורה של זוגיים
322	11.10 תכונות ושימושים של רשתות זוגיים
322	11.10.1 זוגיים כממירי התנגדות
323	11.10.2 זוגיים סימטריים

12 מבוא למערכות אלקטרו-מכניות

325	12.1 הקדמה
327	12.2 מערכות משמרות – אנרגיה וקו-אנרגיה
340	12.3 מבוא למעגלים מגנטיים
349	12.4 מערכת מגנטו-מכנית
356	12.5 מערכת אלקטרו-מכנית
367	12.6 דוגמא מסכמת

הפרק הראשון - מבוא והגדרות

1.1 מבוא

- ההתפתחויות הטכנולוגיות הנרחבות במאה האחרונה התאפשרו במידה רבה הודות להבנה מעמיקה של תופעות אלקטרומגנטיות. הקורס תורת המעגלים החשמליים מלמד שיטות יסודיות לניתוח והבנת מעגלים חשמליים המשולבים כמעט בכל ענף והנמצאים בכל מכשיר חשמלי ביתי בשימוש היום-יומי.
- היסטוריה קצרה של האלקטרוניקה: שפופרות ריק, טרנזיסטור מצב מוצק, מיקרו-אלקטרוניקה (מעגלים משולבים), אופטו-אלקטרוניקה, ננו-אלקטרוניקה ...

▪ מטרות

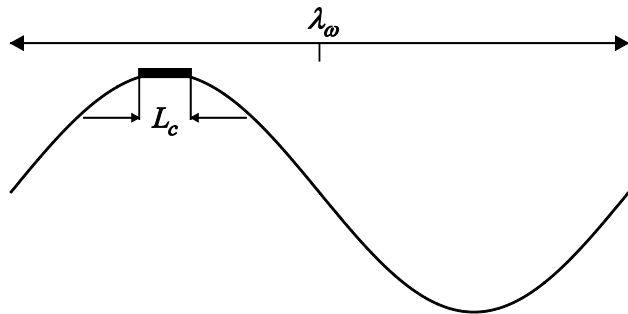
1. ניתוח מעגלים בתחום התדר ובתחום הזמן
2. שיקולי הספק ואנרגיה
3. מושגי תהודה
4. תופעות צימוד
5. תופעות לא לינאריות
6. מערכות אקלטרו-מכניות

1.2 מעגל מקובץ

המעגלים בהם נעסוק בקורס הינם מעגלים מקובצים, להבדיל ממערכות מפולגות. במעגלים המקובצים בהם נדון הרכיבים הינם מודל הנדסי מקורב להתקנים אלקטרומגנטיים מורכבים יותר. רכיב **מקובץ** מאופיין על-ידי כך שמימדיו האופייניים, L_c , קטנים מאוד ביחס לאורך הגל המתאים לתדר החשמלי ω במעגל:

$$(1.1) \quad \lambda = \frac{c}{f} = 2\pi \frac{c}{\omega} \gg L_c; \quad \omega = 2\pi f$$

משמעות הדבר היא שלאורך ההתקן השדות האלקטרומגנטיים אחידים. תכונה זו למעשה נותנת לנו את האפשרות להגדיר בהמשך את המושגים מתח וזרם.



ניתן גם להגדיר תכונה זו על-ידי כך שנניח שפרק הזמן שלוקח לגל מישורי לעבור את ההתקן, τ , קטן בהרבה מהזמן האופייני במעגל:

איור 1.1: הנחת המעגל המקובץ – מימד אופייני לעומת אורך גל

$$(1.2) \quad \tau = \frac{L_c}{c} \ll \frac{1}{f} = T_c$$

כמובן, שני התנאים הנ"ל שקולים. על-בסיס קירוב הנדסי זה ניתן לפשט את משוואות מקסוול ובמקום לפתור מערכת של משוואות דיפרנציאליות **חלקיות**, ניתן לפתור מערכת של משוואות **רגילות**. בתורת השדות

האלקטרומגנטיים, הקירוב של מעגל מקובץ נקרא הקירוב הקוואזיסטטי, החוקים המתבססים עליו (חוקי קירכהוף) מהווים קירוב למשוואות מקסוול.

בהנחת המעגל המקובץ, ניתן להחליף מערכת אלקטרומגנטית באלמנט מקובץ אשר מתאר את התנהגות ההתקן בתנאי ההנחה. לפיכך, בניתוח מעגלים מקובצים, אין אנו מתייחסים למבנה הפנימי של הרכיב.

כל מערכת חשמלית בסיסית מכילה 4 מרכיבים עיקריים :

- מקור – מספק אנרגיה חשמלית (סוללה/גנראטור).
- צרכן/עומס – מנצל את האנרגיה החשמלית (מנורה/גוף חימום).
- תמסורת – מכוונת את האנרגיה מהמקור אל העומס (חוטים).
- בקרה – בקרת מעבר האנרגיה (מפסק).

1.3 גדלים מאפייניים

מעגלים חשמליים אשר ננתח במהלך הקורס, בנויים בעיקר מאוסף של אלמנטים מקובצים המחוברים יחדיו ומוזנים ממקורות שונים. ניתן לאפיין את אשר מתרחש במערכת חשמלית או ברכיב מסוים על-ידי שני גדלים אופייניים והם: **הזרם החשמלי והמתח החשמלי**. כשנרצה למשל לעמוד על אופיו של רכיב מסוים, נגדיר לגביו מה הקשר בין המתח החשמלי על-פניו ובין הזרם החשמלי הזורם דרכו.

א. הזרם החשמלי

את הזרם החשמלי ברכיב מסוים נסמן ב- I או i . הזרם החשמלי מתאר את קצב השינוי (הזמני) בכמות המטען ברכיב נתון:

$$(1.3) \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

כאשר I מסמן את עוצמת הזרם, ΔQ – השינוי בכמות המטען, Δt – פרק הזמן שלוקח לשינוי ΔQ להתרחש. יחידות הזרם החשמלי הם מטען ליחידת זמן:

$$(1.4) \quad [I] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{sec}} = \text{Ampere}$$

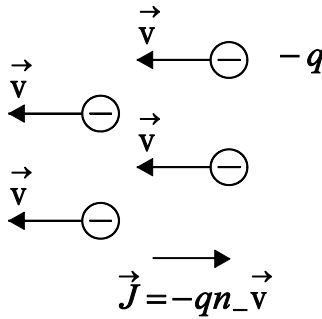
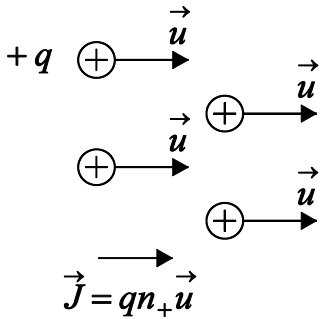
זרם חשמלי מתאר תהליך של תנועת מטען ממקום למקום ואת קצב התהליך הזה.

במרחב החופשי צפיפות הזרם ליחידת שטח הנוצרת כתוצאה מתנועת מטען במהירות קבועה u נתונה על-ידי הביטוי הבא:

(1.5)

$$\vec{J} = q \cdot n \cdot \vec{u}$$

מטען חלקיק \nearrow \uparrow צפיפות המטען \nwarrow מהירות הסחיפה של המטען



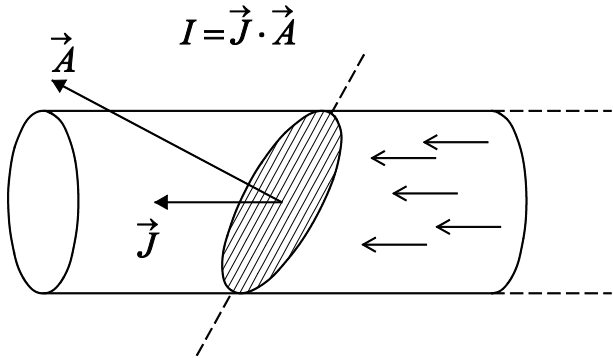
באיור 1.2 מומחשת תנועת מטען במרחב החופשי.

הזרם נתון על-ידי צפיפות הזרם הזורמת בשטח הנתון

$$(1.6) \quad I = \vec{J} \cdot \vec{A}$$

הערה: הזרם מוגדר בכיוון תנועת המטענים החיוביים. מכיוון שבמוליכים פשוטים, המטען החופשי להולכה הוא בדרך כלל אלקטרונים שמטענם שלילי, מוגדר הזרם בכיוון הפוך לכיוון הזרימה הפיזיקלי של "החומר".

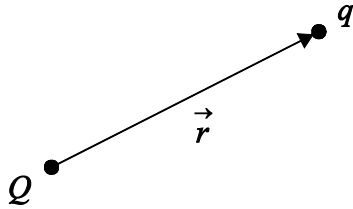
איור 1.2: תנועת מטען במרחב חופשי



איור 1.3: חישוב זרם חשמלי מידעת צפיפות הזרם בחתך נתון

ב. המתח החשמלי

את מפל המתח על-פני רכיב מסוים נסמן ב- V או v . גודל זה מהווה מדד לאנרגיה האגורה או זורמת ברכיב מסוים בזמן נתון. על-מנת להמחיש זאת ניקח למשל מטען נקודתי Q ומטען בוחן נקודתי q הנמצאים במרחק r אחד מהשני כמתואר באיור 1.4.



הפוטנציאל החשמלי סביב המטען Q נתון (ביחידות-MKSA) על-ידי הביטוי הבא:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.7) \quad \text{איור 1.4: מטען בוחן } q \text{ במרחק } r \text{ ממטען נקודתי } Q$$

הפוטנציאל במרחב תלוי במרחק מהמטען בלבד ולכן השדה והכוח הם רדיאליים. נמנע מכתוב וקטורי אך נזכור כי:

$$\vec{r} = r \vec{1}_r \quad (1.8)$$

כלומר מיקום המטען Q במרחב ביחס לראשית. \vec{r} הוא וקטור בגודל r בכיוון $\vec{1}_r$ (זהו וקטור היחידה המכוון מהראשית החוצה). לכן, השדה החשמלי והכוח החשמלי אשר מרגיש מטען הבוחן הינם רדיאליים, דהיינו:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_r E_r(r) \quad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{1}_r F_r(r) \quad (1.9)$$

בצורה מפורשת השדה החשמלי נתון על-ידי:

$$E_r(r) = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.10)$$

ואילו הכוח אשר מפעיל שדה זה על מטען בוחן q , כתלות במרחק הוא :

$$(1.11) \quad F_r(r) = qE_r(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

העבודה הנדרשת על-מנת להביא את המטען מ"אינסוף" (שם הפוטנציאל הוא אפס) עד לנקודה $r = r_0$, הינה :

$$(1.12) \quad W = -\int_{\infty}^{r_0} dr' F_r(r') = -q \int_{\infty}^{r_0} dr' E(r') = -q \int_{\infty}^{r_0} dr' \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r'} \right) = q[\phi(r_0) - \phi(\infty)] = qV$$

הערות:

▪ במעגלים חשמליים קוראים באופן כללי לנקודת האינסוף "אדמה". באופן טבעי זהו האפס של ייחוס המתח.

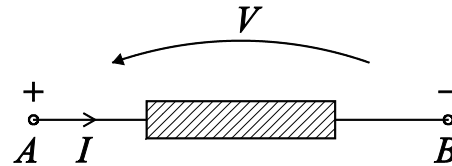
▪ שים-לב שהמתח החשמלי הינו **מדד לאנרגיה ליחידת מטען** ברכיב $V = \frac{W}{q}$, בהתאמה היחידות של

המתח החשמלי הינן :

$$(1.13) \quad [V] = \frac{Joule}{Coulomb} = Volt$$

1.4 כיווני ייחוס

כפי שציינו בסעיף הקודם, רכיב חשמלי מאופיין בעיקר על-ידי שני גדלים, הזרם החשמלי והמתח החשמלי. פתרון מעגל חשמלי, השלב הראשון הינו להגדיר את הכיוון של אחד מהגדלים הנ"ל עבור הרכיבים השונים. לצורך עבודה שיטתית ומסודרת, נגדיר כיווני ייחוס של הזרם והמתח על-פני רכיב כלשהו כמתואר באיור 1.5:



איור 1.5: כיווני ייחוס מתח/זרם ברכיב חשמלי כלשהוא

כלומר, כיוון הזרם מנוגד לקוטביות המתח על-פני הרכיב. כיווני ייחוס אלה ייקראו בהמשך **כיווני ייחוס תואמים**. הגדרנו את הכיוונים האלה באופן **שרירותי** לחלוטין וניתן היה להגדיר אותם הפוך. בהמשך, נעבוד עם כיווני ייחוס תואמים.

הערות:

- הכיוונים **המסומנים** על-פני הרכיב הם שרירותיים ואינם מסמנים את הכיוון הפיזיקלי של הזרם דרך הרכיב או המתח על-פניו.
- בהתאם לאמור לעיל, כאשר ניגשים לפתרון מעגל חשמלי, יש לקבוע באופן שרירותי את כיוון הזרם ברכיבים השונים ובהתאם לקבוע את קוטביות המתח על-פני הרכיבים כך שכיווני הייחוס תואמים.

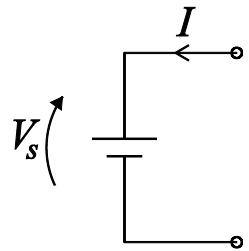
- לאחר פתרון המעגל, במידה והזרם ברכיב מסוים מקבל ערך שלילי, סימן שהכיוון אשר נבחר בהתחלה נוגד את כיוונו "האמיתי".
- **הספק רגעי** של רכיב מוגדר על-ידי המכפלה בין המתח על-פני הרכיב לבין הזרם דרכו, בכיווני ייחוס תואמים:

$$(1.14) \quad P(t) = V(t)I(t)$$

כלומר רכיב בו הזרם דרכו והמתח על-פניו מתנהגים **פיזיקלית** בכיוונים תואמים באופן רגעי, ההספק הוצר הוא חיובי באותו רגע. אם הכיוונים הפוכים, ההספק יהיה שלילי.

דוגמא #1:

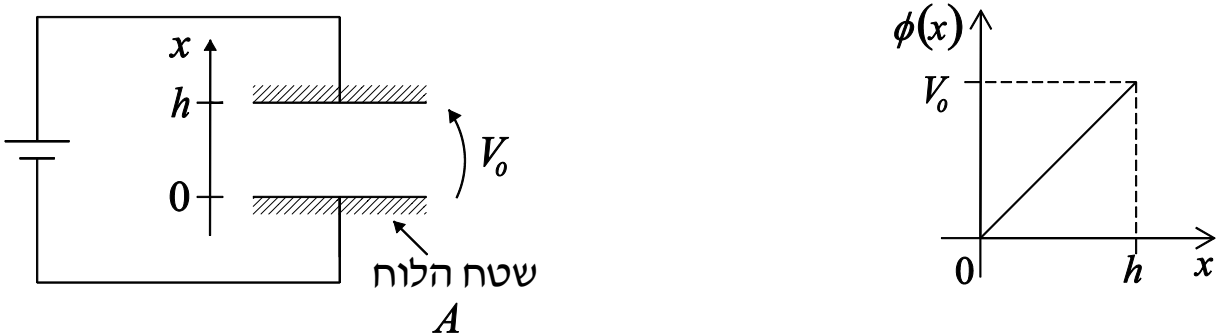
נתבונן בנגד ובסוללה המחוברים בטור. על-סמך הסכם הסימנים הקשר בין מתח לזרם בנגד ליניארי (המציית לחוק אוהם) הוא $V = RI$ לכן, ההספק הוא חיובי כי $P = RI^2$. משמעות הדבר שכאשר הספק אלקטרומגנטי הולך לאיבוד (הופך לחום) ההספק הוא חיובי. אם נבחן עתה מקור כלשהו (מתח או זרם), הרי שההנחה הבסיסית היא שהוא מספק הספק אלקטרומגנטי, לפיכך, כפוף להסכם הסימנים הנ"ל ההספק של מקור הוא שלילי. אם רוצים שההספק המסופק על-ידי מקור יהיה חיובי הרי שחייבים להסכים שהמתח והזרם על מקור יהיו באותו כיוון. אנו בכל זאת נשאר עם ההגדרה המקורית של כיווני הייחוס.



איור 1.6: כיווני יחוס במקור מתח

דוגמא #2:

על-מנת להבין את ההיגיון שמאחורי בחירה זו של כיווני ייחוס נתבונן בשני לוחות ששורר ביניהם ריק. בין הלוחות מאולץ פוטנציאל המתנהג במרחב כמתואר באיור 1.7 הימני. נתאר את תנועת האלקטרונים אשר נפלטים מאחד מהלוחות ונעים בהשפעת הפוטנציאל הנתון.



איור 1.7: תנועת אלקטרונים בהשפעת פוטנציאל חשמלי

הפוטנציאל בין הלוחות נתון על-ידי:

$$(1.15) \quad \phi(0 < x < h) = \frac{x}{h} V_0$$

ולכן השדה החשמלי הינו

$$(1.16) \quad E(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{V_0}{h}$$

אלקטרון חופשי (מטען שלילי) נמשך ללוח העליון. משוואת התנועה של אלקטרון זה מתוארת על-ידי (החוק השני של ניוטון)

$$(1.17) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -eE(x) = \frac{eV_0}{h}$$

אשר פתרונה מוביל להעתק כתלות בזמן

$$(1.18) \quad x(t) = \frac{eV_0}{mh} \frac{t^2}{2}$$

ומכאן מהירות האלקטרון

$$(1.19) \quad u(t) = \frac{eV_0}{mh} t$$

לפיכך הזרם

$$(1.20) \quad I(t) = (-enu) A = -enA \frac{eV_0}{mh} t$$

התואם את כיווני הייחוס כפי שהוגדרו לעיל.

1.5 רכיבים ליניאריים אידיאליים – משוואות מצב

כמעט בכל מעגל חשמלי בסיסי אנו נתקלים ברכיבים הבסיסיים: נגד, קבל וסליל. בפרק 2 נדון בהרחבה במאפייני הרכיבים האלה ונעמוד על מאפייניהם. נציג כאן בקצרה את משוואות המצב עבור הרכיבים הליניאריים הבסיסיים.

א. **קבל** - אוגר אנרגיה חשמלית במרחב נתון: $Q = CV$

▪ Q : כמות המטען האגורה בקבל.

▪ V : מפל המתח על הקבל.

▪ C : קיבול הקבל.

ב. **סליל** - אוגר אנרגיה מגנטית במרחב נתון: $\Phi = LI$

▪ Φ : השטף המגנטי דרך הסליל.

▪ I : הזרם החשמלי הזורם דרך הסליל.

▪ L : השראות הסליל.

ג. **נגד** - ממיר אנרגיה אלקטרומגנטית לחום במרחב נתון: $V = RI$

▪ V : מפל המתח על הנגד.

▪ I : הזרם הזורם דרך הנגד.

▪ R : התנגדות הנגד.

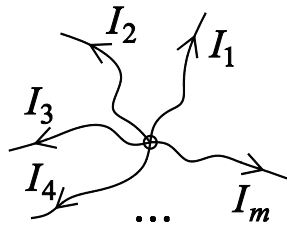
הערה: באופן אידיאלי **בחוטים** לא מתבזבז הספק ולא אגורה כל אנרגיה אלקטרומגנטית.

1.6 חוק קירכהוף לזרמים – Kirchoff's Current Law (KCL)

בכל צומת במעגל חשמלי מקובץ, בכל רגע זמן נתון, הסכום האלגברי של הזרמים היוצאים מהצומת, הוא אפס:

(1.21)

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0$$



לחילופין, ניתן לומר כי סכום הזרמים הנכנסים שווה לסכום הזרמים היוצאים. כלומר, בצומת במעגל חשמלי לא נאגר מטען. למעשה חוק זה נובע ישירות מחוק שימור המטען.

איור 1.8: זרמים נכנסים ויוצאים מצומת

הערות:

- א. KCL מהווה אילוץ לינארי על הזרמים במעגל.
- ב. KCL אינו תלוי באופי הרכיבים במעגל (ליניאריים או לא, תלויי זמן או לא).
- ג. KCL אינו תקף במערכות לא מקובצות, כגון אנטנה. נזכור שהמושגים מתח וזרם במובן הנוכחי הוגדרו רק עבור רכיבים במעגלים מקובצים.
- ד. KCL מסתמך על חוק שימור המטען, ועל-כך שבחוטטים ובפרט בצמתים לא נאגר כל מטען. משוואת הרציפות:

$$(1.22) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

נבצע אינטגרציה על הנפח V סביב הצומת

$$(1.23) \quad \int_V dv (\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0$$

איבר זה מתאפס מכיוון
שלא נאגר מטען בחוטים

כעת, לפי משפט גאוס נקבל

$$(1.24) \quad \oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} Q = \oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = 0$$

כלומר

$$(1.25) \quad \oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{a} = 0$$

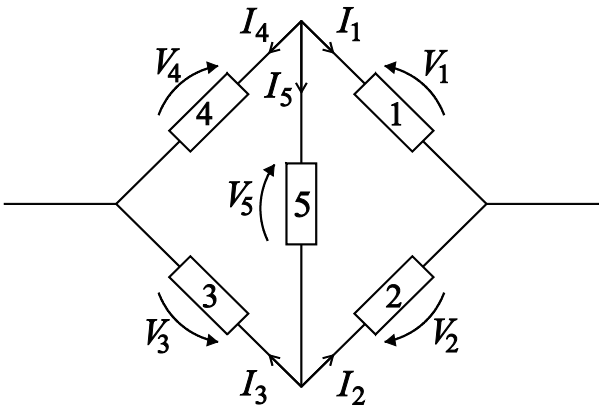
וזה ניסוח מוכלל לביטוי ב-(1.21).

1.7 חוק קירכהוף למתחים - Kirchoff's Voltage Law (KVL)

בכל לולאה סגורה במעגל חשמלי מקובץ, בכל רגע זמן נתון, הסכום האלגברי של המתחים לאורך כל ענף בלולאה, הוא אפס

(1.26)

$$\sum_k V_k = 0$$



לפי המעגל שבאיור 1.9, אם נפעיל את החוק על הלולאה החיצונית, בכיוון השעון נקבל

(1.27)

$$-V_1 + V_2 - V_3 + V_4 = 0$$

כמו-כן היינו יכולים להפעיל את החוק על כל לולאה סגורה אחרת בתרשים.

הערות:

איור 1.9: דוגמא ליישום חוק קירכהוף למתחים

א. KVL מהווה אילוץ לינארי על המתחים במעגל.

ב. KVL אינו תלוי באופי הרכיבים במעגל (ליניאריים או לא, תלויי זמן או לא).

ג. KVL אינו תקף במערכת שאינה מקובצת.

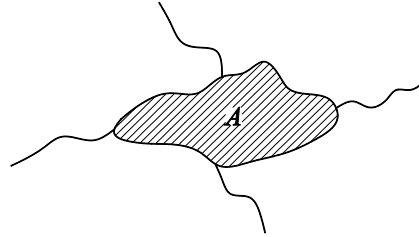
ד. KVL נגזר מחוק פרדיי

(1.28)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

נבצע אינטגרציה על המשטח שמגדירה לולאה סגורה במעגל כמתואר באיור 1.10.

$$(1.29) \quad \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$$



איור 1.10 : משטח אינטגרציה

רק לקראת סוף הקורס נדון במעגלים בהם להשראות המגנטית באזורים שונים יש חשיבות. כרגע כדאי לשים לב שאם יש השראות מגנטית נוצר כא"מ בלולאה וניתן להתחשב בכך כמקור נוסף. במקרה בו אין שטף מגנטי בשטח הלולאה, האיבר הימני ב- (1.29), מתאפס. למעשה הוא מתאפס באחד משלוש המקרים הבאים:

$$\vec{B} \perp d\vec{a} \quad (3) ; \vec{B} = \vec{B}_0 = Const \quad (2) ; \vec{B} \equiv 0 \quad (1)$$

וכעת, לפי משפט סטוקס, מתקיים

$$(1.30) \quad \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

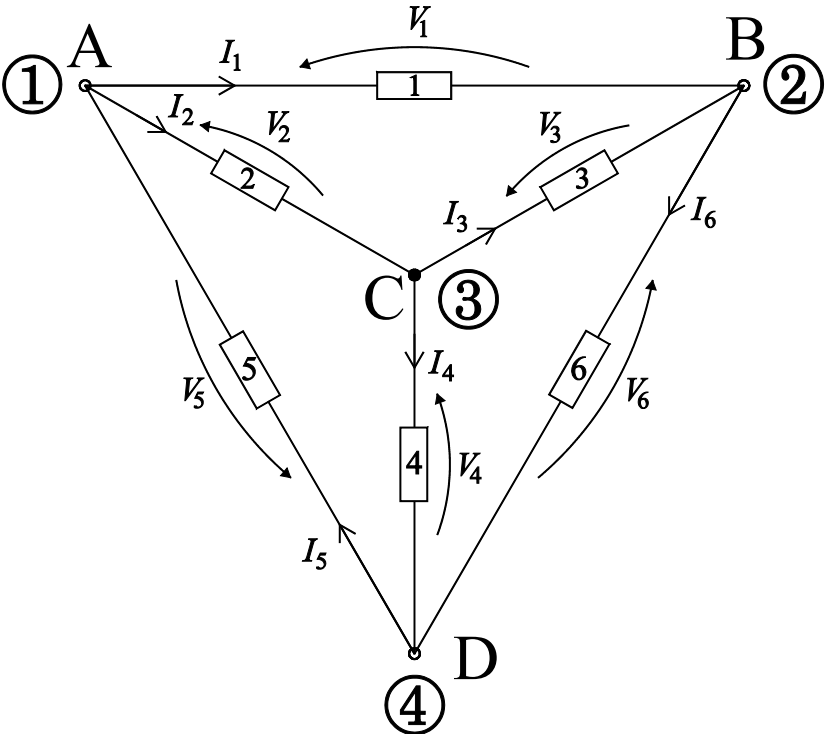
נזכר בהגדרה של פוטנציאל חשמלי סקלרי

$$(1.31) \quad \phi(r) = \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

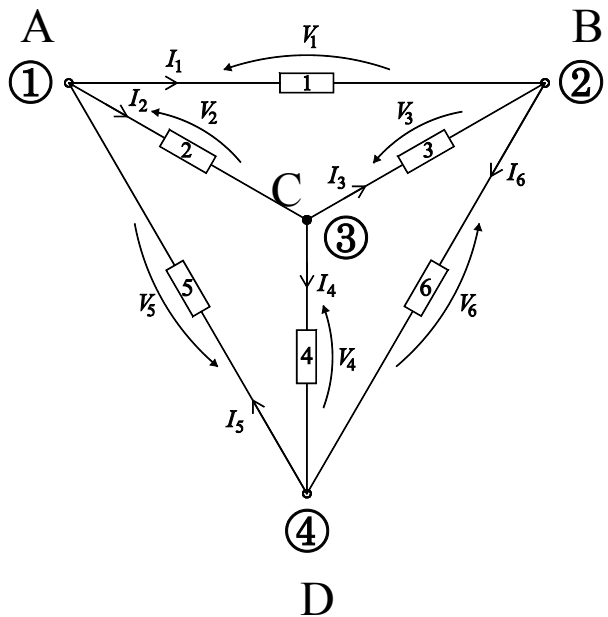
כאשר r_0 נקודת ייחוס, ולכן הביטוי ב- (1.31) שקול ל- (1.26).

1.8 תרגיל מסכם - יישום חוקי קירכהוף

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור 1.11. מטרת התרגיל היא להדגים את הפעלת חוקי קירכהוף בצמתים ובלולאות השונות. נקבע באופן שרירותי את כיווני הזרמים בענפים השונים ובהתאם להגדרת כיווני הייחוס נקבע את קוטביות המתחים.



איור 1.11 : מעגל דוגמא ליישום חוקי קירכהוף



(1.32)

נפעיל את KCL בצמתים של המעגל הנתון:

$$\begin{aligned}
 A: \quad & I_1 + I_2 - I_5 = 0 \\
 B: \quad & -I_1 - I_3 + I_6 = 0 \\
 C: \quad & -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\
 D: \quad & -I_4 + I_5 - I_6 = 0
 \end{aligned}$$

נשים לב כי לפני זרם היוצא מהצומת יש סימן חיובי (+), ולפני כזה שהנכנס אליו יש סימן שלילי (-) ברור שגם בחירה זו היא שרירותית וניתן היה לבחור זאת הפוך, דבר ששקול להכפלת המשוואה ב-1. כאמור חייבים להיות עקביים בהגדרה.

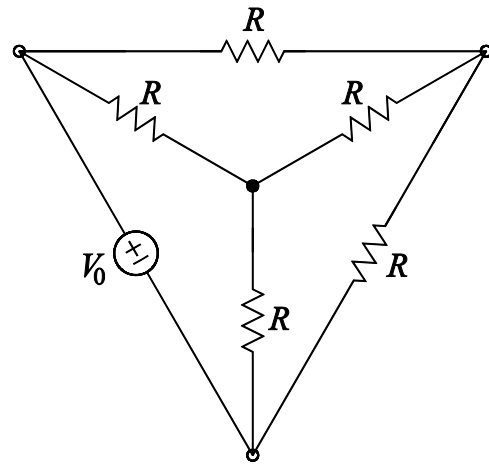
נפעיל את KVL בכמה לולאות במעגל הנתון:

(1.33)

$$\begin{aligned}
 ABCA: \quad & -V_1 + V_3 + V_2 = 0 \\
 BDCB: \quad & -V_6 + V_4 - V_3 = 0 \\
 ACDA: \quad & -V_2 - V_4 - V_5 = 0 \\
 ABDCA: \quad & -V_1 - V_6 + V_4 + V_2 = 0
 \end{aligned}$$

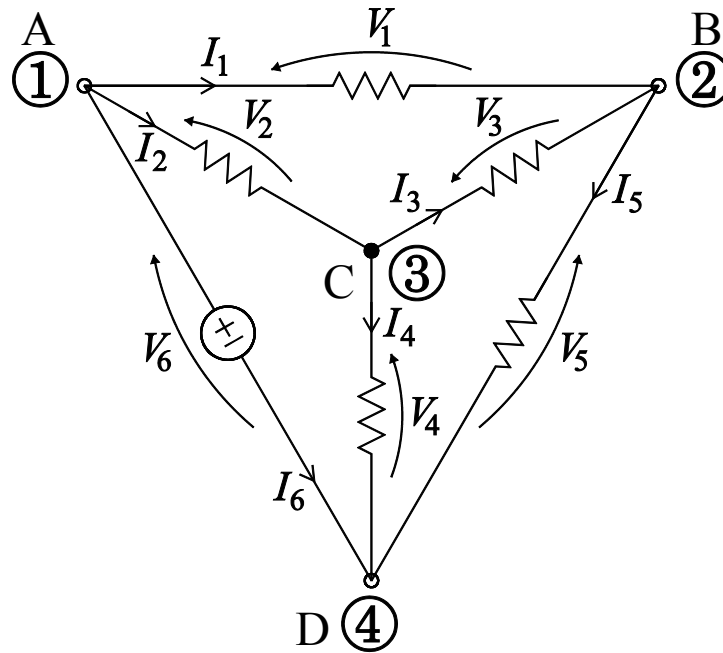
ניתן להגדיר את הכיוון "החיובי" לאורך הלולאה עם כיוון השעון, או נגדו. בדרך כלל נהוג לבחור את הכיוון אשר מתלכד עם כיוון השעון.

1.9 שיקולי סימטריה



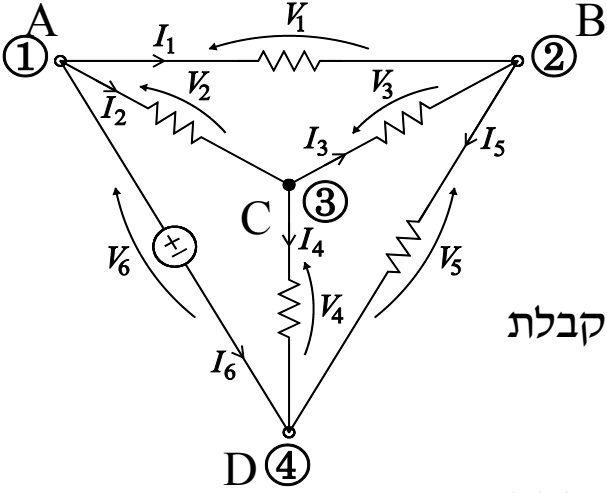
איור 1.12: מעגל התנגדותי פשוט

נתון המעגל החשמלי אשר מתואר באיור 1.12. יש לפתור את המעגל. מה משמעות פתרון המעגל? בכל ענף במעגל, למצוא את הזרם הזורם דרכו ואת המתח השורר על-פניו. דבר ראשון שעלינו לעשות הוא לסמן כיווני ייחוס, באופן שרירותי כמתואר באיור 1.13:



איור 1.13: כיווני ייחוס במעגל התנגדותי פשוט

KCL •



(1.34)

$$\begin{aligned}
 A: \quad & I_1 + I_2 + I_6 = 0 \\
 B: \quad & -I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\
 C: \quad & -I_2 + I_3 + I_4 = 0
 \end{aligned}$$

- כדאי לשים לב שהמשוואה הרביעית $[D: -I_4 - I_5 - I_6 = 0]$ מתקבלת משלושת המשוואות הראשונות $(D = -A - B - C)$.
- **מסקנה:** אין צורך להפעיל את KCL על כל הצמתים - במקרה זה צומת D נקראת צומת הייחוס (היא נבחרת לרוב כ"אדמה").

KVL •

$$\begin{aligned}
 ACDA: \quad & V_6 - V_2 - V_4 = 0 \Rightarrow V_0 = I_2R + I_4R \\
 CBDC: \quad & V_4 - V_3 - V_5 = 0 \Rightarrow I_4R - I_3R - I_5R = 0 \\
 ABCA: \quad & V_2 - V_1 + V_3 = 0 \Rightarrow I_2R - I_1R + I_3R = 0
 \end{aligned}$$

(1.35)

- משני חוקי קירכהוף קבלנו מערכת של 6 משוואות עבור ששת הנעלמים $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$.

הערה: אמנם ניתן לפתור את מערכת המשוואות, אך במקרה פרטי זה ניתן לפתור בהסתמך על שיקולי סימטריה במעגל כפי שמובהר להלן.

א. מקור המתח V_0 "רואה" שני ענפים סימטריים לכן בערכם המוחלט הפוטנציאל ב- A וב- D שווה. משמעות טענה זו הינה:

$$(1.36) \quad V_2 = V_4 = \frac{1}{2}V_0 \Rightarrow I_2 = I_4 = \frac{1}{2} \frac{V_0}{R}$$

ב. מאחר ו- $I_2 = I_4$ אזי $I_3 = 0$ ומכאן $V_3 = 0$.

ג. יתר על-כן, $I_1 = I_5$ דבר הגורר $V_0 = V_1 + V_5$ לכן, כמו בסעיף א', $I_1 = I_5 = \frac{1}{2} \frac{V_0}{R}$.

ד. על-סמך החישובים הנ"ל, אפשר לחשב את הזרם אשר זורם בסוללה. על-סמך KCL בצומת A

$$(1.37) \quad I_1 + I_2 + I_6 = 0 \Rightarrow I_6 = -\frac{1}{2} \frac{V_0}{R} - \frac{1}{2} \frac{V_0}{R} = -\frac{V_0}{R}$$

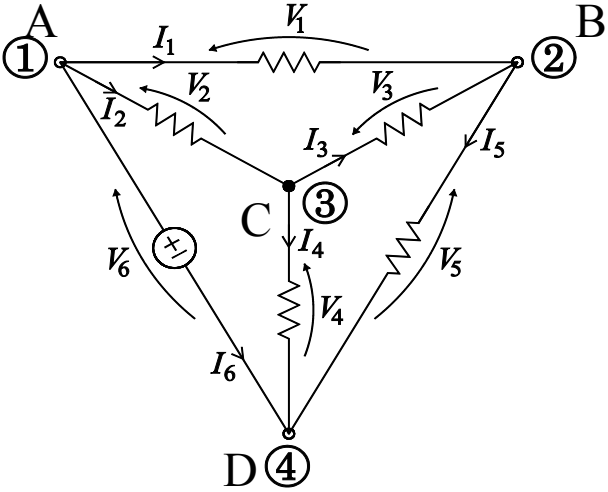
ה. מסקנה: ההתנגדות השקולה שרואה הסוללה היא R .

ו. (לימוד עצמי) לבחון את המקרים הבאים:

$R_3 = 0$ ■

$R_3 \rightarrow \infty$ ■

$R_2 = R_4 = \alpha R$ & $R_1 = R_5 = \beta R$ ■ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



הפרק השני - רכיבי המעגל החשמלי

2.1 מיון רכיבים במעגל חשמלי

הרכיבים במעגל החשמלי ניתנים לחלוקה באופן כללי לשתי קבוצות – רכיבים פסיביים ורכיבים אקטיביים. הרכיבים האקטיביים מספקים אנרגיה למעגל ועשויים להיות מקורות, או מגברים. הרכיבים הפסיביים מתחלקים גם הם לשתי קבוצות: לכאלה הצורכים אנרגיה כמו למשל הנגד, ולכאלה שאוגרים אנרגיה (רכיבים ריאקטיביים) כמו הסליל והקבל.

לכל רכיב פסיבי יכול להיות שילוב כלשהו מהתכונות:

א. רכיב תלוי זמן, או לא.

ב. רכיב לינארי, או לא.

אם ניקח כדוגמא נגד, הרי שעל-מנת להגדיר את טיבו וצורת התנהגותו, עלינו להגדיר את הקשר בין הזרם הזורם דרכו לבין המתח השורר על-פניו.

2.2 נגד

הנגד הוא דוגמא לרכיב פסיבי הצורך אנרגיה והופך אותה לחום. נגדיר את הנגד על-ידי הקשר בין המתח החשמלי על-פניו לזרם החשמלי הזורם דרכו. באופן הכללי ביותר:

$$(2.1) \quad V(t) = f[I(t), t]$$

כאשר נשרטט מעגל חשמלי, סימונו של הנגד במעגל יהיה:



איור 2.1: תיאור סכמטי של נגד

המקרה הראשון בו נדון הוא הנגד הפשוט ביותר – הנגד הליניארי הקבוע בזמן.

2.2.1 נגד ליניארי קבוע בזמן:

במקרה זה, (2.1) מצטמצם ל-

$$(2.2) \quad V(t) = R I(t)$$

כאשר ל- R אנו קוראים **ההתנגדות** המאפיינת את הנגד. לחילופין ניתן לרשום:

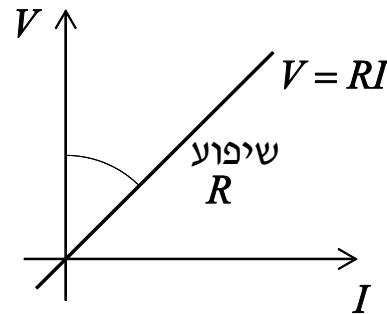
$$(2.3) \quad I(t) = \frac{1}{R} V(t) \equiv G V(t)$$

ול- G אנו קוראים **מוליכות**. החוק הנ"ל, המאפיין את הנגד הליניארי והקבוע בזמן הוא **חוק אוהם**. ועל שמו של אוהם נקראות יחידות ההתנגדות:

$$(2.4) \quad [R] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} = \Omega - \text{ohm} \quad [G] = \frac{\text{Ampere}}{\text{Volt}} = \Omega^{-1} - \text{mho}$$

הקשר בין המתח השורר על-פני נגד זה לבין הזרם הזורם דרכו, הוא קשר לינארי כאשר השיפוע הוא קבוע בזמן.

ניתן לתאר את הנגד על-ידי עקום במישור I - V , עקום זה ייקרא אופיין מתח-זרם של הרכיב. האופיין המתאר את הקשר (2.2):

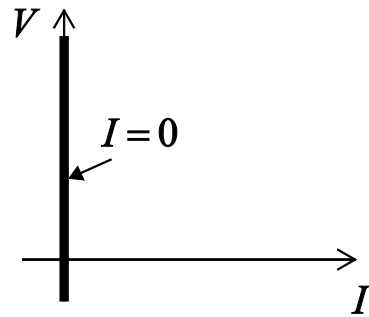


איור 2.2 : אופיין מתח-זרם של נגד לינארי

באמצעות נגד זה נוכל להגדיר שני מושגים חשובים נוספים בתורת המעגלים החשמליים:

א. **נתק** – במצב של נתק, לכל מתח השורר על-פניו, הזרם דרכו הוא אפס.

האופיין המתאים הינו:



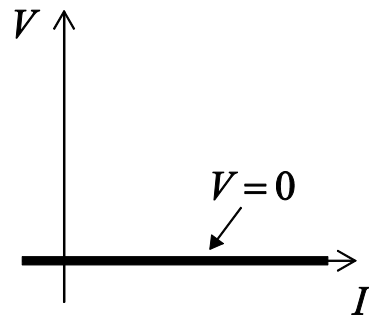
(2.5)

$$I = \frac{V}{R}; \quad I \rightarrow 0 \quad \begin{matrix} R \rightarrow \infty \\ |V| < \infty \end{matrix}$$

כפי שניתן לראות, הנתק שקול לנגד עם התנגדות אינסופית.

איור 2.3: אופיין מתח-זרם עבור נתק

ב. **קצר** – במצב של קצר, לכל זרם הזורם דרכו, המתח השורר על-פניו הוא אפס. האופיין המתאים הינו:



כפי שניתן לראות, הקצר שקול לנגד עם התנגדות אפס.

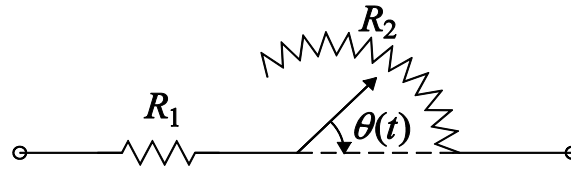
איור 2.4: אופיין מתח-זרם עבור קצר

2.2.2 נגד לינארי תלוי זמן

במידה והנגד הלנארי תלוי בזמן, (2.1) הופך להיות:

$$(2.6) \quad V(t) = R(t) I(t)$$

כלומר קשר לינארי עם שיפוע שאינו קבוע בזמן. ניתן לתאר נגד כזה **למשל** על-ידי הסכמה:



איור 2.5: סכמה של נגד לינארי תלוי זמן

ואז יתקיים:

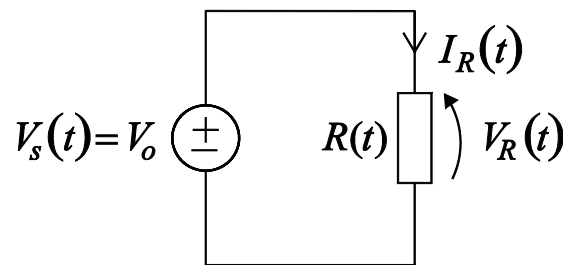
$$(2.7) \quad R(t) = R_1 + R_2 f(t)$$

דוגמא #1: נגד לינארי פשוט משתנה בזמן

יהי נתון הנגד המשתנה הרמונית בזמן לפי הקשר הבא:

$$(2.8) \quad R(t) = R_1 + R_2 \cos^2(\omega t)$$

נציב את הרכיב הנ"ל במעגל שבאיור 2.6, ונחפש את הזרם הזורם דרכו:



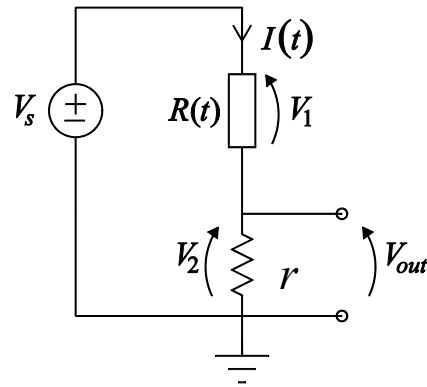
$$(2.9) \quad I_R(t) \underset{OHM}{=} \frac{V_R(t)}{R(t)} \underset{KVL}{=} \frac{V_S(t)}{R(t)} = \frac{V_0}{R_1 + R_2 \cos^2(\omega t)}$$

איור 2.6: מעגל חשמלי פשוט המכיל נגד לינארי משתנה בזמן

דוגמא #2: התנגדות כפונקציה של הטמפרטורה

התנגדות המשתנה עם הטמפרטורה הוא מודל מציאותי מכיוון שכאשר זורם זרם דרך הנגדים לאורך זמן, אלה מתחממים והתנגדותם לא נותרת קבועה, ויש צורך להתחשב בזה. נזכור שהטמפרטורה הינה פונקציה של הזמן ועל-כן:

$$(2.10) \quad R(t) = R_1 + \alpha T(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



איור 2.7: מעגל חשמלי פשוט המכיל התנגדות תלויה בטמפרטורה

נציב רכיב זה במעגל שבאיור 2.7 ונחפש את מתח היציאה:

$$(2.11) \quad V_{out}(t) \underset{KVL}{=} V_2(t) \underset{OHM}{=} I(t) r$$

$$(2.12) \quad I(t) \underset{OHM}{=} \frac{V_1(t) + V_2(t)}{r + R(t)} \underset{KVL}{=} \frac{V_0}{r + R(t)}$$

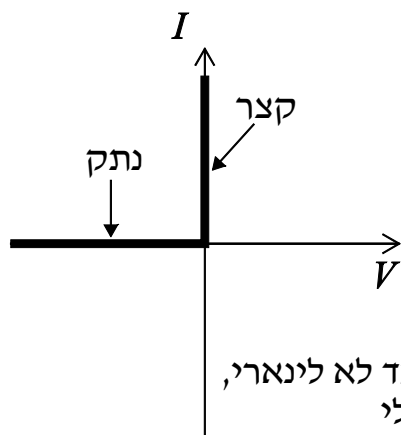
ולכן:

$$(2.13) \quad V_{out}(t) = r I(t) = V_0 \frac{r}{r + R(t)} = V_0 \frac{r}{r + R_1 + \alpha T(t)}$$

נשים לב שהמתח על-פני הנגד r , תלוי בשינויים הזמניים ובטמפרטורה של הנגד R ! במילים אחרות במעגל הזה שינויי טמפרטורה מתורגמים לשינויי מתח.

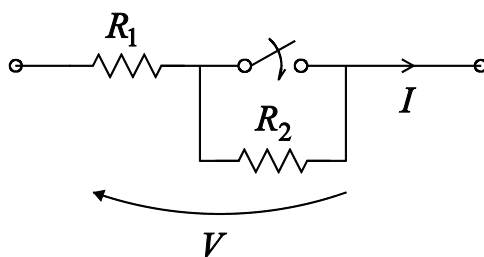
2.2.3 נגד לא ליניארי

נגד לא ליניארי, מאופיין על-ידי עקום מתח-זרם לא ליניארי, לדוגמא:



איור 2.8 : אופיין מתח-זרם של נגד לא ליניארי, מתג אלקטרוני אידיאלי

תרשים זה מייצג מתג אלקטרוני אידיאלי. עבור מתחים חיוביים, הרכיב מהווה קצר וכל זרם יכול לזרום דרכו, ועבור מתחים שליליים, נתק (מודל אידיאלי של דיודת מל"מ – מוליכים למחצה). דוגמא אחרת לנגד לא ליניארי, הוא מתג לא אידיאלי. מתג כזה מתאפיין בכך שעבור מתח שלילי קיים איזשהו זרם ("זרם זליגה"). עבור מתח חיובי, המתח הנופל על-פני המתג אינו שווה לאפס זהותית. נתייחס לסכמה המתוארת באיור 2.9.



איור 2.9 : סכמה מתג לא אידיאלי

כאשר ידוע:

$$(2.14) \quad R_2 \gg R_1$$

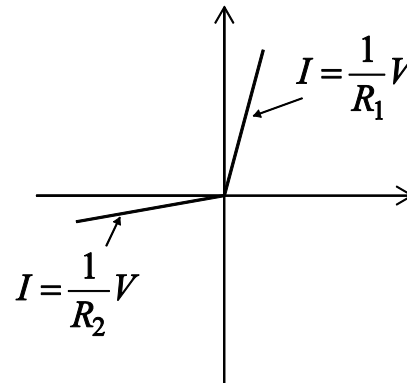
כאשר המתג סגור (נאמר עבור ממתחים חיוביים על המתג), הזרם דרך ההתקן הינו:

$$(2.15) \quad I = \frac{V}{R_1}$$

כאשר המתג פתוח (נאמר עבור ממתחים שליליים על המתג), הזרם דרך ההתקן הינו:

$$(2.16) \quad I = \frac{V}{R_1 + R_2} \cong \frac{V}{R_2}$$

והאופייין המתאים הינו:



איור 2.10: אופייין מתח-זרם של מתג לא אידיאלי

דוגמא נוספת היא **דיודת מוליך למחצה (מל"מ) – מעשית**. משוואת אופיין הדיודה הינה:

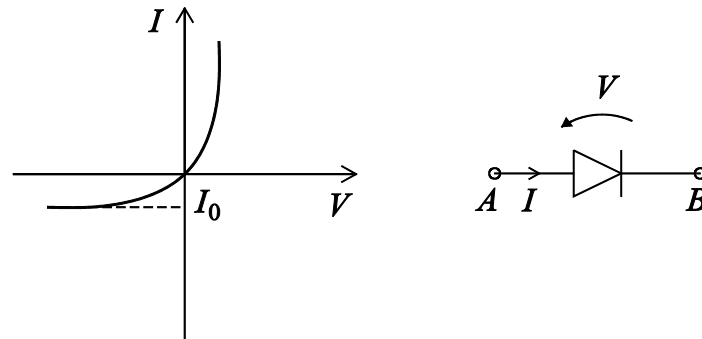
$$(2.17) \quad I = I_0 \left(\exp\left(\frac{V}{V_0}\right) - 1 \right)$$

כאשר I_0 הינו קבוע התלוי במאפייני הדיודה, והוא יכול להיות מסדר גודל של כמה מילי-אמפרים, מיקרו-אמפרים או ננו-אמפרים ו- V_0 הוא קבוע הנתון בביטוי הבא:

$$(2.18) \quad V_0 = \frac{k_B T}{e} = 0.026 \text{ Volt}$$

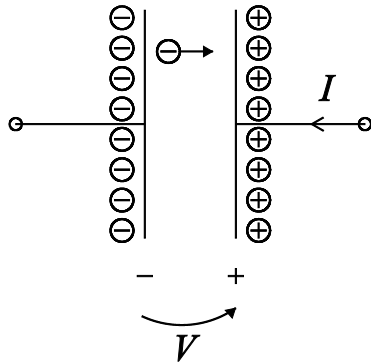
300°K – טמפי החדר

סימון הדיודה במעגל וציור האופיין מובאים באיור 2.11 להלן:



איור 2.11: סימון ואופיין מתח-זרם של דיודת מל"מ מעשית

תכונות נוספות לגבי הדיודה, תדון בהרחבה בקורסים על מוליכים למחצה.



איור 2.12: דיודת ואקום

2.12. דוגמא נוספת ואחרונה היא **דיודת ואקום** המתוארת באיור 2.12. משוואת האופין שלה:

$$(2.19) \quad I = \beta V^{\frac{3}{2}}$$

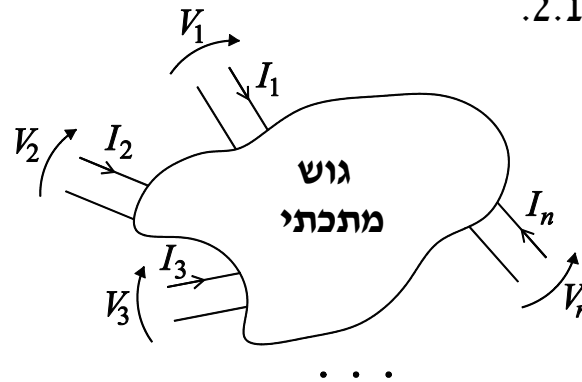
למעשה, הדיודה דומה לנגד שההתנגדות שלו תלויה במתח שעל-פניו:

$$(2.20) \quad G = G(V) = \beta V^{\frac{1}{2}} \quad I = G(V) V$$

ולכן רכיב זה בהחלט לא מקיים קשר ליניארי בין הזרם דרכו למפל המתח על-פניו.

2.2.4 הכללה – ריבוי הדקים:

בדומה לנגד הפשוט שהכרנו עד כה, דהיינו, נגד עם שני הדקים ומאופיין על-ידי מתח אחד וזרם אחד, נגדיר נגד מוכלל המכיל יותר הדקים ומאופיין על-ידי אוסף מתחים וזרמים. דוגמא אופיינית לנגד מרובה הדקים מובאת באיור 2.13.



איור 2.13: גוש מתכתי – נגד מרובה הדקים

הנגד הנ"ל מוגדר על-ידי הקשר הלינארי-מטריצי הבא:

$$(2.21) \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix}$$

בצורה מפורשת המדידה של כל רכיב במטריצה נעשית על-ידי הקשר הבא:

$$(2.22) \quad R_{ij} = \left. \frac{V_i}{I_j} \right|_{I_{k \neq j} = 0}$$

לדוגמא, עבור המקרה הדו-מימדי מתקיים:

$$(2.23) \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

בהנחה ש- $I_2 = 0$ ונקבל:

$$(2.24) \quad V_1 = R_{11}I_1$$

שזה מה שאנו מכירים כבר, אך נקבל גם:

$$(2.25) \quad V_2 = R_{21}I_1$$

תופעה זו נקראת "צימוד". כלומר זרם דרך ההדק הראשון גורם למתח לשרור על-פני ההדק השני.

הגוש המתכתי הוא זה שמצמד בין ההדקים השונים.

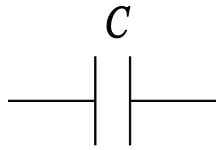
הערה: מטריצת הצימוד היא בדרך כלל סימטרית, דהיינו במקרה הדו ממדי מתקיים:

$$(2.26) \quad R_{12} = R_{21}$$

או באופן כללי:

$$(2.27) \quad \boxed{R_{ij} = R_{ji}}$$

2.3 קבל



קבל הינו רכיב פסיבי נוסף, או למעשה ראקטיבי אשר בנפחו נאגרת אנרגיה חשמלית. סימונו המקובל במעגל החשמלי נתון באיור 2.14. הקבל מקיים קשר ליניארי בין המתח על-פניו לבין המטען האגור בו (על-פני לוחותיו):

$$(2.28) \quad Q = CV$$

כאשר מקדם הקשר C , הינו הקיבול ביחידות של *Farad* או בקיצור F . על-מנת לאפיין את הקבל כרכיב במעגל חשמלי, עלינו למצוא את הקשר בין המתח השורר על-פניו לבין הזרם הזורם דרכו. נזכר בהגדרה:

$$(2.29) \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

ונקבל את הקשר הדיפרנציאלי הבא:

$$(2.30) \quad I = \frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} (CV) = C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt}$$

עבור קבל פשוט בו הקיבול קבוע בזמן, נקבל את הקשר:

$$(2.31) \quad I_C = C \frac{dV_C}{dt} = C \dot{V}_C$$

או לחילופין, על-ידי אינטגרציה של (2.30), נקבל:

$$(2.32) \quad V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I_C(t') dt'$$

או אם ידוע תנאי התחלה של המתח על הקבל, למשל ב- $t = 0$, אז (2.32) הופכת להיות:

$$(2.33) \quad V_C(t) = V_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I_C(t') dt'$$

בפרט, עבור זרם הנתון על-ידי פונקציה דלתה של דירק (הלם) קרי

$$(2.34) \quad I_C(t) = q_0 \delta(t - t_0)$$

אזי

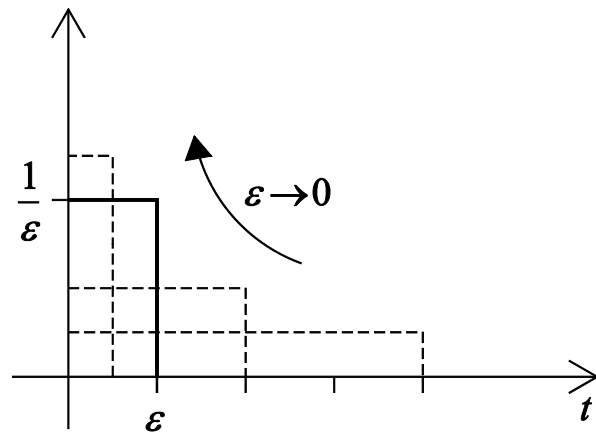
$$(2.35) \quad \begin{aligned} V_C(t) &= V_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t dt' q_0 \delta(t' - t_0) \\ &= \begin{cases} V_C(0) & t < t_0 \\ V_C(0) + \frac{q_0}{C} & t \geq t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

מסקנה: עירור של פונקציה דלתה (הלם) משנה את תנאי ההתחלה.

תיאור איכותי של פונקציית דלתה של דירק (הלם) מובא

באיור 2.15 -- הגדרה ודיון מעמיק יותר יינתנו במסגרת

המקצוע "אותות ומערכות"



(2.36)

$$\delta(t) \approx \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

איור 2.15: תאור איכותי של פונקציית דלתה

ולהלן כמה מתכונותיה

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \delta(u - u_0) f(u) = f(u_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} du \delta(u - u_0) = 1$$

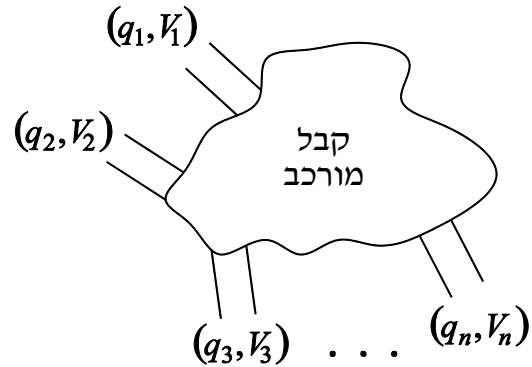
$$(2.37) \quad \delta[f(u)] = \frac{\delta[u - u_0]}{|f'(u_0)|}; \quad f(u_0) = 0; \quad f'(u_0) \neq 0$$

$$\delta(au - u_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(u - \frac{u_0}{a}\right)$$

הערה: מתוך התכונה האחרונה נקל לראות שהיחידות של פונקציית דלתה הן הפוכות ליחידות של

הארגומנט

$$(2.38) \quad [\delta(t)] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{[\text{sec}]}$$



איור 2.16: קבל מורכב – מרובה הדקים

בדומה להגדרת הנגד מרובה ההדקים, ניתן להגדיר קבל מורכב עם n זוגות הדקים:

$$(2.39) \quad \vec{q} = \underline{\underline{C}} \cdot \vec{V}$$

המשוואה לעיל הינה משוואה וקטורית. ניתן לרשום אותה גם בצורה הבאה:

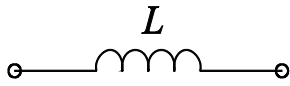
$$(2.40) \quad \vec{I} = \underline{\underline{C}} \frac{d\vec{V}}{dt}$$

כאשר הסימונים לעיל מתייחסים ל:

$$(2.41) \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \vec{q} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כמו שראינו עבור נגד מרובה הדקים, גם בקבל המורכב נקבל תופעות צימוד. עבור קבל, תופעה זו נקראת צימוד קיבולי. לגבי תופעה זו נרחיב בפרק התשיעי.

2.4 סליל



איור 2.17: תיאור סכמטי של סליל

רכיב ראקטיבי נוסף הינו המשרון, או הסליל. הסליל אוגר אנרגיה מגנטית במרחב נתון. סימונו במעגל חשמלי נתון בשרטוט. הסליל מקיים קשר ליניארי בין הזרם הזורם דרכו לבין השטף המגנטי דרכו:

$$(2.42) \quad \Phi = L I$$

כאשר מקדם הקשר L , הינו ההשראות העצמית של הסליל, והוא נמדד ביחידות *Henry*. על-מנת לאפיין את הסליל כרכיב במעגל חשמלי, עלינו למצוא את הקשר בין המתח השורר על-פניו לבין הזרם הזורם דרכו. נזכר בחוק פרדיי:

$$(2.43) \quad V = \frac{d\Phi}{dt}$$

ונקבל את הקשר הדיפרנציאלי הבא:

$$(2.44) \quad V = \frac{d}{dt} \Phi = \frac{d}{dt} (LI) = L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}$$

במידה ומדובר בסליל פשוט עבורו ההשראות קבועה בזמן, נקבל את הקשר הבא המגדיר סליל פשוט:

$$(2.45) \quad V_L = L \frac{dI_L}{dt} = LI_L$$

או לחילופין, על-ידי אינטגרציה של (2.45), נקבל:

$$(2.46) \quad I_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(t') dt'$$

או אם ידוע תנאי ההתחלה של הזרם בסליל, למשל ב- $t = 0$, אז (2.46) הופכת להיות:

$$(2.47) \quad I_L(t) = I_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t') dt'$$

במידה והמתח הוא פונקציה דלתה של דירק (הלם) קרי

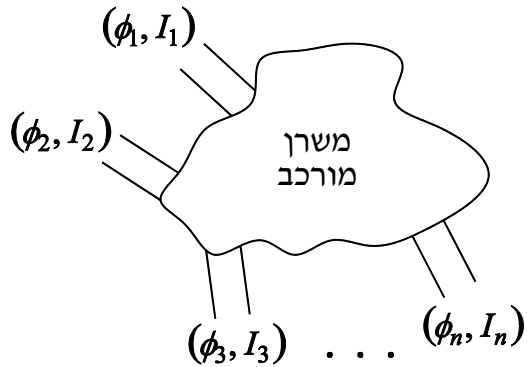
$$(2.48) \quad V_L(t) = \Phi_0 \delta(t - t_0)$$

אזי

$$(2.49) \quad \begin{aligned} I_L(t) &= I_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t dt' \Phi_0 \delta(t' - t_0) \\ &= \begin{cases} I_L(0) & t < t_0 \\ I_L(0) + \frac{\Phi_0}{L} & t \geq t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

מסקנה: עירור של פונקציה דלתה (הלם) משנה את תנאי ההתחלה.

גם כאן ניתן להגדיר סליל מורכב עם n זוגות הדקים:



$$(2.50) \quad \vec{\Phi} = \underline{\underline{L}} \cdot \vec{I}$$

המשוואה לעיל הינה משוואה וקטורית. ניתן לרשום אותה גם בצורה:

$$\vec{V} = \underline{\underline{L}} \cdot \frac{d\vec{I}}{dt}$$

(2.51) **איור 2.18:** משרן מורכב – מרובה הדקים

כאשר הסימונים לעיל מתייחסים ל:

$$(2.52) \quad \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \vec{\Phi} \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

גם כאן יהיו תופעות צימוד. הצימוד ההשראותי ידון בהרחבה בפרק התשיעי.

2.5 שיקולי הספק ואנרגיה ברכיבים פסיביים

בפרק הראשון הגדרנו את הזרם כקצב השינוי הזמני של כמות המטען, דהיינו:

$$(2.53) \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

ואילו את המתח הגדרנו כאנרגיה ליחידת מטען, קרי:

$$(2.54) \quad V \sim \frac{\Delta W}{\Delta Q}$$

ההספק מוגדר כקצב השינוי הזמני של האנרגיה, כלומר:

$$(2.55) \quad P \sim \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta Q} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = VI$$

לכן, נגדיר את ההספק הרגעי של רכיב במעגל חשמלי בתור המכפלה בין מפל המתח השורר על-פניו לבין הזרם הזורם דרכו, ברגע נתון. כלומר:

$$(2.56) \quad P(t) = V(t) I(t)$$

כבר ראינו בפרק הראשון שהגודל P כפוף לכיווני הייחוס שבחרנו, מקבל ערכים חיוביים עבור רכיבים הצורכים אנרגיה, וערכים שליליים עבור רכיבים המספקים אנרגיה למעגל החשמלי. יחידות הספק:

$$(2.57) \quad [P] = Volt \cdot Ampere = \frac{Joule}{Coulomb} \cdot \frac{Coulomb}{sec} = \frac{Joule}{sec} \triangleq Watt.$$

סך כל האנרגיה שרכיב מסוים צורך או מספק למעגל בקטע הזמן (t_0, t_1) , הינו:

$$(2.58) \quad W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} P(t') dt'$$

נבחן עתה את ההספק/אנרגיה ברכיבים שהספקנו להכיר עד-כּה:

א. נגד:

$$(2.59) \quad P_R(t) = V_R(t)I_R(t) \underset{OHM}{=} RI_R^2(t) \geq 0$$

כלומר ההספק הרגעי של נגד (שהתנגדותו חיובית) תמיד חיובי, כלומר הוא תמיד צורך אנרגיה, והופך אותה לאנרגית חום.

ב. קבל:

$$(2.60) \quad \begin{aligned} W_C(0, t) &= \int_0^t V_C(t')I_C(t')dt' = C \cdot \int_0^t V_C \frac{dV_C}{dt'} dt' = C \int_{V_C(0)}^{V_C(t)} V_C dV_C = \frac{1}{2} CV_C^2 \Big|_{V_C(0)}^{V_C(t)} \\ &= \frac{1}{2} C [V_C^2(t) - V_C^2(0)] \end{aligned}$$

בפרט, אם ב $t = 0$ המתח על הקבל הוא אפס נקבל:

$$(2.61) \quad W_C(t) = \frac{1}{2} CV_C^2(t)$$

ג. סליל:

$$\begin{aligned}
 (2.62) \quad W_L(0, t) &= \int_0^t V_L(t') I_L(t') dt' = L \int_0^t I_L \frac{dI_L}{dt'} dt' = L \int_{I_L(0)}^{I_L(t)} I_L dI_L = \frac{1}{2} L I_L^2 \Big|_{I_L(0)}^{I_L(t)} \\
 &= \frac{1}{2} L [I_L^2(t) - I_L^2(0)]
 \end{aligned}$$

ושוב, אם ב $t = 0$ הזרם בסליל הוא אפס נקבל:

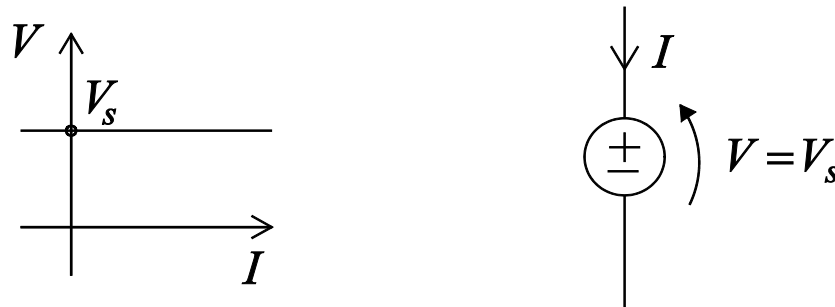
$$(2.63) \quad W_L(t) = \frac{1}{2} L I_L^2(t)$$

2.6 מקורות בלתי תלויים

עד כה, דנו ברכיבים אשר צורכים או אוגרים אנרגיה חשמלית/מגנטית. בסעיף זה, נדון בתיאור הסוגים השונים של מקורות אשר מספקים אנרגיה חשמלית במעגלים החשמליים הפשוטים שנכיר במהלך הקורס. תחילה, נכיר את משפחת המקורות הבלתי-תלויים להבדיל ממקורות מבוקרים (תלויים) בהם נדון בהמשך.

א. מקור מתח בלתי-תלוי אידיאלי:

זהו רכיב, שעבור כל זרם שזורם דרכו, המתח השורר על-פניו הוא נתון וקבוע. האופיין של מקור המתח בלתי-תלוי, וסימונו במעגל החשמלי נתונים באיור 2.19 להלן:

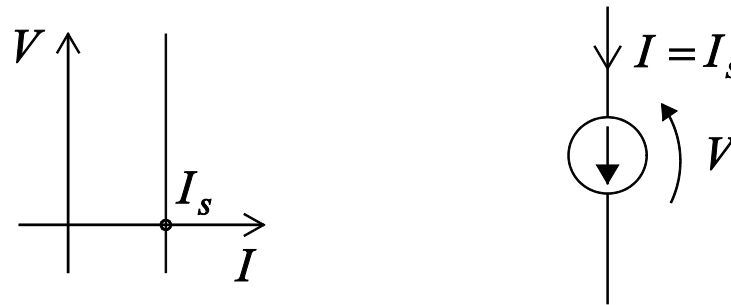


איור 2.19: מקור מתח בלתי תלוי – סימון ואופיין מתח-זרם

נזכור שלפי כיווני הייחוס שבחרנו, ההספק של רכיב כזה הוא שלילי. היינו יכולים להגדיר את הכיוונים הפוך, על-מנת שכביכול הספק המקור יהיה חיובי. חשוב לזכור, שהגדרת הכיוונים הייתה שרירותית אך חייבת להיות עקבית.

ב. מקור זרם בלתי-תלוי אידיאלי:

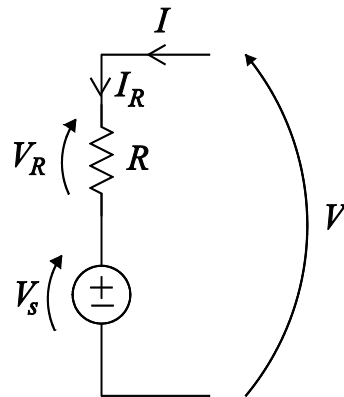
באופן דומה, ניתן להגדיר רכיב שעבור כל מתח השורר על-פניו, הזרם שזורם דרכו הוא קבוע. האופיין של מקור זרם בלתי-תלוי וסימונו במעגל החשמלי נתונים באיור 2.20 להלן:



איור 2.20: מקור זרם בלתי תלוי – סימון ואופיין מתח-זרם

ג. מקור מתח בלתי-תלוי מעשי (לא אידיאלי):

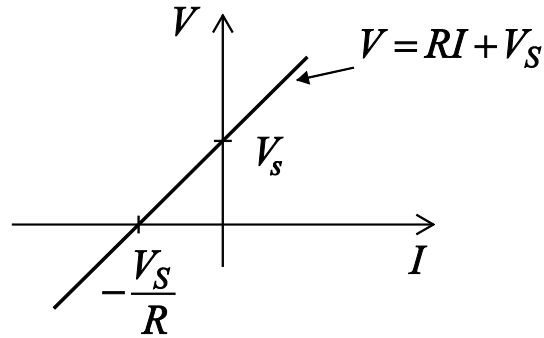
נתבונן בסכמה המתוארת באיור 2.21, וננתח את הרכיב, כלומר נחפש את הקשר בין המתח השורר על פניו לבין הזרם הזורם דרכו:



$$(2.64) \quad V \underset{KVL}{=} V_R + V_S \underset{OHM}{=} RI_R + V_S \underset{KCL}{=} RI + V_S$$

איור 2.21: סכמה של מקור מתח בלתי תלוי מעשי

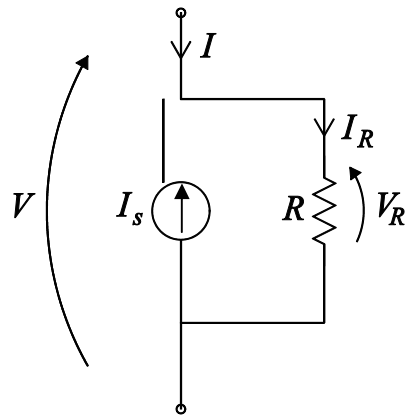
האופייין המתאים לרכיב זה הינו:



איור 2.22: אופייין מתח-זרם של מקור מתח בלתי-תלוי מעשי

ד. מקור זרם לא-תלוי שאינו אידיאלי:

נתבונן בסכמה המתוארת באיור 2.23, וננתח את הרכיב:



(2.65)

$$I \stackrel{KCL}{=} I_R - I_S \stackrel{OHM}{=} G \cdot V_R - I_S \stackrel{KVL}{=} G \cdot V - I_S \Rightarrow V = R \cdot I + R \cdot I_S$$

איור 2.23: סכמה של מקור זרם בלתי תלוי מעשי

נראה כעת את השקילות בין מקור מתח בלתי תלוי מעשי למקור זרם בלתי תלוי מעשי.

ה. שקילות של מקורות (מעגלים שקולים לפי תבנית ונורטון)

הראנו כבר, שלמקור מתח לא אידיאלי משוואת האופיין:

$$(2.66) \quad V = RI + V_S$$

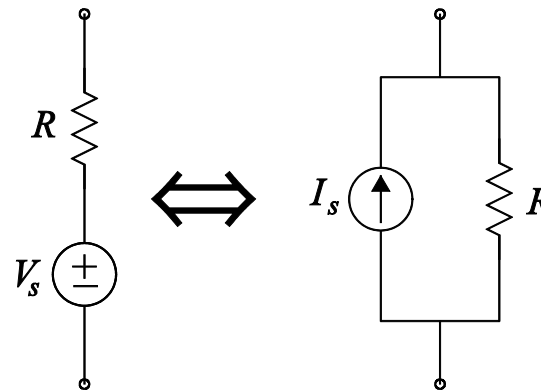
ואילו עבור מקור זרם לא אידיאלי מתקיים:

$$(2.67) \quad V = RI + RI_S$$

לפיכך, אם נבחר

$$(2.68) \quad V_S = RI_S$$

נקבל שמשוואת אופיין מקור זרם מעשי מתלכדת עם משוואת אופיין מקור מתח מעשי בעוצמה הנתונה ב- (2.68). נסכם זאת באיור 2.24 להלן:

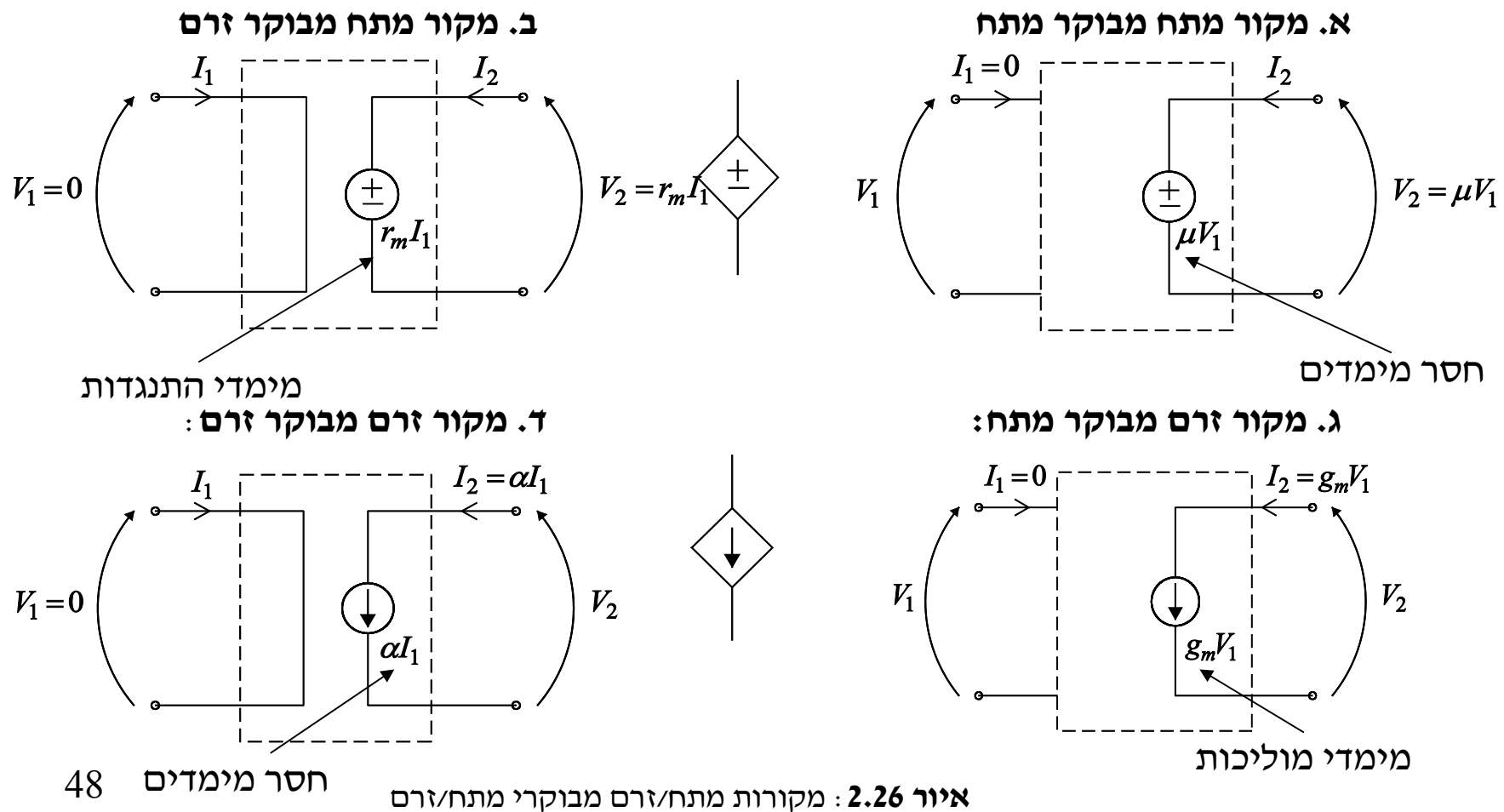


איור 2.24: שקילות של מקורות מתח וזרם מעדיים

המעגל מימין ייקרא **שקול נורטון** בעוד המעגל משמאל ייקרא **שקול תבנית** של המקור לא-אידיאלי.

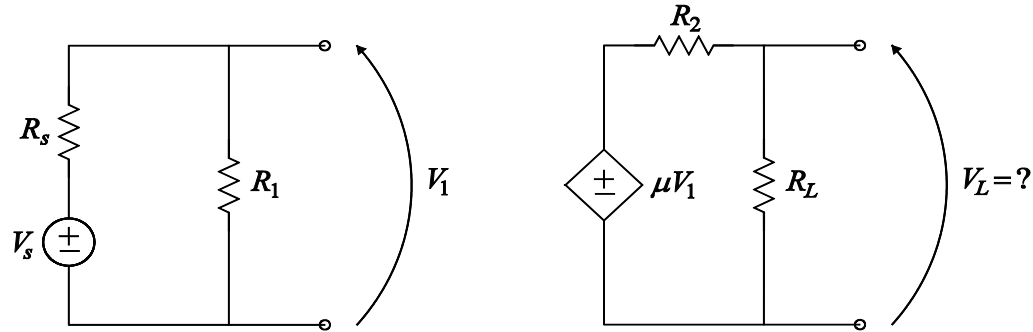
2.7 מקורות מבוקרים

כאשר רצינו לספק אנרגיה למעגל חשמלי, השתמשנו עד כה במקורות בלתי תלויים. ישנה דרך נוספת לספק אנרגיה למעגל – מקורות מבוקרים. מקור מבוקר הינו מקור "המספק" זרם או מתח שהוא יחסי לזרם או מתח במקום אחר במעגל. את המקורות המבוקרים אנו מחלקים לארבעה סוגים כמתואר באיור 2.25:



דוגמא:

באיור 2.27 מתוארים שני מעגלים. המעגל השמאלי מעורר על-ידי מקור בלתי תלוי בעוד הימני מעורר על-ידי מקור מתח המבוקר על-ידי אחד המתחים במעגל השמאלי. אנו מחפשים את המתח על העומס במעגל הימני.



איור 2.27: מעגל חשמלי המכיל מקור מתח מבוקר מתח

נפתור את המעגל כאילו המקור המבוקר היה מקור בלתי תלוי.

לפנינו למעשה שני מחלקי מתח ולכן במעגל השמאלי:

$$(2.69) \quad V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_S} V_S$$

באופן דומה, במעגל הימני מתקיים:

$$(2.70) \quad V_L = \frac{R_L}{R_L + R_2} \mu V_1 = \frac{\mu R_L R_1}{(R_1 + R_S)(R_L + R_2)} V_S$$

הערה: במקורות מבוקרים, הספק הכניסה הוא אפס, והספק היציאה שונה מאפס. כלומר, לכאורה לא מתקיים שימור אנרגיה. הסיבה לכך היא שרכיבים אלה מקבלים הספק ממקור חיצוני. ההספק במערכת נתון על-ידי $P = V_1 I_1 + V_2 I_2$ אולם לפי הגדרה הזרם או המתח בכניסה למקור מבוקר הם אפס לכן, $P = V_2 I_2$.

הפרק השלישי - משפטי רשת

בפרק זה נציג כמה משפטי רשת חשובים וחיוניים לניתוח מעגלים חשמליים. ראשית, נציג את **משפט ההרכבה** (סופרפוזיציה) אשר מהווה כלי חזק בניתוח מעגלים חשמליים ליניאריים הניזונים מכמה מקורות מתח או זרם בו זמנית. לאחר מכן, נציג את **משפט ההצבה**, ככלי עזר לפישוט הצגת מעגל חשמלי מורכב. בסעיף 3.3 מוצג **משפט תבנין-נורטון**. לפי משפט זה, ניתן לאפיין מעגלים מורכבים באמצעות מעגל פשוט המכיל מקור ו"נגד" שקולים בלבד. לבסוף, אנו נציג את משפט ההדדיות אשר מנצל את הסימטריה של רשתות חשמליות פסיביות.

משפטי הרשת אשר נציג בפרק זה, יהוו בסיס חשוב לפתרון כל מעגל חשמלי בעתיד. בסעיפים הבאים, אנו נציג כל אחד מהמשפטים הנ"ל ונציין באילו תנאים הוא תקף ונציג כמה דוגמאות פשוטות לשימוש במשפטי הרשת.

3.1 משפט הסופרפוזיציה (Superposition Theorem)

הגדרה: במערכת ליניארית, כאשר כל תנאי ההתחלה אפס, סה"כ התגובה ל- M מקורות זרם או מתח בלתי תלויים שווה לסכום האלגברי של התגובות (לתנאי התחלה אפס) לכל מקור בנפרד.

$$\vec{y} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{y} = \underline{\underline{A}} \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \vec{y}^{(1)} + \vec{y}^{(2)} + \vec{y}^{(3)}$$

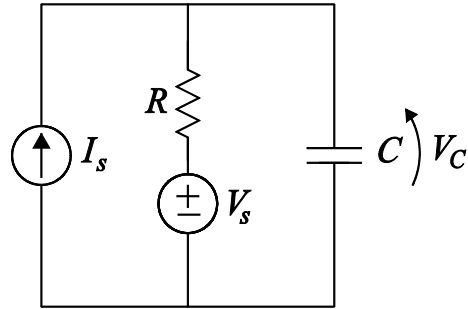
הבהרות

א. בחישוב התגובה לכל מקור בנפרד יש לאפס (לנטרל) את כל המקורות הבלתי תלויים האחרים. כלומר, להחליף כל מקור מתח בלתי תלוי בקצר (עליו שורר מתח אפס) וכל מקור זרם בלתי תלוי בנתק (דרכו זורם זרם אפס).

ב. כאשר הרשת כוללת רכיבים בעלי "זיכרון" (קבלים, סלילים), עקרון הסופרפוזיציה מופעל בהנחה שתנאי התחלה אפס. אם זה אינו המצב, זאת אומרת, כאשר למעגל נתון יש מקורות ותנאי התחלה שונים מאפס מחלקים את התגובה לשניים: התגובה ל"זיכרון", כלומר לתנאי ההתחלה והתגובה למקורות כפי שנראה בעתיד.

ג. אין להפעיל את משפט הסופרפוזיציה עבור מקורות תלויים.

ד. דוגמא:

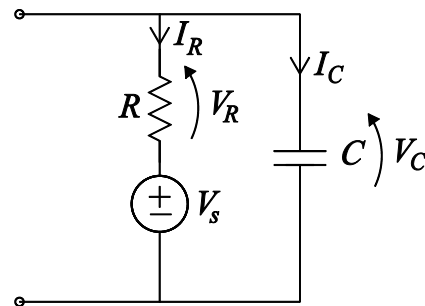


נתון מעגל חשמלי עם מקורות זרם ומתח קבועים בזמן כמתואר באיור 3.1. נרצה לחשב את תגובת המעגל, V_C במצב מתמיד (לאחר שכל תופעות המעבר דעכו). נשתמש במשפט הסופרפוזיציה, ונחשב את התגובה לכל מקור בנפרד, ולבסוף נסכם את כל התגובות.

איור 3.1: קבל פשוט המוזן משני מקורות בלתי תלויים

א. תגובת המעגל למקור המתח V_s :

נאפס את מקור הזרם – נחליף אותו בנתק $I_s = 0$, כפי שניתן לראות באיור 3.2:



איור 3.2: שלב א' – איפוס מקור הזרם

מכיוון שמקור המתח קבוע בזמן, הפתרון במצב מתמיד במעגל הינו קבוע בזמן, כלומר:

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} V_{C,1} = 0$$

אם ניזכר בהגדרת הקבל (הקשר בין המתח על פניו לזרם דרכו):

$$(3.2) \quad I_{C,1} = C \frac{dV_{C,1}}{dt}$$

נבין שבמעגלי זרם ישר, במצב מתמיד, הזרם דרך קבל הינו אפס. כך גם בדוגמא שלנו. כעת, לפי KCL:

$$(3.3) \quad I_{R,1} = -I_{C,1} = 0$$

ולכן,

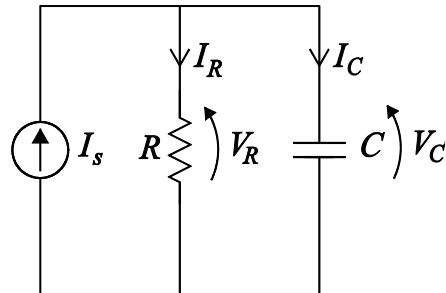
$$(3.4) \quad V_{R,1} = RI_{R,1} = 0$$

כעת התגובה של המעגל למקור המתח בנפרד ברורה. לפי KVL מתקיים:

$$(3.5) \quad V_{C,1} = V_{S,1} + V_{R,1} = V_{S,1}$$

ב. תגובת המעגל למקור הזרם I_S :

נאפס את מקור המתח – נחליפו בקצר $V_S = 0$, כפי שניתן לראות באיור 3.3:



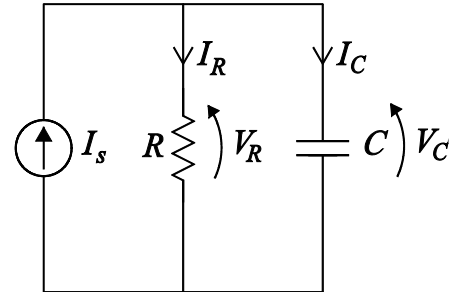
איור 3.3: שלב ב' – איפוס מקור המתח

גם כאן הפתרון במצב מתמיד הוא כזה בו אין זרם דרך הקבל.

$$(3.6) \quad V_{C,2} \underset{KVL}{=} V_{R,2} \underset{OHM}{=} RI_{R,2} \underset{KCL}{=} R(I_{S,2} - I_{C,2}) = RI_{S,2}$$

כעת על סמך משפט הסופרפוזיציה ניתן לקבל את הפתרון הכולל:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} V_C &= V_{S,1} + RI_{S,2} \\ I_R &= 0 + I_{S,2} = I_{S,2} \end{aligned}$$



3.2 משפט ההצבה (Substitution Theorem)

משפט זה מאפשר להחליף ענף כלשהו ברשת בענף המכיל אך ורק מקור בלתי תלוי אחד (מקור זרם או מתח), מבלי שהדבר ישפיע על ערכי הזרם או המתח בשאר ענפי הרשת.

ניסוח המשפט

נתונה רשת בעלת פתרון יחיד לכל הענפים. נניח שבענף מסוים מתקבל מתח V_0 וזרם I_0 , אזי אם:

א. נחליף את האלמנט בענף במקור מתח בלתי תלוי אידיאלי בעל מתח V_0 , או

ב. נחליף את האלמנט בענף במקור זרם בלתי תלוי אידיאלי בעל זרם I_0 ,

ואם לרשת החדשה יש פתרון יחיד, אזי פתרון הרשת החדשה זהה לפתרון הרשת המקורית.

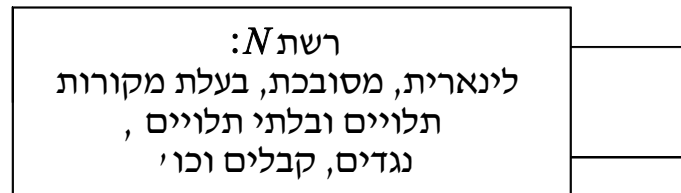
הערות

א. המשפט הנ"ל נכון עבור רשת כלשהי (ליניארית ולא-ליניארית) אך בלתי תלויה בזמן.

ב. השימוש במשפט ההצבה כעזר לפתרון רשתות הינו מוגבל, כיוון וניסוח המשפט דורש ידיעה מראש של ערכי הזרם או המתח בענף המתאים. כלומר על המעגל להיות כבר "פתור" על-מנת להשתמש במשפט זה. אי לכך משפט ההצבה שימושי בעיקר ככלי עזר תיאורטי.

3.3 משפטי תבנין-נורטון (Thevenin-Norton Equivalent Circuits Theorems)

במגוון רחב של מקרים, צרכן מסוים מתחבר אל רשת חשמלית לינארית מורכבת. מנקודת ראות של הצרכן, המבנה הפנימי של הרשת אינו מעניין כל עוד הרשת מספקת את התנאים הנדרשים לצרכן, לפיכך קיים עניין באפיון הרשת בצורה פשוטה. משפט תבנין-נורטון מאפשר לתאר בצורה פשוטה כל רשת חשמלית לינארית באמצעות מקור מתח/זרם שקול ו"נגד" שקול. הצגה זו מאפשרת לנתח את הרשת הנדונה בעת התחברותה לעומסים שונים ללא כל צורך בפתרון של הרשת. להלן נתונה רשת בעלת 2 הדקים חיצוניים (המאפשרים חיבור לעומס או לחלקי מעגל אחרים):



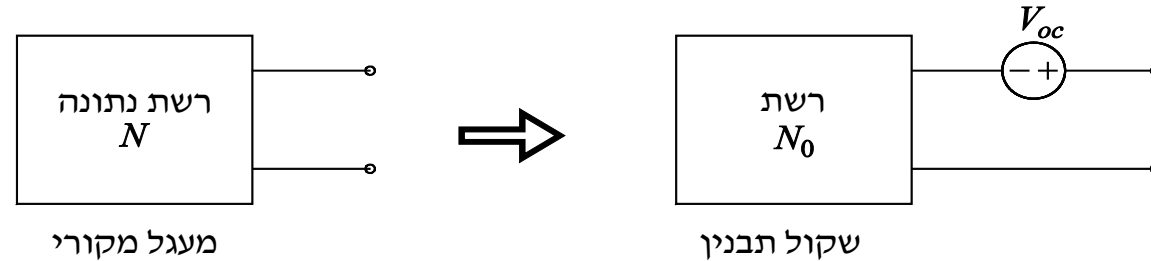
איור 3.4 : רשת לינארית כללית

הנחות:

- א. הרשת לינארית, כלומר מורכבת מרכיבים ליניאריים (העומס לא בהכרח לינארי).
- ב. הרשת איננה כוללת מקורות מבוקרים התלויים בגדלים שמחוצה לה, וכן איננה משפיעה ישירות על מקורות מבוקרים שמחוצה לה.
- ג. קיים פתרון יחיד כאשר מחברים מקור זרם או מתח בלתי תלוי בין הדקי הרשת.

הגדרת המעגל השקול של תבנין

באיור 3.5 מתואר שקול תבנין של רשת חשמלית לינארית נתונה :



איור 3.5 : שקול תבנין עבור רשת לינארית

ערך מקור המתח והרשת החדשה מתקבלים מהרשת המקורית באופן הבא :

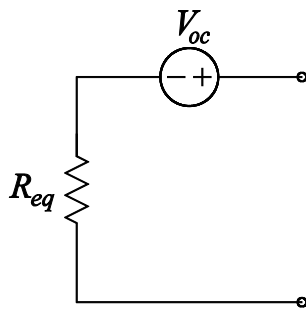
א. V_{oc} הוא המתח בין ההדקים כאשר ישנו נתק ביניהם (עומס לא מחובר) (oc – Open Circuit)

ב. N_0 היא הרשת המתקבלת על-ידי איפוס כל המקורות הבלתי תלויים ברשת המקורית ; מקורות מבוקרים נשארים ללא שינוי.

ג. תנאי התחלה ב- N_0 הם אפס.

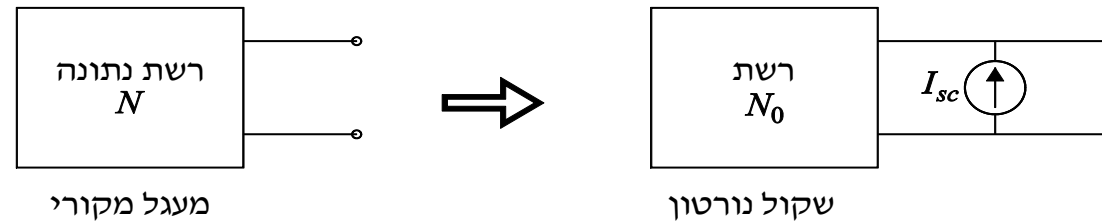
הבהרות:

שקול תבנין תקף גם לרשת הכוללת קבלים וסלילים. כאשר הרשת התנגדותית בלבד, הרי שניתן להחליף את הרשת N_0 בהתנגדות שקולה שלה R_{eq} , ומתקבלת הצורה הפשוטה של שקול תבנין המתוארת באיור 3.6 להלן :



איור 3.6 : שקול תבנין עבור רשת התנגדותית

הגדרת המעגל השקול של נורטון



איור 3.7 : שקול נורטון עבור רשת לינארית

ערך מקור הזרם והרשת החדשה מתקבלים מהרשת המקורית באופן הבא :

א. I_{sc} הוא הזרם בין ההדקים כאשר קיים קצר ביניהם (עומס מקוצר, (sc – short circuit

ב. N_0 היא הרשת המתקבלת על-ידי איפוס כל המקורות הבלתי תלויים ברשת המקורית ; מקורות מבוקרים נשארים ללא שינוי.

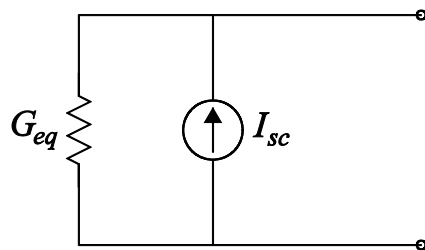
ג. תנאי התחלה ב- N_0 הם אפס.

הבהרות:

שקול נורטון תקף גם לרשת הכוללת קבלים וסלילים.

כאשר הרשת התנגדותית בלבד, הרי שניתן להחליף את

הרשת N_0 במוליכות שקולה $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$, ומתקבלת



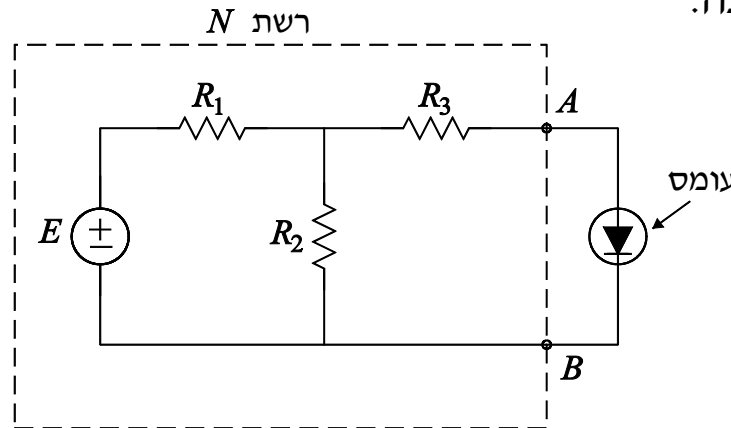
איור 3.7 : שקול נורטון עבור רשת התנגדותית . הצורה הפשוטה של שקול נורטון המתוארת באיור 3.7 .

משפט תבנין-נורטון

כל הרשתות שהוגדרו לעיל (הרשת המקורית, שקול תבנין ושקול נורטון) הינן שקולות, כלומר בעלות אופיין מתח-זרם זהה.

דוגמא #1: משפט תבנין

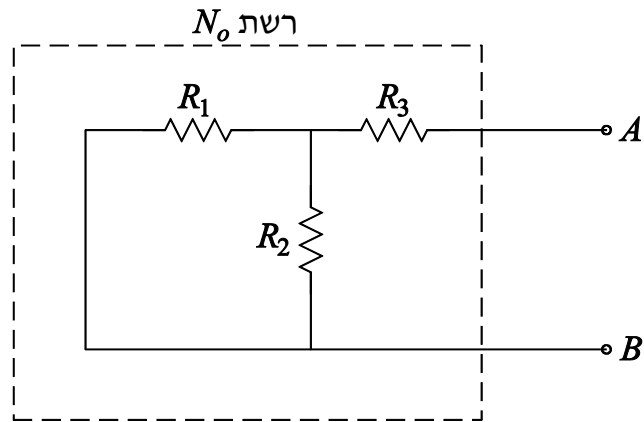
לפנינו מעגל חשמלי הכולל עומס שאינו בהכרח ליניארי, ורשת חשמלית ליניארית. יש לחשב את שקול תבנין של הרשת הנתונה.



איור 3.8: רשת ליניארית המחוברת לעומס לא ליניארי

מקור המתח השקול הינו המתח השורר בין ההדקים כאשר העומס מנותק. לפי מחלק מתח:

$$(3.8) \quad V_{oc} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



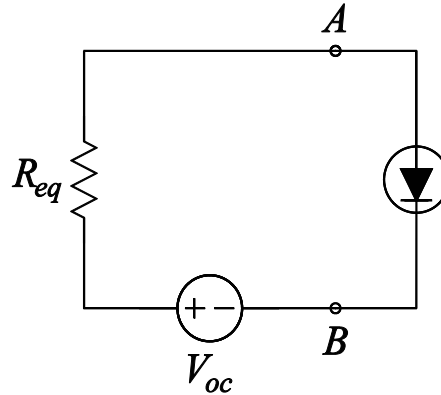
איור 3.9 : חישוב ההתנגדות השקולה

כעת נעבור לחישוב ההתנגדות השקולה בין ההדקים, לצורך זה נאפס את מקורות המתח ונקבל את המעגל המתואר באיור 3.9.

ומכאן, חישוב ההתנגדות השקולה פשוט והינו

$$(3.9) \quad R_{eq} = R_3 + R_1 \parallel R_2$$

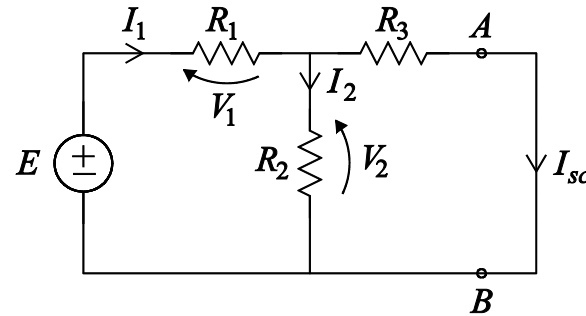
לכן, המעגל השקול לפי תבנית הוא :



איור 3.10 : מעגל שקול לפי משפט תבנית

דוגמא #2: משפט נורטון

נמצא כעת את שקול נורטון עבור אותו מעגל המתואר באיור 3.8. מקור הזרם השקול הינו הזרם הזורם לאחר שמקצרים את העומס בין ההדקים:



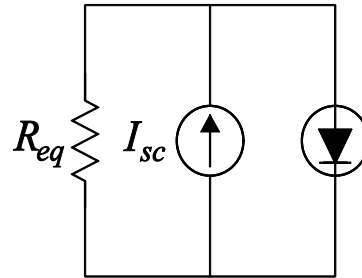
איור 3.11: חישוב מקור זרם שקול לפי נורטון

$$(3.10) \quad \left. \begin{aligned} E = V_1 + V_2 = I_1 R_1 + I_{SC} R_3 \\ I_1 = I_{SC} + \frac{R_3}{R_2} I_{SC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_{SC} = \frac{E}{R_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) + R_3}$$

וההתנגדות השקולה היא:

$$(3.11) \quad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = R_3 + R_1 \parallel R_2$$

לכן, המעגל השקול לפי נורטון הוא:



איור 3.12 : מעגל שקול לפי משפט נורטון

למעשה אנו שמים לב כי R_{eq} , V_{oc} ו- I_{sc} מקיימים מעצם הגדרתם את הקשר:

$$(3.12) \quad R_{eq} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

ולכן בשימוש במשפט תבנין-נורטון מספיק למצוא רק שניים משלושת הגדלים, על-מנת ששני השקולים יהיו ידועים לנו.

3.4 משפט ההדדיות (Reciprocity Theorem)



משפט זה מקשר בין הכניסה והיציאה של מעגל חשמלי במצב של תנאי התחלה אפס.

נתונה רשת ליניארית פסיבית (ללא מקורות) N כמתואר באיור 3.13.

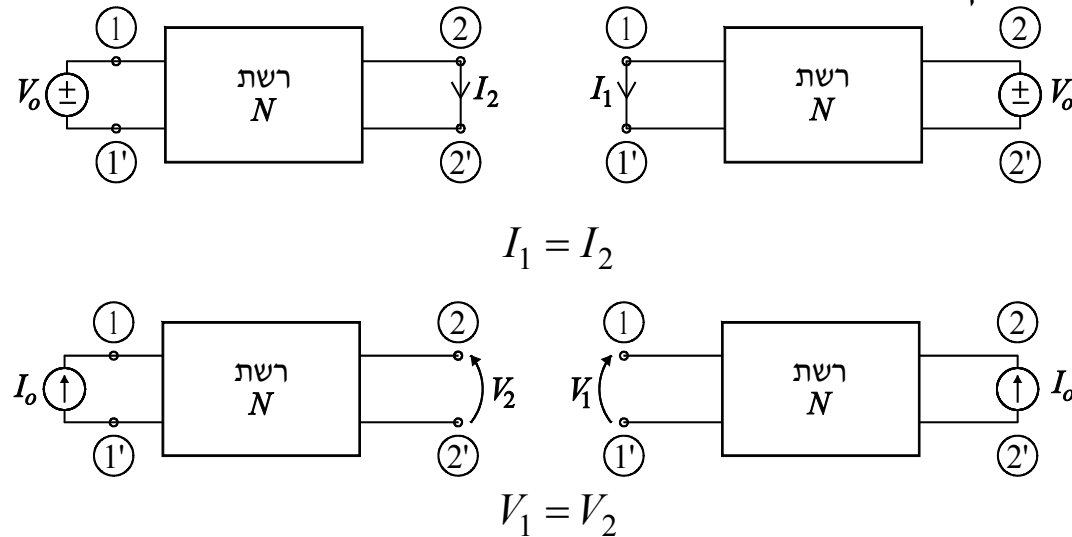
איור 3.13 : רשת ליניארית פסיבית

הנחות על הרשת N

א. רשת ליניארית פסיבית (ללא רכיבים חד-כיווניים כגון, דיודה ו ללא מקורות).

ב. הרכיבים ברשת יכולים להיות תלויי-זמן או קבועים בזמן.

אזי במעגלים הבאים מתקיים :



איור 3.14 : רשת ליניארית פסיבית – משפט ההדדיות

הפרק הרביעי - משטר מתמיד סינוסי

עד כה, עסקנו בתיאור הרכיבים הבסיסיים השונים אשר מרכיבים כל רשת חשמלית. כמו-כן הצגנו את משוואות המצב עבור רכיבים אלה, דהיינו את הקשר בין מפל המתח על-פני הרכיב לבין הזרם הזורם דרכו. בנוסף הצגנו משפטי רשת בסיסיים אשר יסייעו לנו בעתיד בעת פתרון מעגלים חשמליים מורכבים. כמובן, פתרון כל מעגל חשמלי מקובץ מתבסס בעיקר על יישום חוקי קירכהוף למתחים ולזרמים.

בפרק זה, נדון במשפחה רחבה של רשתות חשמליות אשר מוזנות על-ידי מקורות מתח/זרם המשתנים הרמונית בזמן בתדר זוויתי נתון. כמובן, מקורות כאלה אינם אלה המקורות אשר מזינים כל מערכת זוויתית דרך חברת החשמל. ניתוח רשתות אלה מהווה בסיס לניתוח רשתות יותר מסובכות והמוזנות ממקורות שלא דווקא משתנים הרמונית בזמן. בלימודים מתקדמים תלמדו איך ניתן לתאר כל אות רציף המשתנה בזמן מחזורי או לא כסכום (אינטגרל) של פונקציות הרמוניות המשתנות בזמן בתדרים שונים.

במסגרת הפרק הנוכחי נעמוד על המאפיינים של מעגלים המוזנים מאותות סינוסיים המשתנים הרמונית בזמן, ונציג שיטת פתרון נוחה ופשוטה בהנחה שכל תופעות המעבר דעכו. בפרט אנו נלמד על שיטת הרישום הפאזורי ונצל את יתרונותיה לפתרון מעגלים מורכבים בהנחת משטר מתמיד סינוסי.

4.1 הנחות ייסוד

א. מערכת ליניארית. המעגל מורכב כולו מרכיבים ליניאריים.

ב. תופעות המעבר דעכו לאפס (מצב מתמיד).

ג. העירור של המערכת הוא בתדר זוויתי יחיד ω .

הערה: במקרה הכללי ביותר, יכולים להיות ברשת מקורות סינוסואידליים בתדרים שונים. אם הרשת ליניארית, התגובה תהיה סופרפוזיציה של התגובות למקורות נפרדים בתחום הזמן.

4.2 תיאור אות סינוסואידלי באמצעות פאזור

כאשר העירור של המערכת הוא בתדר בודד, כל גודל (מתח או זרם) במערכת משתנה באופן סינוסואידלי בתדר העירור, בפאזה ובאמפליטודה נתונות

$$(4.1) \quad x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$$

כאשר $x(t)$ מתח או זרם, $\omega = 2\pi f$ תדר זוויתי (f תדר), X אמפליטודה, ϕ פאזה התחלתית. בהיעזר בזהות אוילר ניתן לרשום את הביטוי הנ"ל בצורה הבאה:

$$(4.2) \quad x(t) = X \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} \left[X e^{j(\omega t + \phi)} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{j\omega t} \underbrace{X e^{j\phi}}_{\text{phasor}} \right]$$

מגדירים את הפאזור של $x(t)$ להיות

$$(4.3) \quad \boxed{\bar{X}(\omega) = X e^{j\phi}}$$

$\bar{X}(\omega)$ הוא מספר מרוכב בלתי-תלוי בזמן והוא מתאר את הגודל המתאים בתחום התדר בדיוק כמו ש $x(t)$ מתאר את התופעה בתחום הזמן. כאמור הקשר בין השניים

$$(4.4) \quad \boxed{x(t) = X \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[\bar{X}(\omega) e^{j\omega t}]}$$

שים-לב: מאחר ופונקצית ה- \cos הינה פונקציה זוגית, יכולנו לרשום את משוואה 4.2 במונחים של $e^{-j\omega t}$. הצגה זו גם מקובלת בפיזיקה. בהנדסת חשמל לרוב מקובל להניח השתנות הרמונית מהצורה $e^{j\omega t}$.

4.3 תכונות הפאזור

א. ליניאריות: נניח כי α_1 ו- α_2 הם סקלרים ממשיים ו- \bar{X}_1 ו- \bar{X}_2 הם הפאזורים המתאימים ל

$$x_1(t) \text{ ו- } x_2(t). \text{ אזי הפאזור של } \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \text{ הינו } \alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2.$$

ב. פאזור המתאים לנגזרת של אות $x(t)$ המיוצג על-ידי הפאזור \bar{X} , הינו $j\omega \bar{X}$.

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\bar{X} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\bar{X} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}[j\omega \bar{X} e^{j\omega t}]$$

ג. פאזור המתאים לאינטגרל של אות $x(t)$ המיוצג על-ידי הפאזור \bar{X} , הינו $\frac{1}{j\omega} \bar{X}$.

המסקנה העיקרית מתכונות אלה היא שברישום פאזורי, אופרטור דיפרנציאלי הופך לאופרטור אלגברי לכן, כמו שנראה בהמשך, במקום לפתור מערכת של משוואות דיפרנציאליות בתחום הזמן, נוכל לפתור מערכת של משוואות אלגבריות בתחום התדר.

4.4 אימפדנס ואדמיטנס

עבור רכיב ליניארי וקבוע בזמן, היחס בין פאזור המתח לפאזור הזרם מוגדר כאימפדנס הרכיב ונתון על-ידי:

$$(4.6) \quad Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V e^{j\phi_V}}{I e^{j\phi_I}} = \frac{V}{I} e^{j(\phi_V - \phi_I)}$$

• לאימפדנס יחידות של התנגדות

• גודלו $|Z| = \left| \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \right|$

• הפאזה שלו $\phi_z = \phi_V - \phi_I$

• בצורה דומה ניתן להגדיר את האדמיטנס בתור היחס בין פאזור הזרם לבין פאזור המתח,

$$Y \equiv \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{1}{Z}, \text{ דהיינו,}$$

נציג כעת את האימפדנס והאדמיטנס עבור הרכיבים הבסיסיים:

א. נגד:

$$(4.7) \quad \left. \begin{aligned} V_R(t) &= R I_R(t) = R \operatorname{Re}[\bar{I}_R e^{j\omega t}] \\ V_R(t) &= \operatorname{Re}[\bar{V}_R e^{j\omega t}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{V}_R = R \bar{I}_R \Rightarrow \boxed{Z_R = R}$$

האימפדנס של נגד אידיאלי הוא גודל ממשי טהור ואיננו תלוי בתדר.

ב. סליל:

$$(4.8) \quad \left. \begin{aligned} V_L(t) &= L \frac{d}{dt} I_L(t) = \operatorname{Re}[j\omega L \bar{I}_L e^{j\omega t}] \\ V_L(t) &= \operatorname{Re}[\bar{V}_L e^{j\omega t}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L \Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L}$$

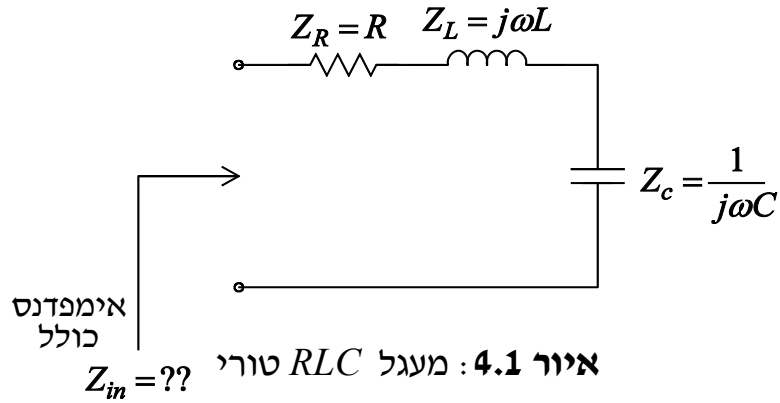
האימפדנס של סליל הינו מדומה טהור ותלוי בתדר; המתח מקדים את הזרם ב- $\pi/2$.

ג. קבל:

$$(4.9) \quad \left. \begin{aligned} I_C(t) &= C \frac{d}{dt} V_C(t) = \operatorname{Re}[j\omega C \bar{V}_C e^{j\omega t}] \\ I_C(t) &= \operatorname{Re}[\bar{I}_C e^{j\omega t}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{I}_C = j\omega C \bar{V}_C \Rightarrow \boxed{Y_C = j\omega C}$$

האימפדנס של קבל הינו מדומה טהור ותלוי בתדר; המתח מפגר אחר הזרם ב- $\pi/2$.

4.5 דוגמא - מעגל RLC טורי



בסעיף זה נלמד על המאפיינים העיקריים של מעגל RLC טורי כמתואר באיור 4.1. המעגל מוזן על-ידי מקור מתח המשתנה הרמונית בזמן בתדר זוויתי נתון. בשלב ראשון, נשאלת השאלה, מהו האימפדנס או האדמיטנס השקול הנמדד בין הדקי המקור?

על סמך KVL אימפדנס הכניסה נתון על-ידי סכום האימפדנסים של הרכיבים השונים, דהיינו:

$$(4.10) \quad Z_{in} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

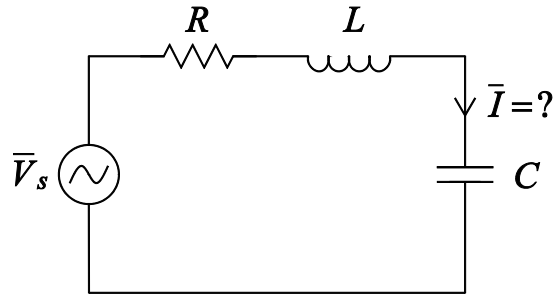
כאשר הגדרנו $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. גודל זה מתאר את **תדר התהודה** האופייני של המעגל. נשים לב שאם $\omega = \omega_0$ האימפדנס של הרכיב הופך להיות ממשי טהור. בהמשך, נעמוד על מאפייני תדר התהודה בהרחבה. על סמך (4.10) ניתן לקבל,

$$(4.11) \quad \left. \begin{aligned} |Z_{in}| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \phi_{in} &= \text{atan}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{in} = |Z_{in}| e^{j\phi_{in}}$$

נבחן כעת את מפלי המתח על-פני הרכיבים השונים.

לפי הגדרת אימפדנס הכניסה, הזרם דרכו שווה ליחס בין המתח השורר עליו לבין האימפדנס שלו, לפיכך:

$$(4.12) \quad \bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}_s(\omega)}{Z_{in}(\omega)} = \frac{\bar{V}_s}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$



איור 4.2: מעגל RLC טורי

המתח על כל אחד מהרכיבים (מחלק מתח) הינו

$$\bar{V}_R(\omega) = R\bar{I}(\omega) = \frac{R}{Z_{in}}\bar{V}_s$$

(4.13)

$$\bar{V}_L(\omega) = \frac{j\omega L}{Z_{in}}\bar{V}_s$$

$$\bar{V}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C Z_{in}}\bar{V}_s$$

נרשום כעת את אימפדנס הכניסה של המעגל באופן מפורש, ונבחן את התנהגות המעגל עבור מקרים שונים:

(4.14)

$$Z_{in} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \exp \left[j \operatorname{atan} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \right]$$

מקרה א. המקור מעורר את המעגל בתדר התהודה: $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

האימפדנס היחיד שרואה המקור במקרה זה הוא ההתנגדות של הנגד אך שורר מתח על הקבל והסליל.

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \bar{V}_L(\omega = \omega_0) &= \frac{j\omega_0 L}{R} \bar{V}_s(\omega_0) = \frac{j}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \bar{V}_s(\omega_0) \\ \bar{V}_C(\omega = \omega_0) &= \frac{1}{jR} \sqrt{\frac{L}{C}} \bar{V}_s(\omega_0) = -\bar{V}_L(\omega_0) \end{aligned}$$

כלומר המתחים על הקבל והסליל הם שווים בגודלם והפוכים בכיוונם.

מקרה ב. $L = 0$ - הסליל בעל השראות אפסית, או למעשה מעגל RC טורי:

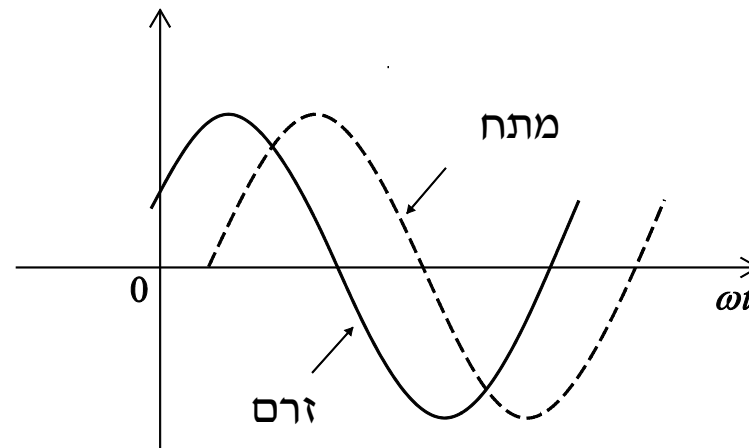
$$(4.16) \quad Z_{in}(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \exp\left[-j \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right]$$

$$(4.17) \quad \bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}_s}{Z_{in}} = \frac{\bar{V}_s}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \exp\left[-j \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right]}$$

$$(4.19) \quad I(t) = \operatorname{Re} \left[\bar{I}(\omega) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{V}_s e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \exp \left[-j \operatorname{atan} \left(\frac{1}{\omega RC} \right) \right]} \right]$$

$$= \frac{|\bar{V}_s|}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left[\omega t + \phi_s + \operatorname{atan} \left(\frac{1}{\omega RC} \right) \right]$$

בדוגמא זו, הזרם מקדים את המתח ב- $\operatorname{atan} \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$.



איור 4.3: מתח המקור לעומת זרם הקבל

מקרה ג. $C \rightarrow \infty$ - הקבל בעל קיבול אינסופי (מהווה קצר), או למעשה מעגל RL טורי:

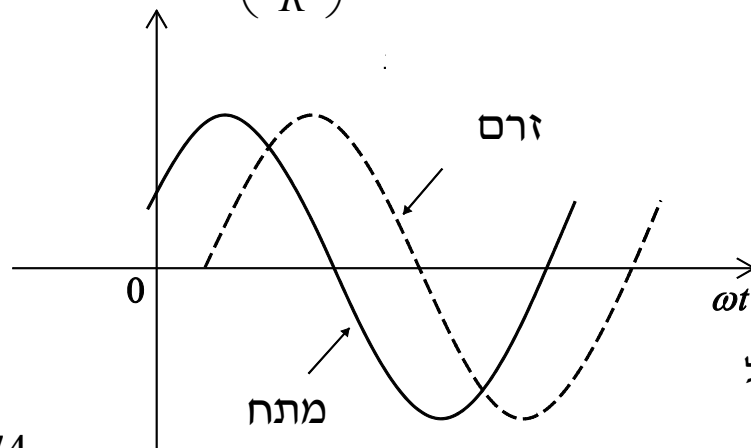
$$(4.20) \quad Z_{in} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp\left[j \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]$$

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}_s}{Z_{in}} = \frac{\bar{V}_s}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp\left[j \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]}$$

$$(4.21) \quad I(t) = \operatorname{Re}\left[\bar{I}(\omega)e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\bar{V}_s e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp\left[j \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]}\right]$$

$$= \frac{|\bar{V}_s|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left[\omega t + \phi_s - \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]$$

האימפדנס מצביע על הפרש הפאזה הקיים במערכת. הזרם מפגר אחרי המתח ב- $\operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$.



איור 4.4: מתח המקור לעומת זרם בסליל

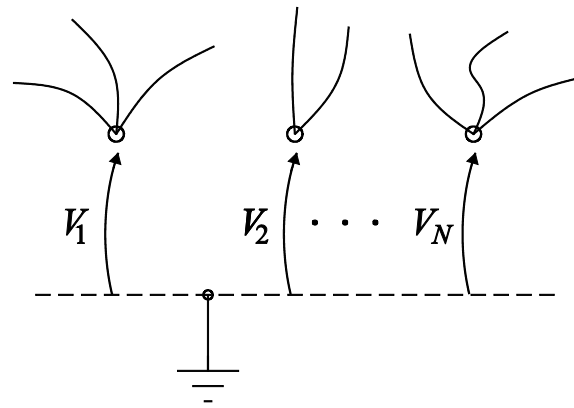
הערות

$$Z_L = j\omega L \quad \Rightarrow \quad |Z_L(\omega = 0)| = 0 \quad |Z_L(\omega \rightarrow \infty)| = \infty \quad \blacksquare$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad |Z_C(\omega = 0)| = \infty \quad |Z_C(\omega \rightarrow \infty)| = 0 \quad \blacksquare$$

- במעגלי זרם ישר ($\omega = 0$), הקבל מהווה נתק והסליל מהווה קצר.
- בתדרים גבוהים מאוד, הקבל מהווה בקירוב קצר והסליל מהווה בקירוב נתק.

4.6 ניתוח מעגלים בשיטת הצמתים



ננתח עתה מעגל חשמלי במצב מתמיד סינוסי, נציג תחילה את שיטת הפתרון, דהיינו שיטת הצמתים (דיון מורחב על השיטה יובא בפרק 7).

תיאור השיטה

איור 4.5: שיטת הצמתים לפתרון מעגלים

א. בוחרים צומת יחוס ("אדמה") ומגדירים מתחי צמתים

ב. מפעילים KCL על כל צומת למעט צומת הייחוס.

ג. באמצעות אופיין הענפים (חוק אוהם לאימפדנסים) עוברים מזרמי הענפים למתחי הענפים.

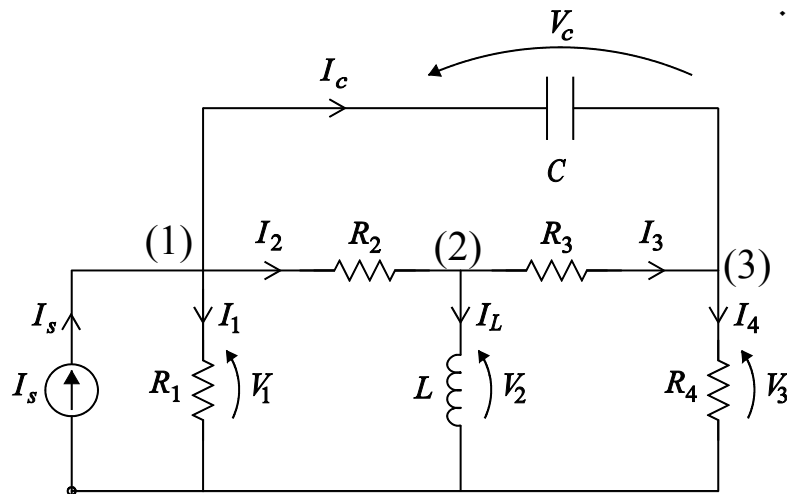
ד. מבטאים את מתחי הענפים במושגים של מתחי צמתים.

דוגמא:

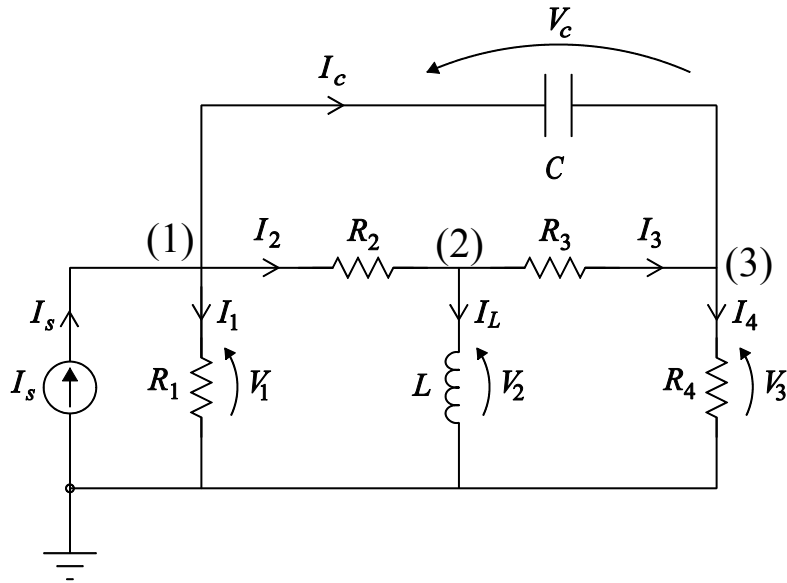
לפנינו המעגל החשמלי המתואר באיור 4.6,

בהנחת מצב מתמיד יש למצוא את מתחי

הצמתים וזרמי הענפים.



איור 4.6: מעגל דוגמא ליישום שיטת הצמתים במצב מתמיד סינוסי



(4.22)

- למעט צומת הייחוס, ישנם שלושה צמתים נוספים.
- נגדיר את מתחיהם ביחס לצומת הייחוס $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$.
- נפעיל KCL בצמתים אלו

$$\bar{I}_s = \bar{I}_C + \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_L + \bar{I}_3$$

$$\bar{I}_3 + \bar{I}_C = \bar{I}_4$$

- באמצעות אופייני הענפים נעבור מזרמי הענפים למתחי הענפים, כאשר אלה מבוטאים על-ידי מתחי

הצמתים $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$

$$(4.23) \quad \left. \begin{aligned} j\omega C(\bar{V}_1 - \bar{V}_3) + \frac{\bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_2} &= \bar{I}_s \\ \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_2} - \frac{\bar{V}_2}{j\omega L} - \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_3}{R_3} &= 0 \\ \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_3}{R_3} + j\omega C(\bar{V}_1 - \bar{V}_3) - \frac{\bar{V}_3}{R_4} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{V}_1(j\omega C + G_1 + G_2) + \bar{V}_2(-G_2) + \bar{V}_3(-j\omega C) &= \bar{I}_s \\ \bar{V}_1(-G_2) + \bar{V}_2\left(G_2 + \frac{1}{j\omega L} + G_3\right) + \bar{V}_3(-G_3) &= 0 \\ \bar{V}_1(-j\omega C) + \bar{V}_2(-G_3) + \bar{V}_3(G_4 + j\omega C + G_3) &= 0 \end{aligned}$$

או ברישום מטריצי:

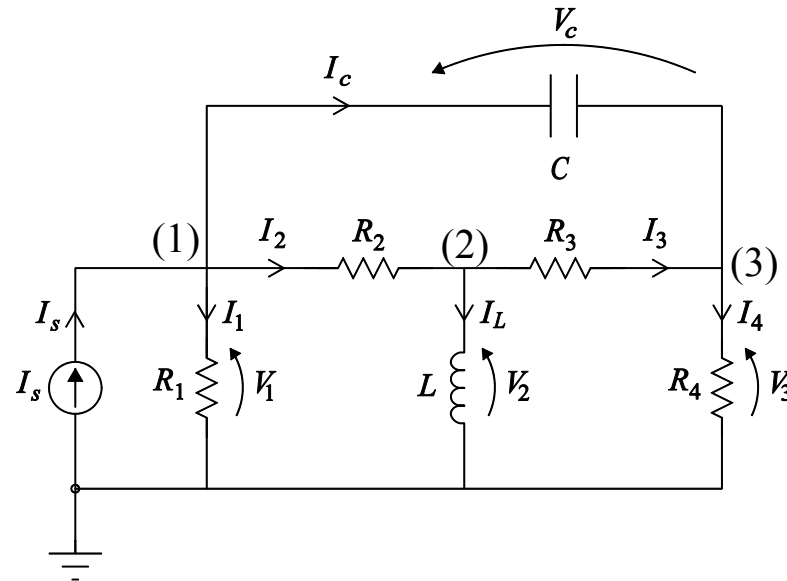
$$(4.24) \quad Y_{11} \begin{bmatrix} j\omega C + G_1 + G_2 & -G_2 & -j\omega C \\ -G_2 & G_2 + \frac{1}{j\omega L} + G_3 & -G_3 \\ -j\omega C & -G_3 & G_4 + j\omega C + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{Y \cdot \vec{V} = \vec{I}_s}$$

נשים לב שהמטריצה סימטרית וניתן אף "לנחש" אותה בהסתכלות על המעגל.

Y_{ii} = סכום האדמיטנסים המחוברים לצומת i ; למשל, $Y_{11} = j\omega C + G_1 + G_2$.

Y_{ij} = מינוס סכום האדמיטנסים המחוברים ישירות בין צומת i לצומת j ; למשל, $Y_{12} = -G_2$.

מסקנה: בעיית חישוב מתחי הצמתים מצטמצמת להיפוך מטריצת האדמיטנסים.

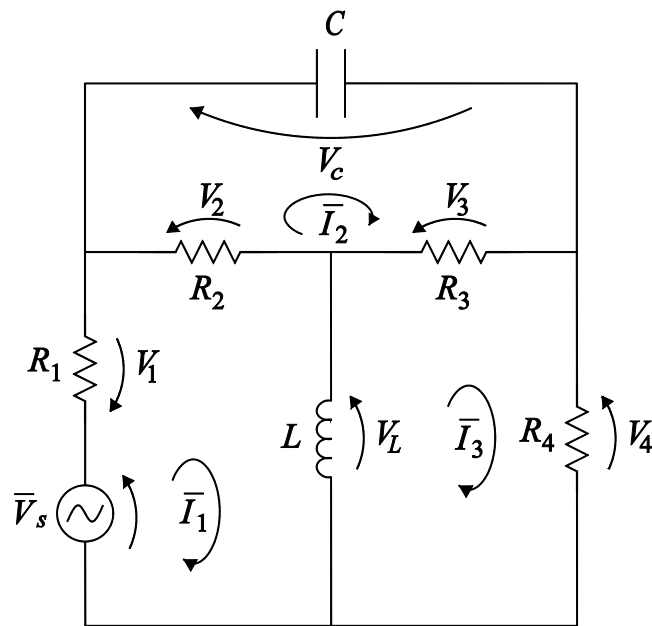


4.7 ניתוח מעגלים בשיטת העיניים

ננתח עתה מעגל חשמלי במצב מתמיד סינוסי ונציג דרך לפתרון בשיטת העיניים (דיון מורחב יובא בפרק 7).

תיאור השיטה

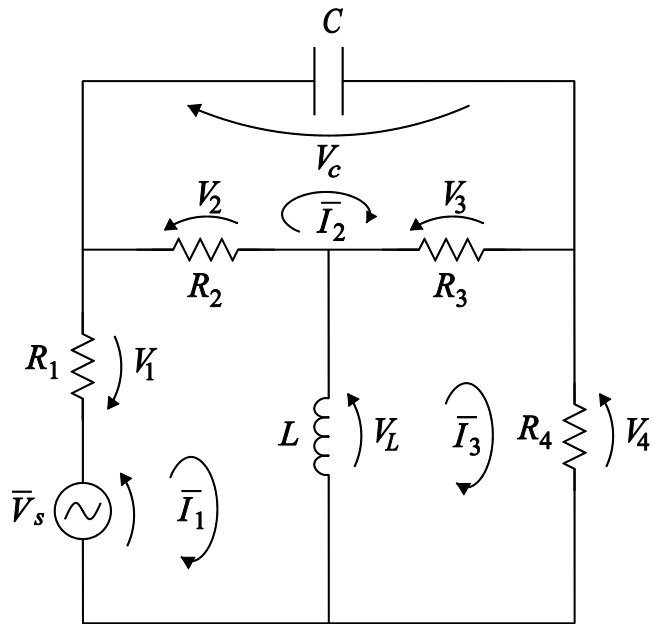
- מגדירים זרמי עיניים עם כיוון השעון. עין היא לולאה סגורה שאינה מכילה ענפים פנימיים.
- מפעילים KVL בכל עין.
- באמצעות אופיין הענפים עוברים ממתחי הענפים לזרמי הענפים.
- מבטאים את זרמי הענפים במונחים של זרמי העיניים.



דוגמא:

לפנינו המעגל החשמלי המתואר באיור 4.7 בהנחת מצב מתמיד יש למצוא את זרמי העיניים.

איור 4.7 : מעגל דוגמא ליישום שיטת העיניים במצב מתמיד סינוסי



(4.25)

• ישנן שלוש עיניים במעגל זה.

• נגדיר את זרמיהן עם כיוון השעון בתור $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$.

• נפעיל KVL

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_L = \bar{V}_s$$

$$\bar{V}_2 + \bar{V}_3 - \bar{V}_C = 0$$

$$\bar{V}_L - \bar{V}_3 - \bar{V}_4 = 0$$

• באמצעות אופייני הענפים נעבור ממתחי הענפים לזרמי הענפים, כאשר אלה מבוטאים על-ידי זרמי

העיניים $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 \cdot \bar{I}_1 + R_2 (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) + j\omega L (\bar{I}_1 - \bar{I}_3) &= \bar{V}_s \\
 R_2 (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) + R_3 (\bar{I}_3 - \bar{I}_2) - \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_2 &= 0 \\
 j\omega L (\bar{I}_1 - \bar{I}_3) - R_3 (\bar{I}_3 - \bar{I}_2) - R_4 \bar{I}_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
 \bar{I}_1 (R_1 + R_2 + j\omega L) + \bar{I}_2 (-R_2) + \bar{I}_3 (-j\omega L) &= \bar{V}_s \\
 \bar{I}_1 (-R_2) + \bar{I}_2 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} + R_3 \right) + \bar{I}_3 (-R_3) &= 0 \\
 \bar{I}_1 (-j\omega L) + \bar{I}_2 (-R_3) + \bar{I}_3 (j\omega L + R_3 + R_4) &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

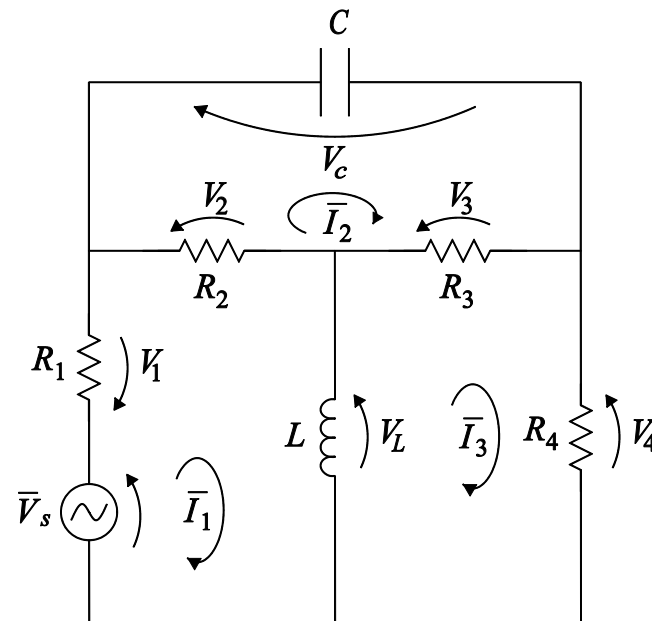
(4.26)

$$(4.27) \quad \begin{matrix} Z_{11} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L & -R_2 & -j\omega L \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{j\omega C} + R_3 & -R_3 \\ -j\omega L & -R_3 & j\omega L + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{Z} \cdot \underline{\bar{I}} = \underline{\bar{V}}_S}$$

כמו במקרה הקודם, גם כאן המטריצה סימטרית וניתן אף "לנחש" אותה בהסתכלות על המעגל באופן הבא:

$$Z_{ii} = \text{סכום האימפדנסים בלולאה } i \quad (Z_{11} = R_1 + R_2 + j\omega L)$$

$$Z_{ij} = \text{מינוס האימפדנס המשותף ללולאה } i \text{ ולולאה } j \quad (Z_{12} = -R_2)$$



4.8 שיקולי הספק ואנרגיה במשטר מתמיד סינוסי

עד כה, הגדרנו את הפאזור של המתח והזרם עבור רכיב כלשהו. נשאלת השאלה האם קיים פאזור להספק הרגעי של אותו רכיב? מהו הקשר בין ההספק לפאזורי המתח והזרם עבורו? כנ"ל, לגבי האנרגיה האגורה בקבל ובסליל!

הספק: נניח עתה שידועים המתח והזרם על ענף מסוים במעגל. השאלה שנשאלת היא איזה אינפורמציה על ההספק ניתן להפיק ישירות מתוך הפאזורים של המתח והזרם?

$$(4.28) \quad \begin{aligned} V(t) &= \operatorname{Re} \left[\bar{V}(\omega) e^{j\omega t} \right] \\ I(t) &= \operatorname{Re} \left[\bar{I}(\omega) e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

על-מנת להתייחס לשאלה זו כדאי לזכור שההספק הרגעי נתון על-ידי

$$(4.29) \quad \begin{aligned} P(t) &= V(t) I(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[\bar{V}(\omega) e^{j\omega t} + \bar{V}^*(\omega) e^{-j\omega t} \right] \frac{1}{2} \left[\bar{I}(\omega) e^{j\omega t} + \bar{I}^*(\omega) e^{-j\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\bar{V} \bar{I} e^{2j\omega t} + \bar{V}^* \bar{I}^* e^{-2j\omega t} + \bar{V} \bar{I}^* + \bar{V}^* \bar{I} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\bar{V} \bar{I} e^{2j\omega t} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\bar{V} \bar{I}^* \right) \end{aligned}$$

על-מנת לקבל מידע על ההספק בצורה ישירה משני הפאזורים נסתפק בביטוי **להספק הממוצע**

$$(4.30) \quad \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[\text{Re}(\bar{V} \cdot \bar{I} \cdot e^{2j\omega t}) + \text{Re}(\bar{V} \cdot \bar{I}^*) \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{V} \cdot \bar{I}^*) \Rightarrow \boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{V} \cdot \bar{I}^*)}$$

על בסיס ההגדרה הקודמת ניתן להגדיר את **ההספק המרוכב**:

$$(4.31) \quad \boxed{S \equiv \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^*} = \langle P \rangle + j \langle Q \rangle$$

$$= \frac{1}{2} Z |\bar{I}|^2 = \frac{1}{2} Y^* |\bar{V}|^2$$

- $\langle P \rangle$ הוא **ההספק האקטיבי** בענף – הספק זה קשור להספק הנמסר על-ידי המקור במעגל או הספק אלקטרומגנטי שהופך לחום בנגדים.
- $\langle Q \rangle$ נקרא **הספק עיוור** או **הספק ראקטיבי**. הוא קשור לכמות האנרגיה האגורה ברכיב לאורך מחזור ואינה מתבזזת, למשל אנרגיה מגנטית בסליל או אנרגיה חשמלית בקבל.
- הספק מרוכב ברכיבים בסיסיים:
א. נגד:

$$(4.32) \quad S_R = \frac{1}{2} \bar{V}_R \bar{I}_R^* = \frac{1}{2} R |\bar{I}_R|^2 > 0 \Rightarrow \langle P_R \rangle = \frac{1}{2} R |\bar{I}_R|^2, \quad \langle Q_R \rangle = 0$$

ההספק על הנגד הוא **ממשי טהור** (האימפדנס ממשי) ולכן אין הפרש פאזה בין המתח על הנגד והזרם דרכו. הנגד מבזבז אנרגיה אלקטרומגנטית.

ב. קבל:

$$(4.33) \quad S_C = \frac{1}{2} \bar{V}_C \bar{I}_C^* = \frac{1}{2} \bar{V}_C (j\omega C \bar{V}_C)^* = -\frac{1}{2} j\omega C |\bar{V}_C|^2$$

$$\Rightarrow \langle P_C \rangle = 0, \quad \langle Q_C \rangle = -\frac{1}{2} \omega C |\bar{V}_C|^2$$

ההספק המרוכב על הקבל **מדומה טהור**. הקבל אינו מבזבז אנרגיה אלא רק אוגר אותה.

ג. סליל:

$$(4.34) \quad S_L = \frac{1}{2} \bar{V}_L \bar{I}_L^* = \frac{1}{2} (j\omega L \bar{I}_L) \bar{I}_L^* = \frac{1}{2} j\omega L |\bar{I}_L|^2$$

$$\Rightarrow \langle P_L \rangle = 0, \quad \langle Q_L \rangle = \frac{1}{2} \omega L |\bar{I}_L|^2$$

ההספק המרוכב על הסליל **מדומה טהור**. הסליל אינו מבזבז אנרגיה, אלא רק אוגר אותה.

אנרגיות: דיון דומה לזה שערכנו עבור ההספק ניתן לערוך עבור שתי האנרגיות החשמלית והמגנטית. ושוב השאלה שנשאלת היא, איזה אינפורמציה ישירה ניתן לקבל על האנרגיה במעגל מידיעת הפאזורים? נתחיל את הדיון בניתוח האנרגיה בקבל. האנרגיה החשמלית הרגעית האגורה בקבל

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C V_C(t)^2 \quad \text{ומאחר והגדרנו קודם} \quad V_C(t) = \frac{1}{2} \left[\bar{V}_C(\omega) e^{j\omega t} + \bar{V}_C^*(\omega) e^{-j\omega t} \right] \quad \text{ניתן לרשום}$$

$$(4.35) \quad W_C(t) = \frac{1}{8} C \left[\bar{V}_C^2 e^{2j\omega t} + 2\bar{V}_C \bar{V}_C^* + (\bar{V}_C^*)^2 e^{-2j\omega t} \right]$$

כמו במקרה של ההספקים נבחן את האנרגיה החשמלית הממוצעת בזמן, התוצאה היא

(4.36)

$$\langle W_C \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W_C(t) dt = \frac{1}{4} C |\bar{V}_C|^2$$

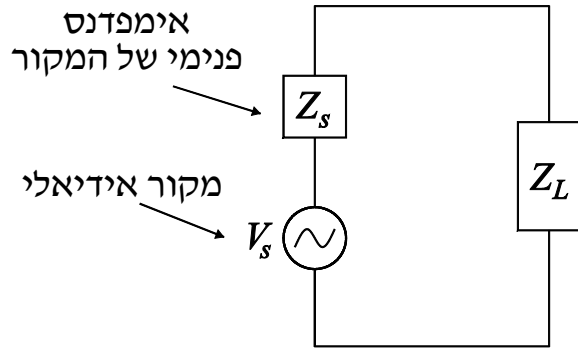
באותו אופן ניתן להראות שהאנרגיה הממוצעת האגורה בסליל היא

(4.37)

$$\langle W_L \rangle = \frac{1}{4} L |\bar{I}_L|^2$$

לסיכום: בהתאם לדיון הנ"ל, ברור שלא ניתן לקבל מהרישום הפאזורי כל מידע אודות ההספק הרגעי והאנרגיה הרגעית האגורה במעגל. מבחינה מתמטית טענה זו ברורה, הרי ההספק או האנרגיה משתנה בתדר כפול (ריבוע של מתח או זרם או מכפלה של שניהם) וזה עומד בסתירה להנחות הייסוד של הרישום הפאזורי.

4.9 דוגמא - העברת הספק מקסימלי - תיאום אימפדנסים



לפנינו מעגל בו מערכת המספקת מתח הדקים בתדר בודד, עם אימפדנס פנימי כלשהו (לפי משפט תבנין, כל מערכת ליניארית מסובכת ככל שתהיה ניתן להציג בצורה זו). למערכת זו נרצה לחבר עומס חיצוני Z_L , כך שהוא יקבל **הספק מקסימלי** מהמערכת. השאלה שנשאלת היא: מהו התנאי שאימפדנס זה צריך לקיים?

איור 4.8: עומס המחובר למקור עם אימפדנס פנימי

על-פי הגדרה, ההספק הממוצע המתבזבז בעומס הוא

$$(4.38) \quad \langle P_L \rangle = \operatorname{Re}\{S_L\} = \frac{1}{2} |\bar{I}|^2 \operatorname{Re}\{Z_L\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{Z_L\} \left| \frac{\bar{V}_s}{Z_L + Z_s} \right|^2$$

ללא הגבלת הכלליות נגדיר

$$(4.39) \quad \begin{cases} Z_s = R_s + j\chi_s \\ Z_L = R_L + j\chi_L \end{cases}$$

כך שאחרי הצבה מתקבל

$$(4.40) \quad \langle P_L \rangle = \frac{1}{2} |\bar{V}_s|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_L)}{|Z_L + Z_s|^2} = \frac{1}{2} |\bar{V}_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2 + (\chi_L + \chi_s)^2}$$

על-מנת לקבל מקסימום נדרוש: $\chi_L + \chi_s = 0 \Leftrightarrow \chi_L = -\chi_s$ כך ש

$$(4.41) \quad \langle P_L \rangle = \frac{1}{2} |\bar{V}_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2}$$

אם בוחנים את הביטוי הנ"ל, אנו מוצאים כי הוא מתאפס עבור $R_L = 0$ או כאשר $R_L = \infty$. בין שתי נקודות אלה, הפונקציה מקבלת מקסימום. כדי למצוא את נקודת המקסימום נגזור את הביטוי ב-4.41 לפי R_L ונקבל

$$(4.42) \quad \frac{d}{dR_L} \left[\frac{R_L}{(R_L + R_s)^2} \right] = \dots = \frac{R_s - R_L}{(R_s + R_L)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_s$$

לכן נדרוש:

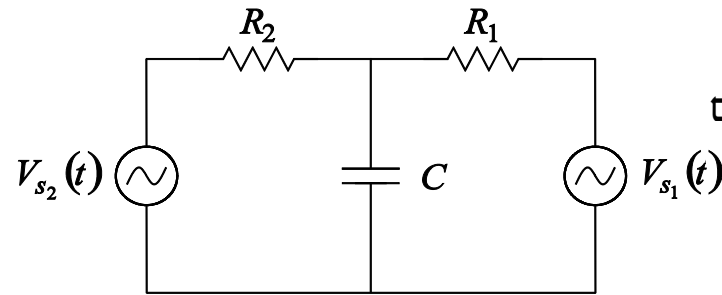
$$(4.43) \quad \begin{cases} R_L = R_s \\ \chi_L = -\chi_s \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_s^*}$$

נסכם: על-מנת לקבל הספק מקסימלי ממערכת עם אימפדנס פנימי, יש לחבר אליה עומס עם אימפדנס שהוא צמוד מרוכב של האימפדנס הפנימי. כדאי לשים לב שכפוף לתנאי זה, המערכת השקולה היא התנגדותית טהורה. ההספק המקסימלי שניתן לקבל מהמערכת כפוף לתנאי זה הינו

$$(4.44) \quad \boxed{\langle P_L \rangle_{\max} = \frac{1}{2} |\bar{V}_s|^2 \frac{1}{4R_s}}$$

4.10 עיקרון הסופרפוזיציה עבור מקורות בתדרים שונים

עד-כה עסקנו בפרק זה במעגלים המעוררים על-ידי מקור בתדר בודד ω . בפרק הקודם למדנו את משפט הסופרפוזיציה שנתן לנו כלי חשוב מאוד בניתוח מעגלים עם יותר ממקור אחד. אנו חוזרים ומדגימים שימוש במשפט זה גם במעגלים במשטר סינוסי מתמיד על-מנת להדגיש ולחדד את השימוש בפאזורים.



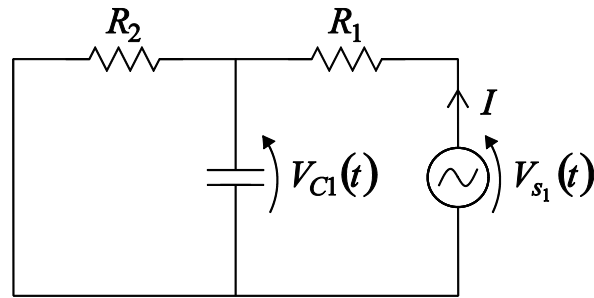
איור 4.9: מעגל מוזן משני מקורות בתדרים שונים

דוגמא:
נתון מעגל חשמלי המעורר על-ידי שני מקורות בתדרים שונים כמתואר באיור 4.9.

$$(4.45) \quad \left. \begin{aligned} V_{S1}(t) &= V_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ V_{S2}(t) &= V_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \omega_1 \neq \omega_2$$

כעת, לפי משפט הסופרפוזיציה נחשב ראשית את פתרון המעגל עבור כל אחד מהמקורות בנפרד, ולבסוף נסכם את הפתרונות. אנו יכולים להשתמש בפאזורים רק כאשר המעגל מעורר על-ידי תדר בודד מכיוון שהאימפדנסים תלויים בתדר העירור. אין משמעות לפאזורים כאשר המעגל מעורר על-ידי שני תדרים שונים ויתר על-כן אין משמעות לחיבור שני פאזורים השייכים לתדרים שונים. יחד עם זאת, ניתן לפתור באמצעות רישום פאזורי כאשר מניחים שרק אחד משני המקורות פועל, את הפתרון בתחום התדר ניתן "לתרגם" לתחום הזמן. חוזרים על התהליך עבור המקור השני ואז ניתן לחבר את שני הפתרונות בתחום הזמן.

שלב א': $V_{s,1} \neq 0$ & $V_{s,2} = 0$



מאפסים את המקור השמאלי ומשאירים את המקור הימני. מחשבים כעת את תרומת המקור הזה למתח הקבל, תחילה הרישום הפאזורי ולאחר מכן נעבור למישור הזמן.

איור 4.10: תרומת המקור הימני – שמאלי מאופס

אימפדנס הכניסה

$$(4.46) \quad Z_1 = R_1 + R_2 \parallel \frac{1}{j\omega_1 C} = R_1 + \frac{R_2}{1 + jR_2\omega_1 C} = \frac{R_1 + jR_1R_2\omega_1 C + R_2}{1 + jR_2\omega_1 C}$$

לכן

$$(4.47) \quad \begin{aligned} \bar{V}_{C,1} &= \bar{V}_{s,1} - \bar{I}R_1 = \bar{V}_{s,1} - \frac{\bar{V}_{s,1}}{Z_1}R_1 = \bar{V}_{s,1} \left(1 - \frac{R_1}{Z_1} \right) = \dots \\ &= \frac{\bar{V}_{s,1}R_2}{R_2 + R_1(1 + j\omega_1 CR_2)} = \frac{\bar{V}_{s,1}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + j\omega_1 CR_1} \end{aligned}$$

אם $V_{s,1}$ הוא המקור היחיד אזי האנרגיה החשמלית הממוצעת האגורה בקבל היא

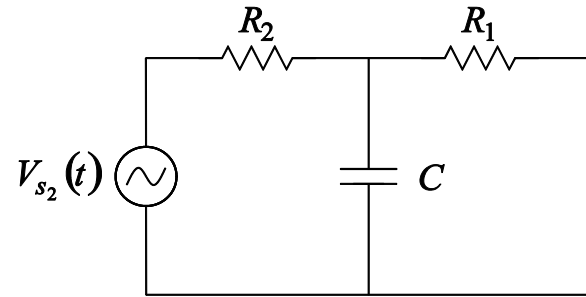
$$(4.48) \quad \langle W_{C,1} \rangle = \frac{1}{4} C |\bar{V}_{C,1}|^2 = \frac{1}{4} C |\bar{V}_{s,1}|^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + [\omega_1 C R_1]^2}$$

על-מנת לחשב את $W_{C,1}(t)$, יש לעבור מרישום בתחום התדר (פאזור) לרישום בתחום הזמן, כלומר:

$$\left. \begin{aligned} V_{C,1}(t) &= \operatorname{Re} \left[\bar{V}_{C,1} e^{j\omega_1 t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{V}_{s,1}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + j\omega_1 C R_1} e^{j\omega_1 t} \right] \\ &= \frac{|\bar{V}_{s,1}| \cos \left[\omega_1 t + \phi_1 - \operatorname{atan} \left(\frac{\omega_1 C R_1 R_2}{R_2 + R_1} \right) \right]}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega_1 C R_1)^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} W_{C,1}(t) &= \frac{1}{2} C V_{C,1}(t)^2 = \dots \\ \langle W_{C,1}(t) \rangle &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt W_{C,1}(t) \\ &= \frac{\frac{1}{4} C |\bar{V}_{s,1}|^2}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega_1 C R_1)^2} \end{aligned} \right.$$

(4.49)

שלב ב': $V_{s,2} \neq 0$ & $V_{s,1} = 0$



מאפסים את המקור השמאלי ומשאירים את המקור הימני. מחשבים כעת את תרומת המקור הזה למתח הקבל, תחילה הרישום הפאזורי ולאחר מכן נעבור למישור הזמן.

איור 4.11: תרומת המקור השמאלי – ימני מאופס

אימפדנס הכניסה

$$(4.50) \quad Z_2 = R_2 + R_1 \parallel \frac{1}{j\omega_2 C} = R_2 + \frac{R_1}{1 + jR_1\omega_2 C} = \frac{R_2 + jR_1R_2\omega_2 C + R_1}{1 + jR_1\omega_2 C}$$

המתח בתחום הזמן

$$(4.51) \quad V_{C,2}(t) = \text{Re} \left[\bar{V}_{C,2} e^{j\omega_2 t} \right] = \frac{|\bar{V}_{s,2}| \cos \left[\omega_2 t + \phi_2 - \text{atan} \left(\frac{\omega_2 C R_2 R_1}{R_1 + R_2} \right) \right]}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + (\omega_2 C R_2)^2}}$$

האנרגיה הממוצעת האגורה בקבל

$$(4.52) \quad \langle W_{C,2}(t) \rangle = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} dt W_{C,2}(t) = \frac{\frac{1}{4} C |\bar{V}_{s,2}|^2}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + (\omega_2 C R_2)^2}$$

- כעת לפי עיקרון הסופרפוזיציה התגובה של המעגל היא סכום התגובות בתחום הזמן:

$$(4.53) \quad V_C(t) = V_{C1}(t) + V_{C2}(t)$$

- האנרגיה הרגעית האגורה בקבל:

$$(4.54) \quad W_C(t) = \frac{1}{2} C [V_{C1}(t) + V_{C2}(t)]^2 \neq W_{C1}(t) + W_{C2}(t)$$

- נגדיר את האנרגיה הממוצעת האגורה בקבל לפי זמן המחזור $T_{\max} = 2\pi / |\omega_1 - \omega_2|$

$$(4.55) \quad \begin{aligned} \langle W_C \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} C V_{C,1}^2(t) + \frac{1}{2} C V_{C,2}^2(t) + C V_{C,1}(t) V_{C,2}(t) \right\rangle = \\ &= \langle W_{C,1} \rangle + \langle W_{C,2} \rangle + C V_{C,1} V_{C,2} \frac{1}{T_{\max}} \int_0^{T_{\max}} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) dt \end{aligned}$$

נבחין בין שני מקרים

$$\langle W_C \rangle = \langle W_{C1} \rangle + \langle W_{C2} \rangle \quad \Leftarrow \omega_1 \neq \omega_2 \quad \text{א.}$$

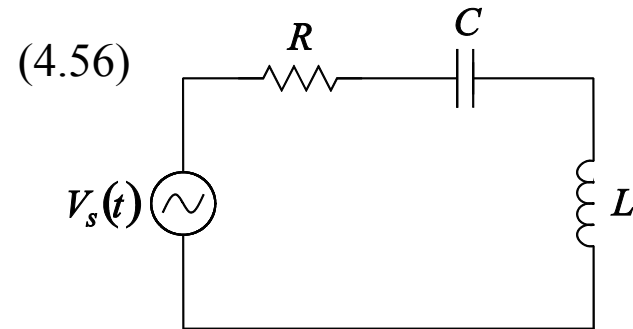
$$\langle W_C \rangle \neq \langle W_{C1} \rangle + \langle W_{C2} \rangle \quad \Leftarrow \omega_1 = \omega_2 \quad \text{ב.}$$

לסכום, ניתן לעבוד עם פאזורים רק כאשר יש תדר עירור **בודד**. כאשר יש עירור בתדרים מרובים, ניתן לפרקו על-פי משפט הסופרפוזיציה ולחשב את התגובה בנפרד לכל תדר באמצעות שימוש בפאזורים. לבסוף נסכם את התגובות לאחר שהמרנו אותן חזרה **לתחום הזמן**.

4.11 מעגלי תהודה (Resonance)

מעגלים במשטר סינוסי מתמיד מעוררים על-ידי מקור סינוסי בתדר כלשהו. אם אנו מנתחים את פתרון המעגל כתלות בתדר, נגלה שעירור חיצוני בתדר שהוא קרוב לאחד התדרים האופייניים של המעגל גורם להתנהגות ייחודית של המערכת. תדרים אופייניים אלה נקראים **תדרי התהודה** של המערכת. קיימות מספר דרכים להגדיר תדרים אלה ואנחנו נציג אותן תוך כדי ניתוח תופעת התהודה.

הגדרה #1: תדר התהודה הינו תדר שעבורו האנרגיה החשמלית האגורה במעגל הממוצעת בזמן במחזור שלם שווה לאנרגיה המגנטית האגורה במעגל הממוצעת בזמן במחזור שלם:



$$\langle W_E \rangle = \langle W_M \rangle$$

נתבונן כעת במעגל RLC טורי במצב מתמיד סינוסי כמתואר באיור 4.12.

האנרגיה הממוצעת במחזור האגורה במעגל זה היא

איור 4.12: מעגל RLC טורי

$$(4.57) \quad \langle W_E \rangle = \langle W_C \rangle = \frac{1}{4} C |\bar{V}_C|^2$$

$$(4.58) \quad \langle W_M \rangle = \langle W_L \rangle = \frac{1}{4} L |\bar{I}_L|^2$$

על-מנת למצוא את תדר התהודה, נדרוש שוויון ביניהם לכן,

$$(4.59) \quad L |\bar{I}_L|^2 = C |\bar{V}_C|^2 = C \left| \frac{1}{j\omega_0 C} \bar{I}_C \right|^2 = \frac{1}{\omega_0^2 C} |\bar{I}_L|^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

נבדוק עתה מה קורה לאימפדנס של המעגל בתדר זה, האנרגיה החשמלית והמגנטית הממוצעות במחזור האגורות במעגל, שוות. נבדוק כיצד מעגל זה מתנהג כאשר העירור הסינוסי הוא בתדר התהודה.

$$(4.60) \quad Z_{in}(\omega) = R + j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)$$

נציב באימפדנס הכניסה של המעגל את תדר התהודה ונקבל

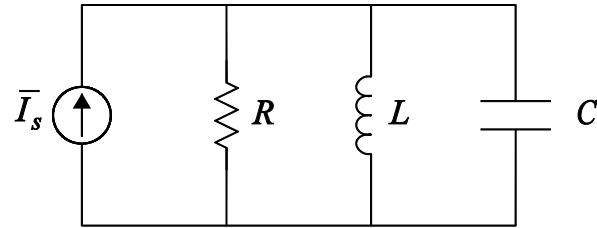
$$(4.61) \quad Z_{in}(\omega_0) = R$$

הגדרה #2: תדר התהודה הינו תדר העירור עבורו במצב מתמיד סינוסי החלק המדומה של אימפדנס הכניסה למעגל, מתאפס:

(4.62)

$$\boxed{\operatorname{Im}\{Z_{\text{in}}\} \Big|_{\omega = \omega_0} = 0}$$

הערה: אפשר להוכיח בקלות, שדרישה זו שקולה לדרישה שאדמיטנס הכניסה יהיה ממשי.

דוגמא:

איור 4.13: מעגל RLC מקבילי

כעת נתבונן במעגל RLC מקבילי כמתואר באיור 4.13. נחפש את תדר התהודה על-פי ההגדרה הראשונה ונראה שוב ששתי ההגדרות מתלכדות.

משוויון אנרגיות מתקבל

$$(4.63) \quad C|\bar{V}_C|^2 = L|\bar{I}_L|^2 = L \left| \frac{\bar{V}_L}{j\omega L} \right|^2 = \frac{1}{\omega^2 L} |\bar{V}_C|^2$$

כלומר גם במקרה זה מתקיים

$$(4.64) \quad \omega^2 \equiv \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

אדמיטנס הכניסה

$$(4.65) \quad Y_{\text{in}}(\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = \frac{1}{R} + j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

ואם נציב את תדר התהודה, שוב נקבל אדמיטנס ממשי טהור.

מאפיינים של פונקציות תמסורת בתהודה.

- מקובל להגדיר את היחס בין פאזור של המקור (מתח או זרם) לבין אחד הפאזורים בענפים של המעגל כתגובת התדר של המעגל או **פונקציות התמסורת**. נבחן מעגל RLC מקבילי עם עירור של מקור זרם. למשל במעגל שלנו נגדיר את פונקציות התמסורת הבאה:

$$(4.66) \quad H(\omega) = \frac{\bar{I}_R}{\bar{I}_S}$$

• KCL

$$(4.67) \quad \bar{I}_S = \bar{I}_R + \bar{I}_C + \bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{R} + \frac{\bar{V}}{j\omega L} + j\omega C\bar{V} \Rightarrow \bar{V} = \frac{\bar{I}_S}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C}$$

• פונקציות התמסורת

$$(4.68) \quad H(\omega) = \frac{\bar{I}_R}{\bar{I}_S} = \frac{\bar{V}}{R\bar{I}_S} = \frac{\bar{I}_S}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} \frac{1}{R\bar{I}_S} = \frac{1}{j\omega RC \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) + 1}$$

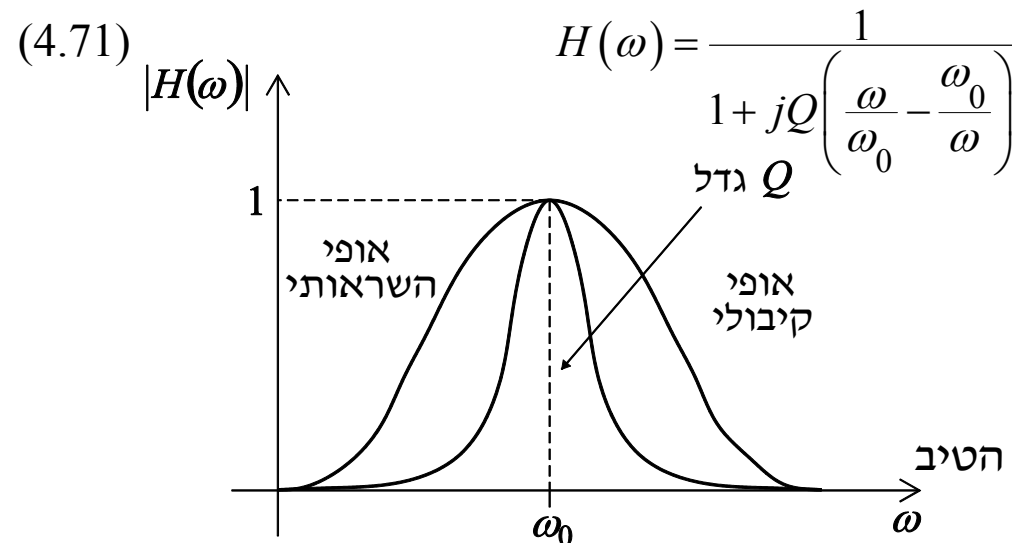
• הערך המוחלט של פונקצית התמסורת

$$(4.69) \quad |H(\omega)| = \left(\omega^2 R^2 C^2 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

• הפאזה של פונקצית התמסורת

$$(4.70) \quad \angle H(\omega) = -\text{atan} \left[\omega RC \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) \right]$$

- בהצבת תדר תהודה, נקבל את מקסימום תגובת המשרעת והפרש פאזה אפס
- ניתן לרשום את $H(\omega)$ גם בצורה הבאה:



• תדר התהודה -- $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ○

• גורם הטיב -- $Q = \omega_0 CR$ ○

• איור 4.14 ממחיש את השתנות גורם הטיב

איור 4.14: פונקצית תמסורת כתלות בתדר

מספר הערות המתייחסות למעגל RLC מקבילי

- א. בתדרים נמוכים מאוד, הסליל קרוב לקצר ורוב הזרם עובר דרכו, ולכן $|H(\omega)| \ll 1$. עבור תדרים אלו נאמר כי למעגל אופי השראותי.
- ב. בתדרים גבוהים מאוד, הקבל קרוב לקצר ורוב הזרם עובר דרכו, ולכן $|H(\omega)| \ll 1$. עבור תדרים אלו נאמר כי למעגל אופי קיבולי.
- ג. בתדר התהודה $\omega = \omega_0$ מקבלים $|H(\omega)| = 1$. זהו הערך המקסימלי של $|H(\omega)|$.
- ד. ככל שגורם הטיב Q גדול יותר, אז $|H(\omega)|$ צר יותר סביב התהודה \Leftarrow גורם הטיב משפיע על רוחב הסרט, גודל שאת משמעותו נסביר בסעיף הבא.

- חשוב להדגיש שסעיפים א-ג מאפיינים את פונקצית התמסורת המוגדרת לעיל. עבור אותו מעגל בדיוק אם נבחן את הזרם בשני הענפים האחרים

$$(4.72) \quad \tilde{H}(\omega) \equiv \frac{\bar{I}_L + \bar{I}_C}{\bar{I}_s} = 1 - H(\omega) = \frac{jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- ברור לחלוטין שדווקא בתהודה פונקצית התמסורת מתאפסת.

• כמובן שאפילו למעגל RLC מקבילי פשוט זה ישנן עוד מספר אפשרויות למשל

$$(4.73) \quad H(\omega) = \frac{\bar{I}_L}{\bar{I}_s}, H(\omega) = \frac{\bar{I}_C}{\bar{I}_s}, \dots$$

רוחב הסרט (Bandwidth)

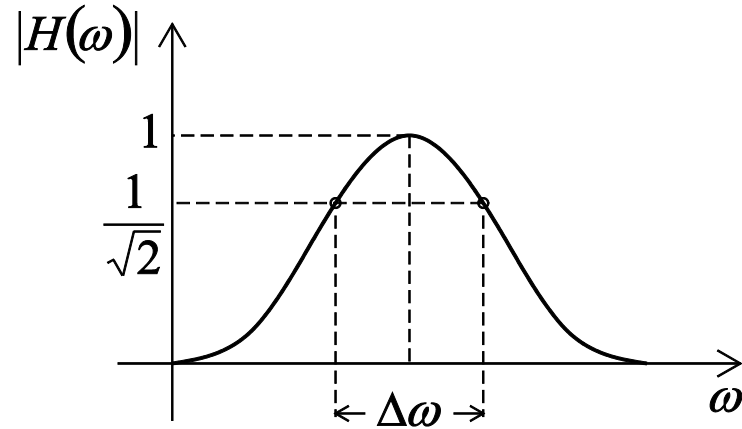
רוחב הסרט המוזכר בסעיף די לעיל, הינו רוחב פונקציית התמסורת באזור שערכה שווה ל- $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מערכה המקסימלי. במעגל שלנו תגובת המשרעת המקסימלית היא 1. נחפש את התדרים המגדירים את הסרט

$$(4.74) \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \frac{1}{2}$$

אם נפתח לטור את הביטוי הנ"ל נגיע ל

$$(4.75) \quad \frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$$

זאת בהנחה ש- $Q \gg 1$. רוחב הסרט, כלומר את ההפרש בין תדרי הקצה הללו נתון על-ידי



איור 4.15: רוחב סרט של פונקצית תמסורת

(4.76)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} &\equiv \frac{\omega_+}{\omega_0} - \frac{\omega_-}{\omega_0} \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) - \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ &= \frac{1}{Q} \end{aligned}$$

העובדה ש $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{Q}$ מהווה קשר שימושי למדידת

גורם הטיב.

הערות:

א. יחס הספק כניסה ויציאה מגדירים **הגבר** :

$$(4.77) \quad \text{Gain [dB]} = 10 \log \left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right) = 20 \log \left(\left\| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right\| \right) = 20 \log |H(\omega)|$$

ב. בסקלה לוגריתמית, דהיינו ב- dB רוחב הסרט מוגדר לפי נקודת ה-3dB

$$(4.78) \quad 20 \log \left| \frac{H(\omega_{\pm})}{H(\omega_0)} \right| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -10 \log 2 = -3 \text{dB}$$

גורם הטיב (Quality Factor (Q))

גורם הטיב מהווה מדד לכליאת האנרגיה האלקטרומגנטית במהוד.

$$\bullet \text{ במעגל } RLC \text{ טורי } Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\bullet \text{ במעגל } RLC \text{ מקבילי } Q = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

- בשני המעגלים הללו ניתן להוכיח בקלות יחסית שגורם הטיב הינו היחס בין האנרגיה האגורה במעגל לבין כמות האנרגיה שמתבזבזת במחזור אחד

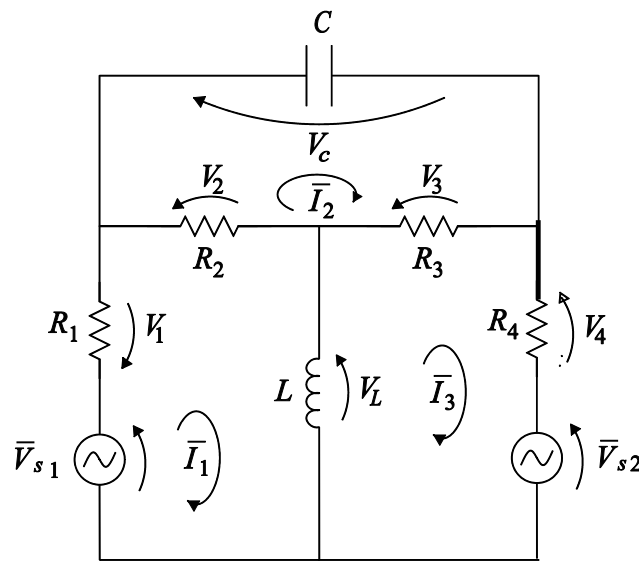
$$(4.79) \quad Q = 2\pi \frac{\langle W_{\text{total}} \rangle}{\langle W_{\text{loss}} \rangle} = \frac{\langle W_{\text{total}} \rangle}{\langle P_{\text{loss}} \rangle / \omega_0}$$

- במעגלים יותר מורכבים ניתן להתייחס לביטוי הזה כהגדרת גורם הטיב.
- **שים-לב:** הסימון Q משמש גם לגורם הטיב וגם להספק העיוור.

הגדרה #3:

שתי ההגדרות הקודמות של מושג התהודה מתבססות האחת על שיקולי אנרגיה ($\langle W_E \rangle = \langle W_M \rangle$) ואילו השנייה על שיקולי אימפדנס או אדמיטנס $\text{Im}[Z(\omega_0)] = 0$. הגדרות אלה פשוטות ליישום במעגלים פשוטים – מסדר שני, שלישי או רביעי. ברגע שהמערכות הופכות למורכבות יותר חישוב האנרגיה עשוי להיות מורכב. יתר על-כן, ראינו שלמערכת יכולים להיות **מספר מקורות** ולכן ברור שההגדרה הראשונה עלולה להפוך לתלויה אמפליטודה והדבר כאמור אינו סביר – כי הטענה שלנו הייתה שתהודה היא תכונה פנימית של המעגל. כדי להמחיש את הבעייתיות נסתכל על המעגל שניתחנו בעבר. והשאלה שנשאלת היא, מהו תדר התהודה אם בטור לנגד R_4 ישנו מקור נוסף $V_{s,2}$

(איור 4.16)?

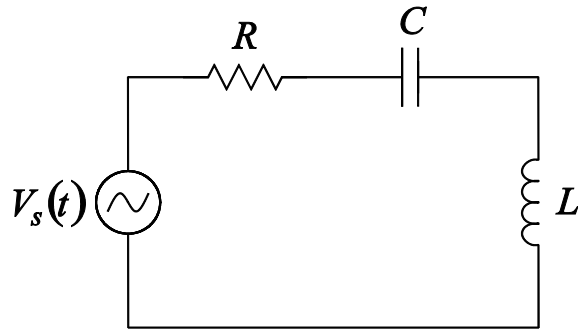


איור 4.16 : מעגל תהודה מורכב

המשוואה שמתארת את המערכת היא

$$(4.80) \quad \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L & -R_2 & -j\omega L \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{j\omega C} + R_3 & -R_3 \\ -j\omega L & -R_3 & j\omega L + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{s,1} \\ 0 \\ \bar{V}_{s,2} \end{bmatrix}$$

תדרי התהודה באופן כללי הם גדלים **מרוכבים** ומוגדרים כתדרים בהם הדטרמיננט של מטריצת האימפדנסים של המערכת מתאפס $\det(\underline{Z}) = 0$ או לסרוגין כתדרים בהם הדטרמיננט של מטריצת האדמיטנסים של המערכת מתאפס $\det(\underline{Y}) = 0$.



איור 4.17: מעגל RLC טורי

נמחיש את ההרחבה הנוכחית עבור מקרה פשוט של מעגל RLC טורי כמואר באיור 4.17. כדי לנסח בעיה פשוטה זו ברישום מטריצי נבחר את הנעלמים כ \bar{V}_C, \bar{I}_L . בהתחשב שהאימפדנס בכניסה נתון על-ידי

$$(4.81) \quad Z_{in} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$(4.82) \quad \left. \begin{aligned} \bar{I}_L &= \frac{\bar{V}_s}{Z_{in}} \\ \bar{V}_C &= \frac{\bar{I}_C}{j\omega C} = \frac{\bar{I}_L}{j\omega C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} Z_{in} & 0 \\ -1 & j\omega C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_L \\ \bar{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A} \begin{pmatrix} \bar{I}_L \\ \bar{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{אזי}$$

לפיכך, תדרי התהודה נתונים על-ידי

$$(4.83) \quad \det[\underline{A}(\omega)] = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} = \frac{j}{2Q} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx \frac{j}{2Q} \pm 1 \quad (Q \gg 1)$$

כך שעבור גורם טיב גדול ($Q \gg 1$) החלק הממשי נותן בקירוב טוב את תדר התהודה לפי ההגדרות הקודמות. החלק המדומה של תדר התהודה המרוכב הינו מקדם הריסון

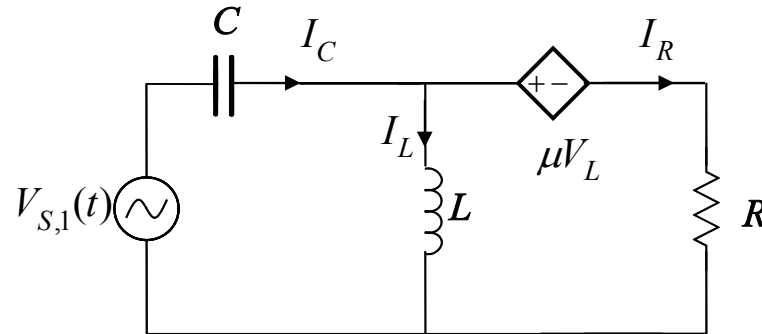
$$(4.84) \quad \boxed{\alpha \equiv \text{Im}(\omega_{\pm}) = \frac{\omega_0}{2Q}}$$

והוא קשור לתהליך של דעיכה אקספוננציאלית (כפי שנראה כאשר נדבר על תופעות מעבר) להבדיל מתהליך תנודות הקשור לחלק הממשי של תדר התהודה.

4.12 מעגלי תהודה – דוגמא #1

נציג להלן דוגמא אשר ממחישה את ההבדלים בין ההגדרות השונות של תדר התהודה כפי שהוצגו בסעיף הקודם.

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור 4.18 להלן



איור 4.18 : מעגל RLC עם מקור מתח מבוקר

המעגל מוזן על-ידי מקור מתח המשתנה הרמונית בזמן מהצורה $V_{S,1}(t) = V_1 \cos(\omega t)$. כמו-כן נתון ש-

$$RC \frac{R}{L} > (1 - \mu)^2 \text{ ו- } \mu \leq 1. \text{ בהנחת מצב מתמיד סינוסי יש לענות על השאלות הבאות:}$$

- חשב את פאזורי הזרם בקבל, בסליל ובנגד.
- חשב את תדר התהודה המוגדר כתדר עבורו אימפדנס הכניסה ממשי הטהור.
- חשב את תדר התהודה המוגדר כתדר עבורו האנרגיה החשמלית הממוצעת בזמן האגורה במעגל שווה לאנרגיה המגנטית הממוצעת בזמן האגורה באותו מעגל.

ד. חשב את תדר התהודה המוגדר כתדר עבורו הערך המוחלט של פונקצית התמסורת

$$H(\omega) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{V}_{S,1}}$$

מקבל את ערכו המקסימלי.

ה. נגדיר את וקטור המצב של המערכת כ- $\bar{I} \equiv \begin{pmatrix} \bar{I}_C \\ \bar{I}_L \end{pmatrix}$. כתוב ברישום מטריצי את מערכת המשוואות

אשר מקיים וקטור זה. חשב את תדר התהודה כתדר עבורו הדיטרמנט של מטריצת המערכת מתאפסת.

ו. באילו תנאים עבור R, L, C ו- μ תדרי התהודה שחשבת בסעיפים ב' עד ה' מתלכדים?

ז. מוסיפים עתה בטור לנגד מקור מתח נוסף מהצורה $V_{S,2}(t) = V_2 \cos(\omega t)$. אילו מההגדרות הנ"ל

עבור תדר התהודה הינה התקפה במקרה זה? הסבר את תשובתך!

פתרון:

א. מחוק קירכהוף לזרמים נקבל:

$$(4.85) \quad \bar{I}_C = \bar{I}_L + \bar{I}_R$$

ואילו מחוק קירכהוף למתחים נקבל:

$$(4.86) \quad V_1 = \frac{\bar{I}_C}{j\omega C} + j\omega L \bar{I}_L$$

$$\bar{V}_L = \mu \bar{V}_L + \bar{I}_R R \Rightarrow j\omega L \bar{I}_L = j\omega \mu L \bar{I}_L + \bar{I}_R R$$

משני הקשרים הנ"ל ניתן לבטא את זרם הקבל ואת זרם הנגד במונחים של זרם הסליל כלהלן

$$(4.87) \quad \begin{aligned} \bar{I}_R &= \frac{j\omega L(1-\mu)}{R} \bar{I}_L \\ \bar{I}_C &= \left[1 + \frac{j\omega L}{R} (1-\mu) \right] \bar{I}_L \end{aligned}$$

לאחר הצבה בחוק קירכהוף למתחים קל להראות שפאזורי הזרם נתונים על-ידי הביטויים הבאים:

$$(4.88) \quad \begin{aligned} \bar{I}_L &= \frac{j\omega RC}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L(1-\mu)} V_1 \\ \bar{I}_R &= \frac{-\omega^2 LC(1-\mu)}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L(1-\mu)} V_1 \\ \bar{I}_C &= \frac{j\omega RC - \omega^2 LC(1-\mu)}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L(1-\mu)} V_1 \end{aligned}$$

ב. אימפדנס הכניסה מוגדר כיחס בין פאזור מתח המקור לבין פאזור זרם המקור, בפרט במקרה הנדון הינו היחס בין פאזור מתח המקור לפאזור זרם הקבל ולפיכך

$$(4.89) \quad Z_{in} = \frac{V_1}{\bar{I}_C} = \frac{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L(1-\mu)}{j\omega RC - \omega^2 LC(1-\mu)}$$

נחפש כעת את התדרים עבורם החלק המדומה של אימפדנס הכניסה מתאפס, דהיינו:

$$(4.90) \quad \text{Im}\{Z_{in}\} = 0 \Rightarrow -\omega R^2 C(1 - \omega^2 LC) - \omega^3 L^2 C(1 - \mu)^2 = 0$$

מלבד תדר האפס עבורו השוויון הנ"ל מתקיים, קיים תדר ממשי אחד והוא:

$$(4.91) \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1 - \mu)^2}}$$

ג. נעבור כעת לחישוב האנרגיות הממוצעות בזמן

האנרגיה החשמלית הממוצעת בזמן האגורה במעגל נתונה על-ידי הביטוי

$$(4.92) \quad \langle W_e \rangle = \frac{1}{4} C |\bar{V}_C|^2 = \frac{1}{4} C \left| \frac{\bar{I}_C}{j\omega C} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^2 C} |\bar{I}_C|^2$$

האנרגיה המגנטית הממוצעת בזמן האגורה במעגל נתונה על-ידי הביטוי

$$(4.93) \quad \langle W_m \rangle = \frac{1}{4} L |\bar{I}_L|^2$$

שתי האנרגיות שוות כאשר

$$(4.94) \quad \langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle \Rightarrow L |\bar{I}_L|^2 = \frac{1}{\omega^2 C} |\bar{I}_C|^2 \Rightarrow \omega^2 LC = 1 + \omega^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 (1 - \mu)^2$$

דהיינו, השוויון מתקיים עבור

$$(4.95) \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1 - \mu)^2}}$$

התדר הזה למה שהתקבל בסעיף הקודם.

ד. כעת נעבור לחישוב פונקצית התמסורת המוגדרת כיחס פאזור מתח הסליל בפאזור מתח המקור. פונקציה זו נתונה על-ידי הביטוי:

$$(4.96) \quad H(\omega) = \frac{-\omega^2 RLC}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L(1 - \mu)}$$

ערכה המוחלט של פונקצית התמסורת נתון על-ידי

$$(4.97) \quad |H(\omega)| = \frac{\omega^2 RLC}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2(1 - \mu)^2}}$$

נחפש כעת את התדרים עבורם הביטוי הנ"ל מקבל נקודת קיצון, דהיינו נחפש נקודות התאפסות הנגזרת הראשונה ונקבל:

$$(4.98) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} |H(\omega)| = 0$$

$$\Rightarrow 2R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + 2\omega^2 L^2(1 - \mu)^2 - \omega^2 L^2(1 - \mu)^2 + 2R^2 LC \omega^2(1 - \omega^2 LC) = 0$$

במפורש, התדר עבורו הנגזרת מתאפסת הינו:

$$(4.99) \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1 - \mu)^2}}$$

תדר זה שונה ממה שהתקבל בסעיפים הקודמים.

ה. נרשום תחילה את מערכת המשוואות שעל פאזורי זרם הקבל והסליל לקיים

$$(4.100) \quad \begin{cases} \bar{I}_C - \bar{I}_L \left[1 + \frac{j\omega L}{R} (1 - \mu) \right] = 0 \\ \frac{\bar{I}_C}{j\omega C} + j\omega L \bar{I}_L = V_1 \end{cases}$$

וברישום מטריצי

$$(4.101) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 - \frac{j\omega L}{R} (1 - \mu) \\ \frac{1}{j\omega C} & j\omega L \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Z}}} \begin{pmatrix} \bar{I}_C \\ \bar{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

תדר התהודה מוגדר כתדר עבורו הדיטרמננט של המטריצה $\underline{\underline{Z}}$ מתאפסת, כלומר

$$(4.102) \quad \det(\underline{\underline{Z}}) = 0 \Rightarrow j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \frac{L}{RC} (1 - \mu) = 0$$

זהו פולינום מרוכב ב- ω ולפיכך שורשי הפולינום מרוכבים אף הם. החלק הממשי של שורשים אלה מהווה את תדר התהודה הנדרש; בצורה מפורשת

$$(4.103) \quad \omega_{\mp} = \frac{j(1-\mu) \pm \sqrt{4RC \frac{R}{L} - (1-\mu)^2}}{2RC}$$

ותדר התהודה הינו

$$(4.104) \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1-\mu)^2}$$

גם כאן התדר שונה מהתדרים שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

ו. נסכם תחילה את התוצאות אשר התקבלו עבור ההגדרות השונות ונראה שהן שוות עבור $\mu = 1$.

$\det(\underline{Z}) = 0$ $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1-\mu)^2}$ $@ \mu = 1 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\max \{ H(\omega) \}$ $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1-\mu)^2}}$ $@ \mu = 1 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle; \text{Im} \{ Z_{in} \} = 0$ $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L}{C} \frac{1}{R^2} (1-\mu)^2}}$ $@ \mu = 1 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
--	---	--

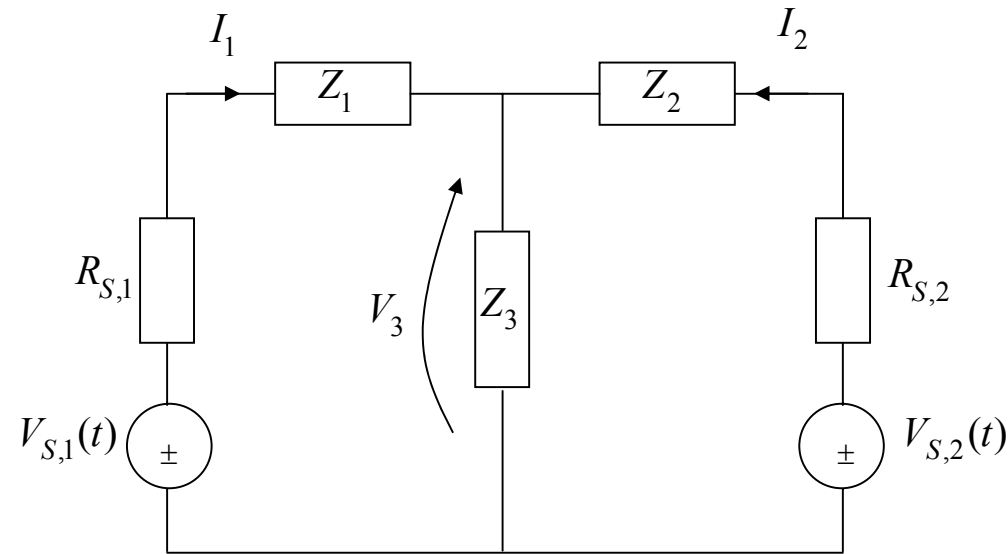
(4.105)

ז. נבחן כעת את ההגדרות השונות של תדרי התהודה כפי שהוצגו בסעיפים הקודמים.

- אימפדנס הכניסה מוגדר עבור המקור המעורר. ברגע שיש לנו במעגל שני מקורות לא ברור איזה אימפדנס כניסה יש לקחת. דהיינו, תדר התהודה מתחיל להיות פונקציה של המקורות בניגוד להגדרת התהודה אשר אמורה להצביע על תכונה פנימית של המעגל.
- במצב שיש יותר ממקור אחד, תדר התהודה אשר מוגדר כתדר עבורו האנרגיות הממוצעות בזמן החשמלית והמגנטית שוות יהיה תלוי באמפליטודות המקורות, ועל-כן הגדרה זו אינה תואמת את העובדה שתדר התהודה הינו תכונה פנימית של המעגל.
- ההגדרה של תדר התהודה כתדר עבורו פונקצית התמסורת מקבלת בערכה המוחלט את המקסימום שלה הינה בעייתית באותה מידה כמו ההגדרה הראשונה, הרי פונקצית התמסורת מוגדרת כתלות במקור המעורר.
- הייחוד בהגדרה של דיטרמיננט אפס טמון בעובדה שכל תוספת מקורות באה לידי ביטוי בשינוי וקטור המקורות ומטריצת המערכת אינה משתנה ולפיכך תדרי התהודה של המעגל לא משתנים ואינם תלויים במספר המקורות או באמפליטודה שלהם ועל-כן זוהי ההגדרה התקפה באופן כללי ביותר.

4.13 מעגלי תהודה – דוגמא #2

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור הבא :



איור 4.19 : מעגל תהודה עם שני מקורות

כל אחד מהרכיבים Z_1 , Z_2 ו- Z_3 הינו מעגל RLC מקבילי עם התנגדות R_i וקיבול C_i והשראות L_i ($i=1,2,3$). המעגל מוזן על-ידי שני מקורות מתח המשתנים הרמונית בזמן בתדר זהה לפי הביטויים

$$(4.103) \quad V_{S,1}(t) = V_{01} \cos(\omega t) \quad ; \quad V_{S,2}(t) = V_{02} \cos(\omega t)$$

בהנחת מצב מתמיד סינוסי יש לענות על השאלות הבאות :

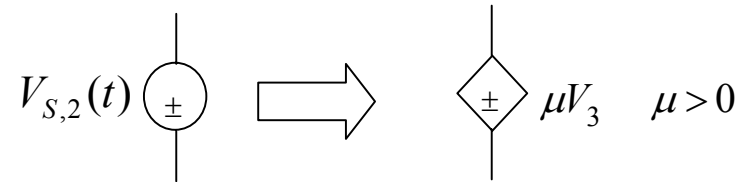
א. יש לרשום מערכת משוואות עבור פאזורי הזרם \bar{I}_1 ו- \bar{I}_2 . יש להביא את המערכת לרישום

מטריצי מהצורה $\underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\bar{I}} = \underline{\bar{V}}_S$ כאשר $\underline{\underline{Z}}$ הינה מטריצת אימפדנסים מסדר 2×2 , $\underline{\bar{I}}$ וקטור פאזורי

הזרם \bar{I}_1 ו- \bar{I}_2 ו- $\underline{\bar{V}}_S$ וקטור המקורות.

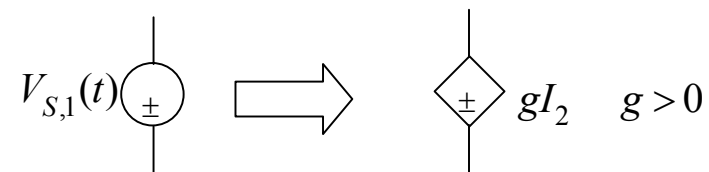
ב. על-סמך המערכת הנ"ל יש להגדיר את תדרי התהודה של המעגל הנתון. אין צורך למצוא את התדרים בצורה מפורשת.

ג. מחליפים עתה את המקור $V_{S,2}(t)$ במקור מתח מבוקר מתח מהצורה



יש לחזור על הסעיפים א' ו- ב'. האם תדרי התהודה של המעגל ישתנו בהשוואה לסעיף ב'?

ד. בנוסף לשינוי שבוצע בסעיף ג' מחליפים את המקור $V_{S,1}(t)$ במקור מתח מבוקר זרם מהצורה

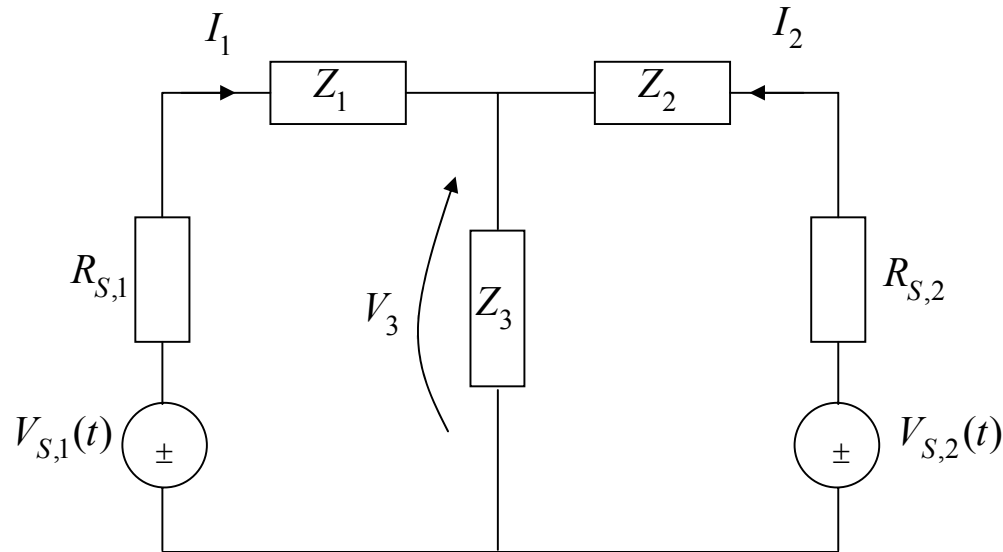


יש לחזור על הסעיפים א' ו- ב'. האם מספר תדרי התהודה ישתנה?

ה. במידה ותדרי התהודה שקבלת בסעיפים ג' ו- ד' שונים מאלה שהתקבלו בסעיף ב' משמעות הדבר שתדר התהודה לפי ההגדרה שהגדרת בסעיף ב' תלוי באופי העירור ב"סתירה" לעובדה שתדר התהודה הינו תכונה פנימית של המעגל. איך ניתן להסביר את "הסתירה" הנ"ל? במידה והתדרים לא משתנים יש להסביר מדוע?

פתרון

א. נרשום תחילה את חוקי קירכהוף עבור המעגל הנתון:



$$(4.104) \quad KCL: \bar{I}_3 = \bar{I}_2 + \bar{I}_1; \quad KVL: \begin{cases} V_{01} = \bar{I}_1 (R_{S,1} + Z_1 + Z_3) + \bar{I}_2 Z_3 \\ V_{02} = \bar{I}_2 (R_{S,2} + Z_2 + Z_3) + \bar{I}_1 Z_3 \end{cases}$$

וברישום מטריצי מקוצר נקבל:

$$(4.105) \quad \underline{\underline{Z}} \cdot \vec{I} = \vec{V}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} R_{S,1} + Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & R_{S,2} + Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{pmatrix}$$

כאשר $Z_i = R_i \parallel j\omega L_i \parallel \frac{1}{j\omega C_i}$; $i=1,2,3$

ב. תדרי התהודה מתקבלים מחיפוש האפסים ב- ω של הדיטרמנט של מטריצת האימפדנסים $\det(\underline{\underline{Z}}(\omega)) = 0$. התדרים המתקבלים הינם מרוכבים שחלקם הממשי מהווה את תדר התהודה של המעגל.

ג. בדומה לסעיף א' נקבל עתה שינוי בחוק קירכהוף למתחים בלולאה הימנית ומקבלים:

$$(4.106) \quad \underline{\underline{Z}} \cdot \vec{I} = \vec{V}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} R_{S,1} + Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3(1-\mu) & R_{S,2} + Z_2 + Z_3(1-\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{01} \\ 0 \end{pmatrix}$$

מאחר ומטריצת האימפדנסים שונה מזו שהתקבלה בסעיף א' הרי הדיטרמנט שלה ישתנה בהתאם ואיתה תדרי התהודה של המעגל.

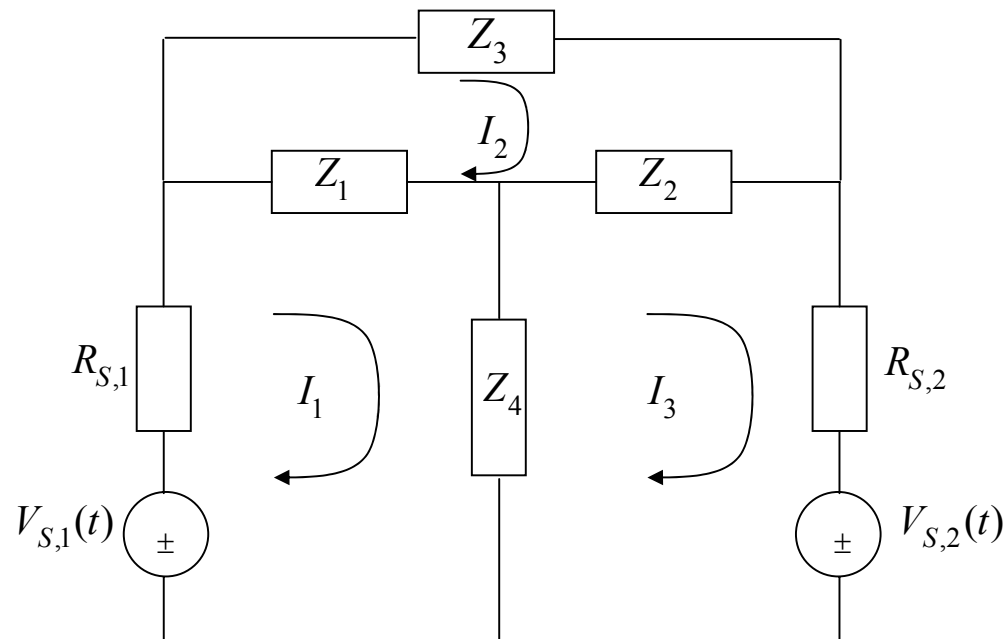
ד. בדומה לסעיף א' נקבל עתה שינוי בחוק קירכהוף למתחים בלולאה השמאלית ומקבלים:

$$(4.107) \quad \underline{\underline{Z}} \cdot \vec{I} = \vec{V}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} R_{S,1} + Z_1 + Z_3 & Z_3 - g \\ Z_3(1-\mu) & R_{S,2} + Z_2 + Z_3(1-\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מאחר ומטריצת האימפדנסים שונה מזאת שהתקבלה בסעיף א' הרי הדיטרמיננט שלה ישתנה בהתאם ואיתה תדרי התהודה של המעגל. יש לשים-לב שעקב השינוי הנ"ל סדר הפולינום שמתאר את הדיטרמיננט אינו משתנה ועל-כן כעקרון מספר תדרי התהודה לא ישתנה. ה. אין כל סתירה בתוצאות הרי שינינו מקורות בלתי תלויים במקורות תלויים אשר משנים את המבנה הפנימי של המעגל ואכן את תדרי התהודה.

4.14 מעגלי תהודה: דוגמא מסכמת

בסעיפים הקודמים הדגמנו איך ניתן לחשב את תדרי התהודה של מעגל חשמלי נתון בהתאם להגדרות השונות שהוצגו בסעיף 4.11. בסעיפים אלה נוכחנו לדעת שאין כל ההגדרות שקולות תמיד. כמו-כן, הראנו שאין כל ההגדרות תקפות ובעלות משמעות בכל מעגל חשמלי. בסעיף זה נביא דוגמא מסכמת אשר ממחישה את יתרונה של ההגדרה של תדר התהודה על-סמך התאפסות הדיטרמיננט של המטריצה המייצגת של המעגל החשמלי הנדון. בדוגמא זו נמחיש באופן גרפי את תלות חלק מההגדרות האחרות במספר המקורות אשר מזינים את המערכת.



איור 4.20: מעגל תהודה עם שני מקורות

כל אחד מהרכיבים Z_i הינו מעגל תהודה טורי המאופיין על-ידי הביטוי האימפדנס הבא:

$$(4.108) \quad Z_i = R_i + j \frac{\omega}{\omega_{0,i}} Z_{0,i} \left(1 - \left(\frac{\omega_{0,i}}{\omega} \right)^2 \right); \quad i=1,2,3,4$$

כאשר:

- R_i הינה ההתנגדות האופיינית של הרכיב ה- i .
- $Z_{0,i}$ הינו האימפדנס האופייני של הרכיב ה- i .
- $\omega_{0,i}$ הינו תדר התהודה של הרכיב ה- i .

המעגל מוזן על-ידי שני מקורות מתח המשתנים הרמונית בזמן מהצורה:

$$(4.109) \quad V_{S,i} = V_i \cos(\omega t); \quad i=1,2$$

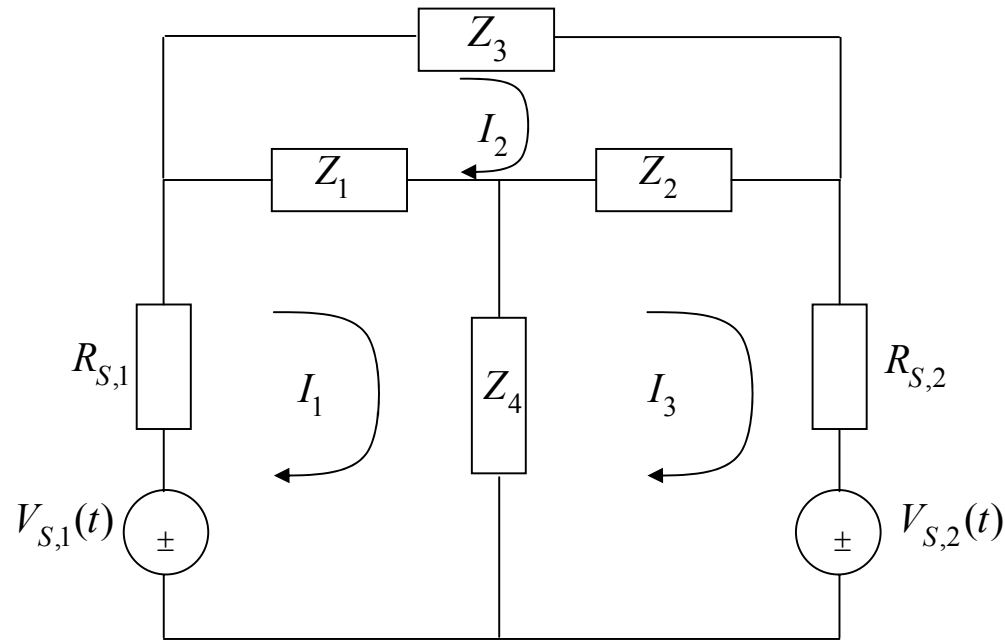
לצורך ההמחשה נשתמש בגדלים הבאים עבור רכיבי המעגל:

$$(4.110) \quad R_{S,1} = R_{S,2} = 1\Omega; \quad R_i = 1\Omega; \quad i=1,2,3,4 \quad Z_{0,i} = 100\Omega \quad \omega_{0,i} = \begin{pmatrix} 1-\delta\omega \\ 1 \\ 1 \\ 1+\delta\omega \end{pmatrix}$$

כמו-כן נניח ש- $V_i = 1\text{volt}; \quad i=1,2$.

ראשית כל ננסח את פתרון המעגל בשיטת החוגים. לצורך זה, נגדיר את זרמי החוגים כפי שמתואר

באיור 4.20.



בהנחת מצב מתמיד סינוסי ולפי הכיוונים המסומנים באיור לעיל, המטריצה המייצגת עבור פאזורי הזרם של המעגל הינה:

$$(4.111) \quad \begin{pmatrix} R_{S,1} + Z_1 + Z_4 & -Z_1 & -Z_4 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_2 \\ -Z_4 & -Z_2 & R_{S,2} + Z_2 + Z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{S,1} \\ 0 \\ \bar{V}_{S,2} \end{pmatrix}$$

תדרי התהודה מוגדרים כחלק הממשי של ω אשר מאפס את הדיטרמיננט של המטריצה המייצגת הנתונה במשוואה (4.111).

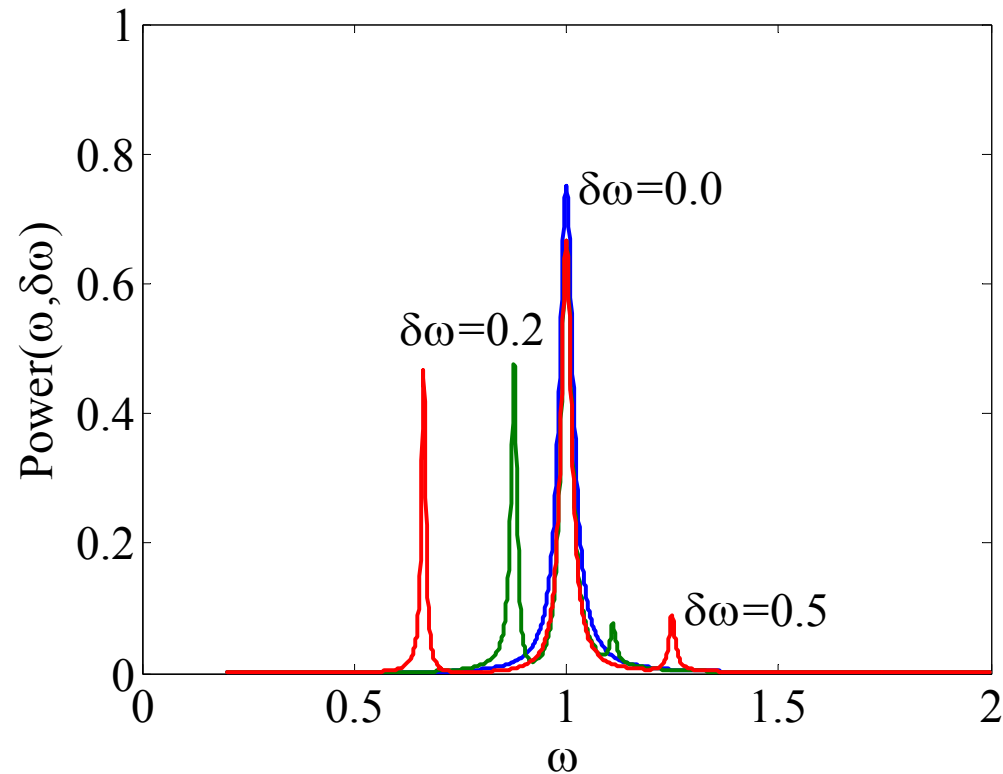
נבחן כעת את התנהגות המעגל עבור פרמטרים שונים באופן הבא:

• חישוב ההספק הממשי הכולל הממוצע בזמן:

ההספק הממשי הכולל הממוצע בזמן הינו סכום ההספקים הממוצעים בזמן בכל אחד ואחד מהנגדים ברכיבים השונים של המעגל, דהיינו:

$$(4.112) \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} \left(R_{S,1} |\bar{I}_1|^2 + R_{S,2} |\bar{I}_3|^2 + R_1 |\bar{I}_1 - \bar{I}_2|^2 + R_2 |\bar{I}_2 - \bar{I}_3|^2 + R_3 |\bar{I}_2|^2 + R_4 |\bar{I}_1 - \bar{I}_3|^2 \right)$$

נציג עתה גרפים עבור ההספק הממוצע בזמן כפונקציה של התדר כאשר $\delta\omega = 0, 0.2, 0.5$ rad/sec.



איור 4.21: ההספק הכולל הממוצע בזמן כפונקציה של התדר

כפי שניתן לראות מהגרף הקודם, מספר תדרי התהודה (הנקודות עבורם ההספק הכולל מקבל את ערכי השיא שלו) משתנה כתלות בפרמטר $\delta\omega$. הסיבה לכך טמונה בעובדה שתדר התהודה של המעגל הכולל מוכתב על-ידי כל הרכיבים ועל-כן אם ישנה סטייה בין תדרי התהודה של הרכיבים השונים תדרי התהודה של המעגל הכולל ישתנו בהתאם.

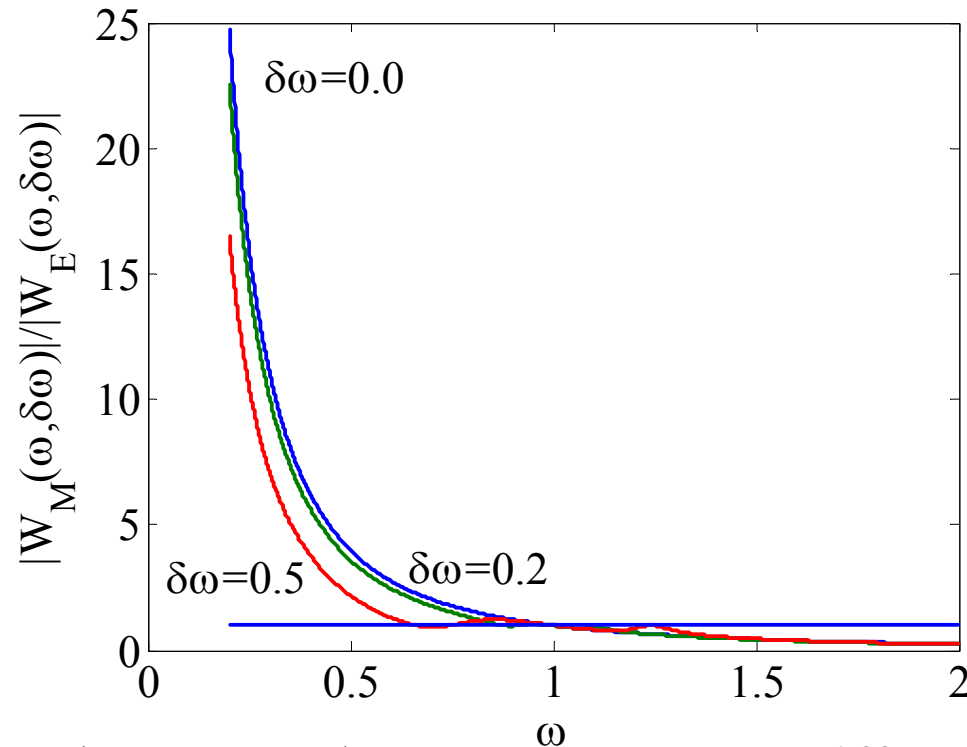
• חישוב יחס האנרגיות החשמלי והמגנטית הממוצעות בזמן

האנרגיה החשמלית הממוצעת בזמן האגורה במעגל הנדון הינה סכום האנרגיות החשמליות האגורות בכל אחד ואחד מקבלי הרכיבים השונים. באופן דומה, האנרגיה המגנטית הממוצעת בזמן שווה לסכום האנרגיות המגנטיות האגורות בסלילים השונים בכל אחד מהרכיבים. בפרט, הביטוי המלא לחישוב האנרגיות האלה הינו:

$$(4.113) \quad \langle W_M \rangle = \frac{1}{4} \left(L_1 |\bar{I}_1 - \bar{I}_2|^2 + L_2 |\bar{I}_2 - \bar{I}_3|^2 + L_3 |\bar{I}_2|^2 + L_4 |\bar{I}_1 - \bar{I}_3|^2 \right); \quad L_i = \frac{Z_{0,i}}{\omega_{0,i}}$$

$$(4.114) \quad \langle W_E \rangle = \frac{1}{4\omega^2} \left(\frac{|\bar{I}_1 - \bar{I}_2|^2}{C_1} + \frac{|\bar{I}_2 - \bar{I}_3|^2}{C_2} + \frac{|\bar{I}_2|^2}{C_3} + \frac{|\bar{I}_1 - \bar{I}_3|^2}{C_4} \right); \quad C_i = \frac{1}{Z_{0,i}\omega_{0,i}}$$

יחס האנרגיות הנ"ל נותן אינדיקציה נוספת לתדרי התהודה. כאשר יחס זה שווה ל-1 יש למעגל תדר תהודה. בגרף הבא מתואר יחס זה עבור $\delta\omega = 0, 0.2, 0.5 \text{ rad/sec}$.



איור 4.22: יחס האנרגיות המגנטית והחשמלית האגורות במעגל

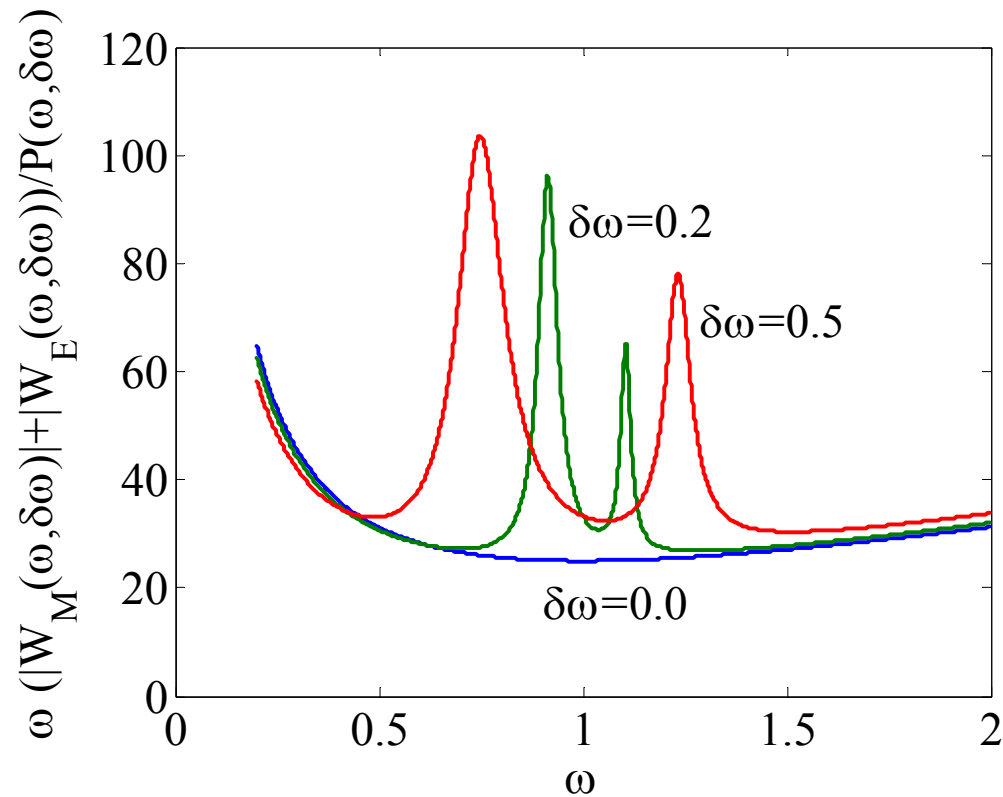
כפי שניתן לראות מהגרפים הנ"ל, מספר נקודות החיתוך של יחס האנרגיות עם הערך 1 משתנה כתלות ב- $\delta\omega$. מספר הנקודות מתלכד עם מספר נקודות השיא אשר התקבלו בעת חישוב ההספק.

• הערכת גורם הטיב של המעגל

כשלב אחרון, נראה את השתנות גורם הטיב של המעגל כפונקציה של התדר. נגדיר את גורם הטיב באופן הבא:

$$(4.115) \quad Q(\omega, \delta\omega) \equiv \omega \frac{|W_M(\omega, \delta\omega)| + |W_E(\omega, \delta\omega)|}{|P(\omega, \delta\omega)|}$$

ההתנהגות האופיינית של גודל זה כפונקציה של התדר עבור $\delta\omega = 0, 0.2, 0.5$ rad/sec מובאת להלן:



איור 4.23 : גורם הטיב כפונקציה של התדר

הפרק החמישי – תופעות מעבר במעגלים מסדר ראשון

5.1 מבוא לפתרון מעגלים בתחום הזמן

בפרק הקודם פתרנו מעגלים חשמליים במצב מתמיד. כלומר, הנחנו כי כל תופעות המעבר במעגל דעכו לאפס, ותגובת המעגל ברגע בו אנו מנתחים את המעגל קבועה, או מחזורית.

בפרקים הבאים, נרצה להתחשב בתופעות המעבר ולנתח את תגובת המעגל בכל רגע ורגע, ובפרט מייד לאחר שינוי כלשהו בעירור המעגל. לשם כך, נדרש לנתח את המעגל באמצעות משוואות דיפרנציאליות. בפרק הנוכחי נעסוק במעגלים מסדר ראשון - מקור השם הוא במשוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון המתארת את התנהגות המעגל.

במצב מתמיד סינוסי, ניתחנו את המעגלים החשמליים במישור התדר, דהיינו, ברישום פאזורי. על-מנת לנתח את תופעות המעבר במעגלים חשמליים מסדר ראשון, אנו נצטרך להציג את הפתרון במישור הזמן. יש לזכור שבפתרון במישור התדר **משוואות דיפרנציאליות** אשר מתארות את התנהגות המעגל הופכות ל**משוואות אלגבריות** ולכן לא קיים כל קושי בפתרון מעגל חשמלי מסדר כלשהו. במישור הזמן, מאחר והמשוואות הדיפרנציאליות מתארות את התנהגות המעגל, יש צורך להציג את הפתרון עבור סדרים שונים. סיבוכיות הפתרון, עולה עם העלאת סדר המעגל.

ככלל משוואה דיפרנציאלית, ניתן לפתור אך ורק בהינתן **תנאי ההתחלה**. המשוואה הדיפרנציאלית עשויה להיות הומוגנית או בלתי הומוגנית, ועל-כן הפתרון מורכב מפתרון הומוגני ופתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית. בשל הלינאריות של המשוואות הדיפרנציאליות הנובעת מלינאריות המעגלים בהם נתמקד, ניתן לפרק את הפתרון הכללי למשוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית בהינתן תנאי התחלה לשני חלקים: החלק הראשון, תגובה לכניסה אפס, דהיינו, משוואה הומוגנית עם תנאי התחלה כלליים והחלק השני, תגובה לתנאי התחלה אפס, דהיינו, משוואה לא הומוגנית עם תנאי התחלה אפס. הפתרון הכולל, יהיה מורכב מסכום שני הפתרונות הנ"ל. היתרון בהצגה זו לעומת החלוקה לפתרון פרטי והומוגני, טמון בעובדה שעבור מעגל המוזן ממספר מקורות ניתן להשתמש בעקרון הסופרפוזיציה אך ורק עבור תנאי התחלה אפס.

5.2 תגובה לכניסה אפס (ZIR - Zero Input Response)

על-מנת להגדיר תגובה כתלות בזמן, או פונקציה כלשהי כתלות בזמן, עלינו להגדיר את ציר הזמן. כיוון הציר מובן מאליו מכיוון שמדובר בזמן פיזיקלי, וקביעת האפס היא שרירותית בידינו. משוואות דיפרנציאליות נותנות לנו את האפשרות למצוא פונקציה מסוימת לפי ההתנהגות הדיפרנציאלית שלה, ולפי תנאי התחלה בזמן מסוים. למעשה, אנו נוכל למצוא את הפונקציה רק עבור זמן גדול מהזמן בו נתונים תנאי ההתחלה, כלומר "מימין" לזמן האפס.

בסעיף זה נבחן מעגלים בהם אין עירור, אך בזמן אפס, יש בהם "תנאי התחלה". כפי שראינו בעבר, בקבל אגורה אנרגיה נתונה ($W_{C,0} = W_C(t=0)$) לכן, אם הקבל מחובר לנגד כל האנרגיה תהפוך לחום והקבל יתפרק מכל מטענו. תופעה דומה מתרחשת אם מחברים נגד במקביל לסליל שאגורה בתוכו אנרגיה מגנטית בהתחלה.

התגובה של מעגל לכניסה אפס היא התגובה שלו לתנאי ההתחלה המוכתבים. נראה כעת שתי דוגמאות.

דוגמא #1 - מעגל RC :

נתון מעגל RC פשוט כמתואר באיור 5.1.

נתון כי בראשית ציר הזמן, קיים מתח על הקבל. כלומר ישנו תנאי ההתחלה הבא

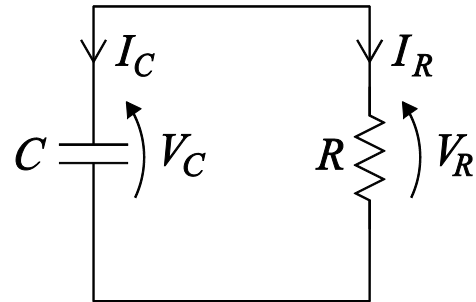
$$V_C(t=0) = V_0$$

(5.1)

נרשום KCL עבור המעגל

$$(5.2) \quad 0 = I_C + I_R = C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R}$$

נסדר את המשוואה ונקבל



איור 5.1 : מעגל RC פשוט

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} V_C + \frac{1}{RC} V_C = 0 \\ V_C(0) = V_0 \end{cases}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מסדר ראשון, עם תנאי התחלה אחד. שים לב שאין משמעות למשוואה ללא הגדרת תנאי ההתחלה. למציאת הפתרון נסמן את **מקדם הדעיכה** (קבוע הזמן) של המעגל

$$(5.4) \quad \tau = RC$$

τ [sec] תלוי אך ורק בפרמטרים של המעגל. מייד נראה כיצד הוא מתאר את דעיכת התגובה במעגל.

נחזור בקצרה על פתרון משוואה מהצורה שהתקבלה ב- 5.3.

יש לתפור משוואה הומוגנית מהצורה:

$$(5.5) \quad \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) V_C = 0$$

מכאן נקבל

$$(5.6) \quad \frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C}{\tau} \Rightarrow \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{\tau}$$

או לחילופין,

$$(5.7) \quad d(\ln V_C) = -d\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

אינטגרציה על שני צידי המשוואה תיתן

$$(5.8) \quad \ln V_C = -\frac{t}{\tau} + K \Rightarrow V_C(t) = A e^{-t/\tau}$$

למעשה נותר רק למצוא את הקבוע A , וזאת באמצעות אילוץ תנאי ההתחלה הנתון.

$$(5.9) \quad V_C(t=0) = A = V_0$$

לסיכום, התגובה של המעגל לכניסה אפס, או לתנאי ההתחלה (ZIR) של מעגל RC הוא:

$$(5.10) \quad V_{C,ZIR}(t \geq 0) = V_0 e^{-t/\tau} \Leftrightarrow V_{C,ZIR}(t) = V_0 e^{-t/\tau} h(t)$$

$$\text{כאשר } h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

היא פונקצית המדרגה (Heaviside); מקובל לרשום את פונקציית

המדרגה גם באמצעות $u(t)$. נשים לב שעבור $t \cong 5\tau$, תגובת המעגל כבר דועכת בקירוב טוב לאפס.

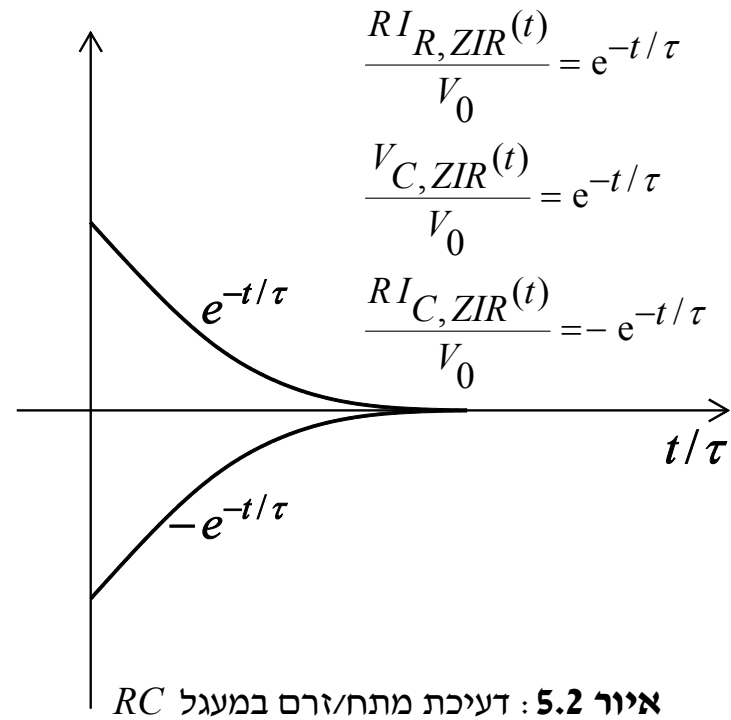
כמובן אפשר להסיק באופן מיידי כי זרם הקבל וזרם הנגד נתונים על-ידי הביטויים הבאים:

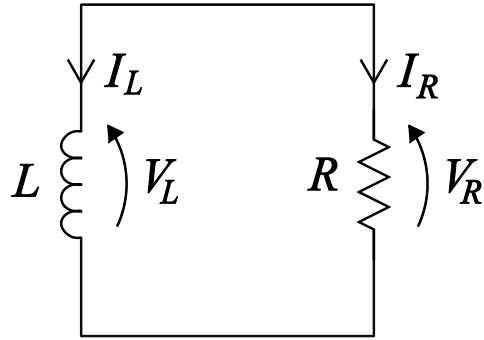
$$(5.11) \quad I_{R,ZIR}(t) = \frac{V_{R,ZIR}(t)}{R} = \frac{V_{C,ZIR}(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$I_{C,ZIR}(t) = -I_{R,ZIR}(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} = C \frac{d}{dt} V_{C,ZIR}(t)$$

לסיכום

(5.12)
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) V_{C,ZIR} = 0 \\ V_{C,ZIR}(0) = V_0 \end{array} \right. \Rightarrow V_{C,ZIR}(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$



דוגמא #2 - מעגל RL :איור 5.3 : מעגל RL פשוטנתון מעגל RL פשוט כמתואר באיור 5.3.נתון כי ב- $t = 0$, ישנו זרם דרך הסליל. כלומר ישנו תנאי ההתחלה הבא

$$(5.13) \quad I_L(t=0) = I_0$$

נרשום KVL עבור המעגל

$$(5.14) \quad 0 = V_L - V_R = L \frac{dI_L}{dt} - RI_R = L \frac{dI_L}{dt} + RI_L$$

נסדר את המשוואה ונקבל

$$(5.15) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{dI_L}{dt} + \frac{R}{L} I_L = 0 \\ I_L(0) = I_0 \end{cases}}$$

נסמן את מקדם הדעיכה של המעגל (ביחידות של זמן)

$$(5.16) \quad \tau = \frac{L}{R}$$

קיבלנו משוואה דומה למשוואה במעגל RC מהצורה

$$(5.17) \quad \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) I_L = 0$$

לכן נשתמש בפתרון דומה למקרה הקודם, דהיינו:

$$(5.18) \quad I_{L,ZIR}(t \geq 0) = I_0 e^{-t/\tau} \Leftrightarrow I_{L,ZIR}(t) = I_0 e^{-t/\tau} h(t)$$

לפיכך, זרם הנגד ומתח הסליל נתונים על-ידי הביטויים הבאים:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} I_{R,ZIR}(t) &= -I_{L,ZIR}(t) = -I_0 e^{-t/\tau} h(t) \\ V_{L,ZIR}(t) &= V_{R,ZIR}(t) = RI_{R,ZIR}(t) = -RI_0 e^{-t/\tau} h(t) = L \frac{d}{dt} I_{L,ZIR}(t) \end{aligned}$$

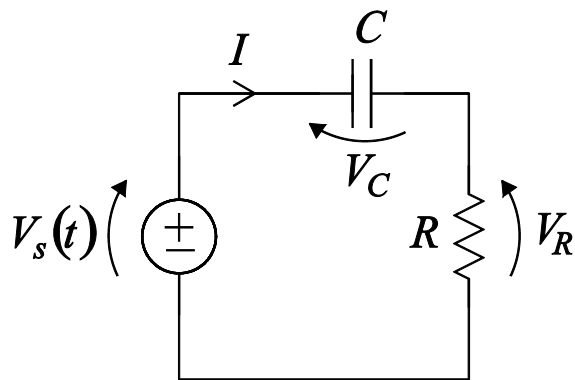
5.3 תגובה למצב התחלתי אפס (ZSR - Zero State Response)

כעת נרצה לדעת מהי תגובת המעגל לעירור מסוים. נפשט מקרה זה על-ידי קביעת תנאי ההתחלה בראשית ציר הזמן להיות אפס.

ננתח תחילה מעגל RC טורי פשוט המוזן על-ידי מקור מתח $V_S(t)$.

תנאי ההתחלה עבור המעגל הינו:

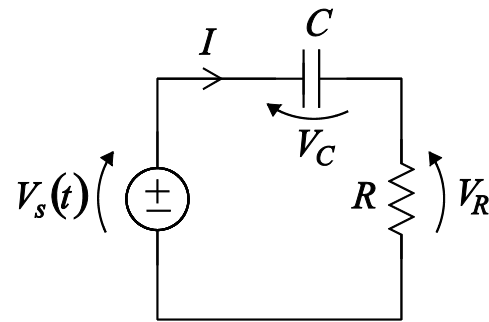
$$V_C(t=0) = 0$$



איור 5.4: מעגל RC טורי

$$(5.20)$$

נפעיל KVL במעגל



$$(5.21) \quad V_s = V_C + V_R = V_C + RI = V_C + RC \frac{d}{dt} V_C$$

נסדר את המשוואה ונקבל

$$(5.22) \quad \begin{cases} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = \frac{1}{RC} V_s(t) \\ V_C(0) = 0 \end{cases}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית עבור מעגל RC טורי (כלומר, הוספת מקור למעגל גרם להתווספות חלק אי-הומוגני למשוואה).

נחפש פתרון מהצורה

$$(5.23) \quad V_C(t) = A(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

הצבה במשוואה (5.22) נותנת,

$$(5.24) \quad \frac{d}{dt} \left[A(t) e^{-t/\tau} \right] + \frac{1}{\tau} A(t) e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} V_s(t)$$

נפתח את הסוגריים ונצמצם איברים ונקבל

$$(5.25) \quad \frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{\tau} V_s(t) e^{t/\tau}$$

אינטגרציה על שני צידי המשוואה תיתן $[A(t=0) = 0]$

$$(5.26) \quad A(t) = \int_0^t dt' V_s(t') \left[\frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{t'}{\tau}\right) \right]$$

נציב ביטוי זה אל תוך הפתרון שניחשנו ונקבל

$$(5.27) \quad V_{C,ZSR}(t \geq 0) = e^{-t/\tau} \int_0^t dt' V_s(t') \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{t'}{\tau}\right) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{1}{\tau} V_s(t') dt'$$

כלומר,

$$(5.28) \quad V_{C,ZSR}(t \geq 0) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{1}{\tau} V_s(t') dt'$$

הערה:

• הפונקציה

$$(5.29) \quad G(t|t') \equiv e^{-(t-t')/\tau} h(t-t')$$

נקראת **פונקצית גרין** של המשוואה הדיפרנציאלית מסדר ראשון ואילו $h(t-t')$ הינה **פונקצית**

מדרגה (*Heaviside*) המוגדרת באופן הבא:

$$(5.30) \quad h(x) \equiv \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

באמצעותה, ניתן לרשום את (5.28) בצורה

(5.31)

$$V_{C,ZSR}(t \geq 0) = \int_0^{\infty} G(t|t') \frac{V_s(t')}{\tau} dt'$$

• פונקצית גרין היא תגובת המעגל להלם, כלומר אם נבחר $V_s(t') = V_0 \tau \delta(t')$

אזי $V_{C,ZSR}(t) = V_0 G(t|t'=0)$. נרחיב את הדיון בנושא של פונקצית גרין בפרק הבא.

• על סמך משפט הסופרפוזיציה והתוצאה האחרונה ניתן כעת להרחיב ל- N מקורות את פתרון

המשוואה הדיפרנציאלית המתאים למקור אחד $V_s(t')$: $V_s(t') \rightarrow \sum_{n=1}^N V_{s,n}(t')$. התגובה הכללית

הינה

(5.32)

$$V_{C,ZSR}(t \geq 0) = \int_0^{\infty} G(t|t') \sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau} V_{s,n}(t') dt'$$

לכן, בהנחה שהסכום והאינטגרל מתכנסים, ניתן להחליף את סדר הפעולות (סכימה ואינטגרציה)

(5.33)

$$V_{C,ZSR}(t \geq 0) = \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} G(t|t') \frac{1}{\tau} V_{s,n}(t') dt' \equiv \sum_{n=1}^N V_{C,ZSR,n}(t)$$

משמעות הצעד האחרון היא, שפתרון המשוואה עם מספר מקורות שונים, כפוף לתנאי התחלה אפס, הוא סכום הפתרונות החלקיים.

5.4 תגובה כוללת - לכניסה ולתנאי התחלה

אחרי שהגדרנו את שני סוגי הפתרונות (ZIR & ZSR) נראה שהפתרון הכולל הוא סכום שני הפתרונות, דהיינו, במושגים של הדוגמא שראינו קודם $V_{C,total}(t) = V_{C,ZSR}(t) + V_{C,ZIR}(t)$. כדי להראות זאת, כדאי לזכור שניתן לשנות את תנאי ההתחלה על קבל באמצעות עירור של פונקציית דלתא. אם נניח ש $V_C(t=0^-) = 0$ אזי מקור נוסף ל $V_s(t)$, שהוא פונקציית דלתא, ישנה את תנאי

ההתחלה על הקבל ל- (V_0) בתנאי שהמקור הוא מן הצורה $U(t) = V_0 \tau \delta(t)$ לפיכך

$$(5.34) \quad \begin{cases} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{\tau} V_C = \frac{1}{\tau} [V_S(t) + V_0 \tau \delta(t)] \\ V_C(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{\tau} V_C = \frac{1}{\tau} V_S(t) \\ V_C(0) = V_0 \end{cases}$$

אחרי אבחנה זו, ברור ש- **הפתרון הכולל** הוא סופרפוזיציה של שני המקורות $[V_s(t), U(t)]$ לפיכך כפי שכבר ציינו

$$(5.35) \quad \boxed{V_{C,total}(t) = V_{C,ZSR}(t) + V_{C,ZIR}(t)}$$

(5.36)

$$\begin{cases} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C = \frac{1}{RC}V_S(t) \\ V_C(0) = V_0 \end{cases}$$

ZSR

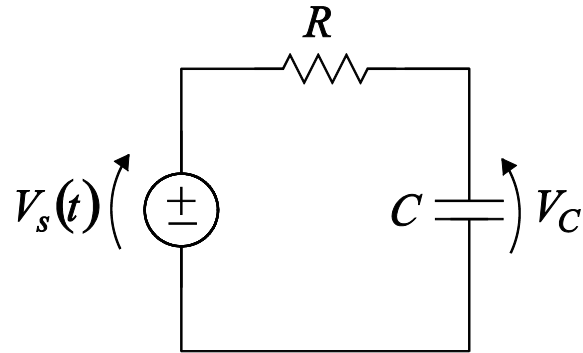
$$\begin{cases} \frac{dV_{C,1}}{dt} + \frac{1}{RC}V_{C,1} = \frac{1}{RC}V_S(t) \\ V_{C,1}(0) = 0 \end{cases}$$

ZIR

$$\begin{cases} \frac{dV_{C,2}}{dt} + \frac{1}{RC}V_{C,2} = 0 \\ V_{C,2}(0) = V_0 \end{cases}$$

$$\underline{V_C(t) = V_{C,1}(t) + V_{C,2}(t)}$$

דוגמא:



איור 5.5: מעגל RC טורי

נביא כאן ניתוח שלם של מעגל מסדר ראשון.

לפנינו מעגל RC ובו עירור שניתן ב- $t = 0$:

$$(5.37)$$

$$V_s(t) = V_1 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

ונתון תנאי ההתחלה:

$$(5.38)$$

$$V_C(t=0) = V_0$$

נרצה לדעת את המתח השורר על הקבל בכל רגע ורגע החל מ- $t = 0$. למעשה אנו כבר מכירים את הפתרונות ZSR ו-ZIR של מעגל זה:

$$(5.39)$$

$$V_{C,ZIR}(t \geq 0) = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$V_{C,ZSR}(t \geq 0) = \int_0^t \frac{V_s(t')}{\tau} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'$$

נרשום בצורה מפורשת את הפתרון ZSR לאחר שנציב את העירור:

$$(5.40)$$

$$\begin{aligned} V_{C,ZSR}(t \geq 0) &= \frac{V_1}{\tau} \int_0^t \frac{t'}{\tau} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \\ &= \frac{V_1}{\tau^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t t' dt' = \frac{1}{2} V_1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

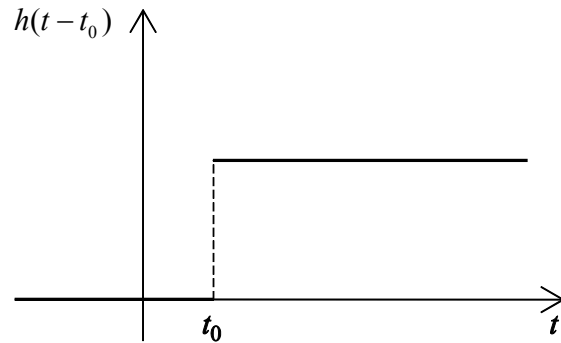
התגובה הכוללת היא סכום התגובות ZSR ו-ZIR. עבור $t \geq 0$

$$(5.41) \quad \begin{aligned} V_C(t) &= V_{C,ZIR}(t) + V_{C,ZSR}(t) \\ &= V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{2} V_1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \left[V_0 + \frac{1}{2} V_1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

5.5 תגובת מעגל מסדר ראשון לפונקצית מדרגה

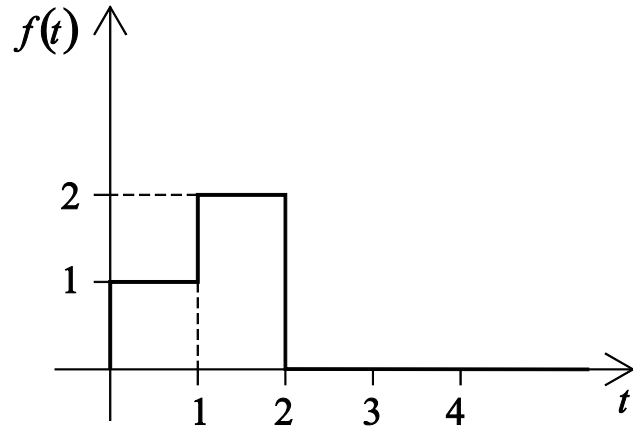
הגדרנו בעבר את פונקצית המדרגה

$$(5.42) \quad h(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

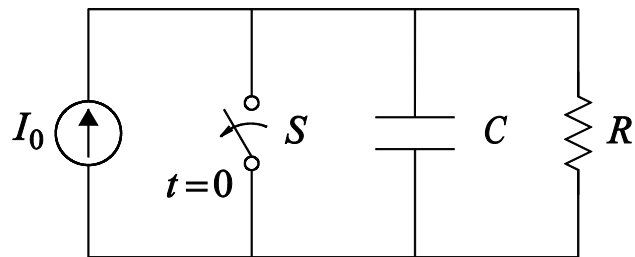


איור 5.6 : פונקצית מדרגה

באיור 5.6 מובא גרף של הפונקציה הנ"ל. זוהי פונקציה לא רציפה, המיועדת "לקטום" תחום השפעה של פונקציות אחרות. בפתרון מעגלים חשמליים בתחום הזמן, לפונקציה זו חשיבות רבה, מכיוון שעירור המעגלים מתחיל לפעול בדרך כלל ב- $t = 0$, או בכל זמן אחר.



איור 5.7: צירוף של פונקציות מדרגה



איור 5.8: מעגל RC עם מתג אידיאלי

נתון כי ב- $t = 0$ פותחים את המפסק S ; לכן, ניתן להסתכל על המקור כעירור מדרגה, דהיינו:

$$(5.44) \quad I_S(t) = I_0 h(t)$$

נרשום את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המעגל החשמלי לאחר רגע המיתוג:

$$(5.45) \quad I_S(t) = I_C(t) + I_R(t) = C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R}$$

צירוף של פונקציות מדרגה מוזזות יכול לקטום פונקציה לתחום חסום, להגביר תגובה בתחומים מסוימים או להנחיתה. כמובן כל זאת מבחינה מתמטית בלבד. לדוגמא, ניקח את הפונקציה הבאה ונשרטט את הגרף אשר מתארה:

$$(5.43) \quad f(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$$

גרף הפונקציה מתואר באיור 5.7.

לפנינו מעגל ובו מתג אידיאלי. משמעות אידיאליות המתג היא, שלפני ואחרי פתיחת המפסק או סגירתו מדובר בשני מעגלים שונים המקושרים ביניהם רק על-ידי תנאי התחלה ברגע המעבר. כמו-כן מיתוג אידיאלי יכול לגרום לקפיצות בעירור, ולתופעות אחרות.

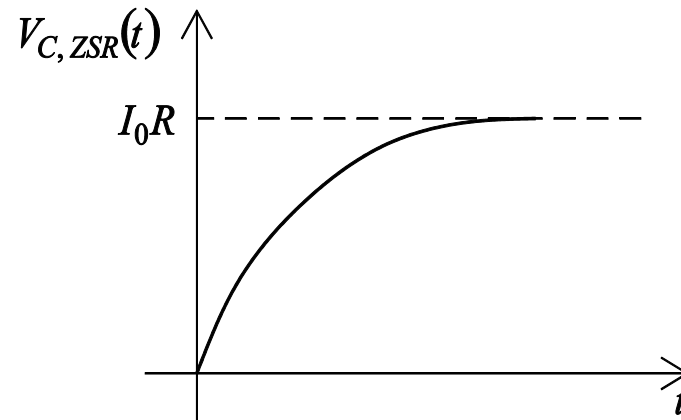
נשתמש בסימון $\tau = RC$. נסדר מחדש את המשוואה ונקבל:

$$(5.46) \quad \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{\tau} V_C = \frac{1}{C} I_S(t) = \frac{RI_0}{\tau} h(t)$$

כאשר נציב את ביטוי המקור (אגף ימין) באינטגרל, נקבל

$$(5.47) \quad \begin{aligned} V_{C,ZSR}(t) &= \frac{RI_0}{\tau} \int_0^t h(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' = \frac{RI_0}{\tau} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \\ &= \frac{RI_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{t'/\tau} dt' = \frac{RI_0}{\tau} e^{-t/\tau} \tau \left(e^{t/\tau} - 1\right) \\ &= RI_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{aligned}$$

כלומר, פונקצית תגובת ה-ZSR של המעגל מתוארת באיור 5.9



איור 5.9: תגובת ZSR לפונקצית מדרגה במעגל RC מקבילי

תגובת ה-ZIR תלויה בתנאי ההתחלה בלבד והפתרון עבורה כבר ידוע. הפתרון הכולל של המעגל

$$(5.48) \quad V_C(t) = \underbrace{V_0 e^{-t/\tau}}_{\text{ZIR}} + \underbrace{I_0 R (1 - e^{-t/\tau})}_{\text{ZSR}}$$

נתבונן כעת בערכי הקצה של המתח על הקבל:

- בזמן $t = 0$, המתח על הקבל נתון כתנאי ההתחלה.
- בזמן $t \rightarrow \infty$ הקבל מהווה נתק ב-DC, לכן, כל הזרם המסופק על-ידי המקור עובר דרך הנגד וקובע באופן חד ערכי את המתח השורר עליו. לפי KVL, זהו בדיוק המתח השורר על הקבל באותו הזמן. בהתאמה נגדיר

$$(5.49) \quad \begin{cases} V_C(t=0) = V_0 \\ V_C(t \rightarrow \infty) = I_0 R = V_\infty \end{cases}$$

ואז ניתן לרשום את הפתרון בצורה הבאה:

$$(5.50) \quad V_C(t) = V_0 e^{-t/\tau} + V_\infty (1 - e^{-t/\tau}) = V_\infty + (V_0 - V_\infty) e^{-t/\tau}$$

בהתאם לרישום הנ"ל, ניתן לפרק את הפתרון לשני חלקים. הפתרון הראשון המתאר את תגובת המצב המתמיד, והפתרון המתאר את תופעת המעבר, שדועכת לאפס בסופו של תהליך

$$(5.51) \quad V_C(t) = \underbrace{V_0 e^{-t/\tau}}_{ZIR} + \underbrace{V_\infty (1 - e^{-t/\tau})}_{ZSR} = \underbrace{V_\infty}_{Steady State} + \underbrace{(V_0 - V_\infty) e^{-t/\tau}}_{Transient}$$

נסכם ונאמר שפתרון המעגל ניתן לחלוקה לשניים :

א. הפתרון המתאר את המצב המתמיד של המעגל, כתלות בעירור הספציפי.

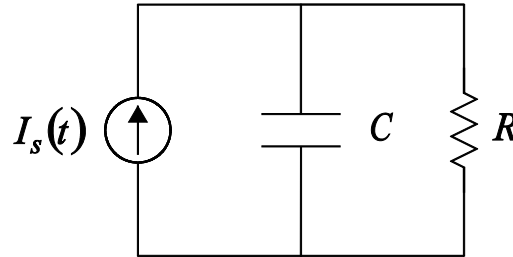
ב. תופעת מעבר הנובעת מהעירור אך נקבעת על-ידי מאפייני המעגל (τ).

למעשה המעגל עובר ממצב מתמיד אחד שבו היה לפני רגע המיתוג למצב אחר.

הערה: נשים לב שהצגנו דרך חשובה לבדיקת הפתרון. בפרקים הקודמים רכשנו כלים לפתרון מעגלים במצב מתמיד. בפרק הנוכחי ובפרקים הבאים אנו מחפשים את הפתרון המלא של המעגל בתחום הזמן, אך בתוכו מסתתר הפתרון במצב מתמיד ($t \rightarrow \infty$), שאותו אנו יכולים "לנחש" מראש.

5.6 תגובת מעגל מסדר ראשון לפונקצית דלתא של דיראק (Dirac)

את ההגדרה הפורמאלית של פונקצית הדלתא $[\delta(t - t_0)]$ לפי דירק כבר ראינו בפרק 2. בסעיף זה אנו ננתח תגובת מעגל מסדר ראשון לעירור פונקצית דלתא במתח או בזרם. לצורך זה נתבונן במעגל המתואר באיור 5.10.



איור 5.10 : מעגל RC מקבילי

זרם העירור נתון על-ידי:

$$(5.52) \quad I_s(t) = q \delta(t)$$

כאשר q הוא סה"כ המטען בפולס הזרם. נתון כי המתח על הקבל לפני ההלם הוא אפס. נפעיל KCL במעגל:

$$(5.53) \quad I_s(t) = I_C + I_R = C \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R} V_C$$

סידור מחדש של המשוואה ושימוש בקבוע הדעיכה במעגל RC, ייתן:

$$(5.54) \quad \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} V_C(t) = \frac{q}{C} \delta(t)$$

$$V_C(0^-) = 0$$

נתבונן במשוואה 5.54. אנו מעוניינים לפתור את המשוואה עבור $t > 0$. אך בתחום זה החלק האי-הומוגני מתאפס. אז כיצד משפיע ההלם על המעגל?

אנו יודעים כי פונקציה מתמטית היא "רגישה" יותר ככל שגוזרים אותה יותר, ו"חלקה" יותר ככל שמבצעים עליה אינטגרציה. אם נתבונן במשוואה, נבין כי קביעה זו מביאה אותנו למסקנה כי הנגזרת של המתח בצד השמאלי של המשוואה "סופגת" אליה את התנהגות ההלם. אי-לכך, תהייה קפיצה במתח על הקבל. האינטגרל על המתח יהיה רציף. כעת, נבצע אינטגרציה על שני צידי המשוואה, סביב ראשית ציר הזמן

$$(5.55) \quad \int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} V_C(t) \right) dt = \int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{q}{C} \delta(t) \right) dt = \frac{q}{C}$$

נתבונן באינטגרל בצד השמאלי של המשוואה ונפרקו לחלקים

$$(5.56) \quad \int_{0^-}^{0^+} \frac{dV_C}{dt} dt = V_C(0^+) - V_C(0^-)$$

באותו אופן נקבל את האינטגרל על החלק השני, בהיותו על מרווח ששואף לאפס ומאחר והמתח משני הצדדים צפוי להיות סופי

$$(5.57) \quad \int_{0^-}^{0^+} V_C(t) dt = 0$$

לסיכום קיבלנו

$$(5.58) \quad V_C(0^+) = V_C(0^-) + \frac{q}{C}$$

דבר שראינו גם בפרק השני. כפוף לתנאי ההתחלה

$$(5.59) \quad V_C(0^+) = \frac{q}{C}$$

כעת נרשום מחדש את המשוואה עבור $t > 0^+$ ונקבל:

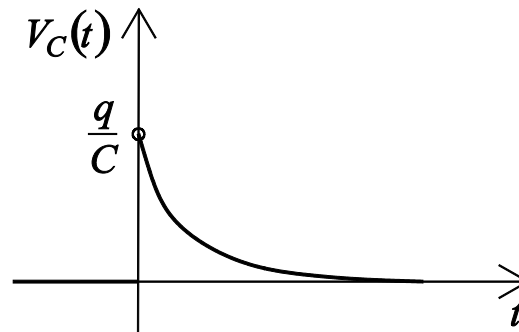
$$(5.60) \quad \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} V_C(t) = 0$$

$$V_C(0^+) = \frac{q}{C}$$

ופתרונה (ZIR) מוכר לנו

$$(5.61) \quad V_C(t) = \frac{q}{C} e^{-t/\tau} h(t)$$

נשים לב כי הכפלנו את התשובה הסופית בפונקצית מדרגה, זאת מכיוון שלפתרון אין משמעות עבור התחום $t < 0$. התהליך של קביעת ההתנהגות של הפונקציה הנעלמת ונגזרותיה לפי החלק האי-הומוגני במשוואה, ולאחר מכן אינטגרציה סביב מיקום ההלם בציר הזמן, הוא תהליך הנקרא "איזון הלמים". למעשה קיום פונקצית דלתא בחלק האי-הומוגני של המשוואה הדיפרנציאלית גורם לשינוי תנאי ההתחלה. אם לא הייתה מופיעה פונקצית דלתא בחלק האי-הומוגני, אז אינטגרציה על חלק זה הייתה אפס, ולכן לא הייתה השפעה על תנאי ההתחלה.



איור 5.11: תגובה להלם במעגל RC מקבילי

5.7 שיקולי אנרגיה והספק במעגלים מסדר ראשון

עד-כה למדנו איך לפתור מעגל חשמלי מסדר ראשון במישור הזמן ולחשב את התגובה לעירור כלשהו. ננסה עתה, לנתח את התנהגות מעגל מסדר ראשון מהיבט אנרגטי, דהיינו, נתאר את תהליך החלפת האנרגיה כתלות בזמן במעגל מסדר ראשון.

לפנינו מעגל RC פשוט עם תנאי התחלה

$$(5.62) \quad V_C(0) = V_0$$

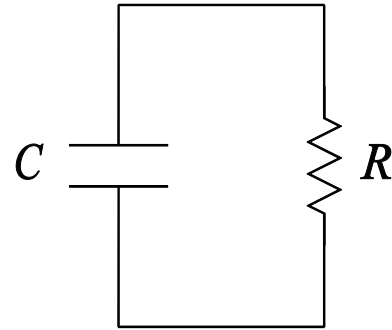
מהי האנרגיה החשמלית האגורה במעגל (כתלות בזמן) $W_E(t)$? ומהו ההספק החשמלי המבוזבז בחימום הנגד בכל רגע $P(t)$? מהו הקשר ביניהם?

האנרגיה נאגרת בקבל בכל רגע זמן נתון הינה:

$$(5.63) \quad W_E(t) = W_C(t) = \frac{1}{2} C V_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

הביטוי לאנרגיה האגורה בקבל **דועך** לאפס בצורה **אקספוננציאלית**. ההספק הרגעי המבוזבז בנגד נתון על-ידי

$$(5.64) \quad P(t) = \frac{V_R^2(t)}{R} = \frac{V_C^2(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$



איור 5.12: מעגל RC פשוט

נתבונן בסך כל האנרגיה שבוזבז מרגע $t = 0$ ועד הרגע $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 W_{diss}(t) &= \int_0^t P(t') dt' = \frac{V_0^2}{R} \int_0^t \exp\left(-\frac{2t'}{\tau}\right) dt' \\
 (5.65) \quad &= \frac{1}{2} CV_0^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right] \\
 &= W_E(0) - W_E(t)
 \end{aligned}$$

הביטוי הנ"ל מבטא שימור אנרגיה במעגל. התחלנו ממצב שבו אגורה אנרגיה בקבל - $W_E(0)$. בסיכומו של דבר כל האנרגיה ההתחלתית בקבל הופכת לחום, הרי $W_E(\infty) = 0$. התוצאה הנ"ל גלומה בתוך המשוואה הדיפרנציאלית. נתחיל בכך שזו נתונה על-ידי

$$(5.66) \quad C \frac{d}{dt} V_C(t) + \frac{1}{R} V_C(t) = 0$$

כעת נוכל להכפיל את המשוואה ב $V_C(t)$ כדי לקבל

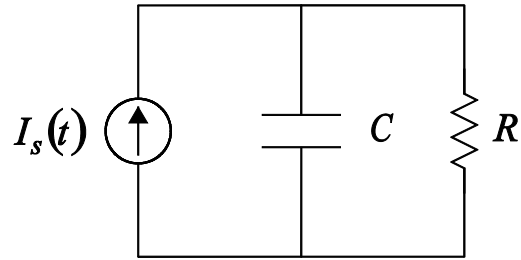
$$(5.67) \quad CV_C(t) \frac{d}{dt} V_C(t) + \frac{1}{R} [V_C(t)]^2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} C [V_C(t)]^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{R} [V_C(t)]^2 \right\} = 0$$

הביטוי הראשון בסוגריים המסולסלים הינו האנרגיה החשמלית האגורה בקבל ואילו הביטוי השני הינו ההספק שהופך לחום בנגד.

נחזור עתה על הפיתוח האחרון במצב שבמעגל יש מקור כלשהו.

נניח שמשוואת המעגל שראינו קודם נתונה על-ידי

$$(5.68) \quad C \frac{d}{dt} V_C(t) + \frac{1}{R} V_C(t) = I_s(t)$$



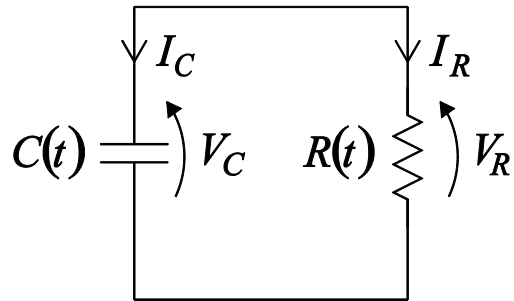
איור 5.13 : מעגל RC מקבילי

כמו קודם, נכפיל את שני האגפים ב- $V_C(t)$ לכן

$$(5.69) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} C [V_C(t)]^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{R} [V_C(t)]^2 \right\} = I_s(t) V_C(t) = P_s(t)$$

משוואה זו מבטאת את חוק שימור ההספק במעגל כאשר אגף ימין מייצג את ההספק שהמקור מעביר למערכת.

5.8 ZIR במעגל RC עם רכיבים תלויי זמן



איור 5.14 : מעגל RC תלוי זמן

נתון מעגל RC בו ההתנגדות והקיבול תלויים זמן.

נפעיל KCL

$$(5.70) \quad 0 = I_C(t) + I_R(t) = \frac{d}{dt} [C(t)V_C(t)] + \frac{V_C(t)}{R(t)} = \frac{d}{dt} Q_C(t) + \frac{1}{R(t)C(t)} Q_C(t)$$

והפתרון כתלות בהתנהגות הרכיבים בזמן

$$(5.71) \quad Q_C(t) = Q(0) \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\tau(t')} dt'\right)$$

ביחס לחוק שימור האנרגיה, במקרה זה כדאי לזכור ששינויים בקיבול או התנגדות קשורים בעצמם בשינויי אנרגיה. לפיכך חוק השימור הקשור למשוואה הקודמת מתקבל על-ידי הכפלת שני האגפים במטען

$$(5.72) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} [Q_C(t)]^2 \right\} + \frac{1}{R(t)C(t)} [Q_C(t)]^2 = 0$$

או במושגים של האנרגיה החשמלית $Q_C^2(t)$ $W_E(t) = \frac{1}{2C(t)}$,

$$(5.73) \quad \frac{d}{dt} [C(t)W_E(t)] + \frac{2}{R(t)}W_E(t) = 0$$

זה כמובן מדגיש את שינויי האנרגיה הנגרמים כתוצאה מהשינוי בקיבול

$$(5.74) \quad \frac{d}{dt}W_E(t) + \frac{2}{R(t)C(t)}W_E(t) = -W_E(t) \left\{ \frac{1}{C(t)} \frac{d}{dt}C(t) \right\} = W_E(t) \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left[\frac{1}{C(t)} \right] \right\}$$

כך למשל אם הקיבול דועך אקספוננציאלית בזמן $C(t) = C(0) e^{-2t/\tau_0}$ אז השינוי באנרגיה עצמו יחסי
 ישר לאנרגיה החשמלית

$$(5.75) \quad \frac{d}{dt}W_E(t) + \left[\frac{2}{R(t)C(t)} + \frac{2}{\tau_0} \right] W_E(t) = 0$$

כך שאם נניח $R(t) = R(0) e^{2t/\tau_0}$ מקבלים דעיכה מוגברת של האנרגיה החשמלית עם מקדם
 דעיכה $\frac{2}{R(0)C(0)} + \frac{2}{\tau_0}$

דוגמאות:

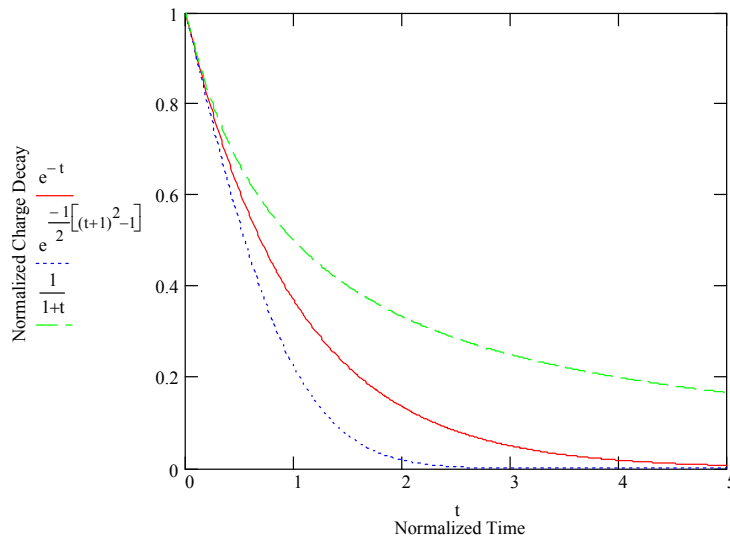
- אם נניח מקדם דעיכה $\tau(t) = \frac{\tau_0}{1+t/\tau_0}$ אזי נסיק שהדעיכה היא מהירה יותר מאשר במקרה שהמקדם בלתי תלוי בזמן

$$(5.76) \quad Q_C(t) = Q(0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{t}{\tau_0} + 1 \right)^2 - 1 \right] \right\}$$

- לעומת זאת, אם נניח $\tau(t) = \tau_0 (1+t/\tau_0)$ אזי

$$(5.77) \quad Q_C(t) = \frac{Q(0)}{1+t/\tau_0}$$

אשר דועך אמנם לאפס אולם דעיכה אלגברית שהיא איטית בהרבה מזו האקספוננציאלית.



איור 5.15 : מאזן אנרגיה עבור מקרים שונים

תרגיל עצמי:

חשב את תגובת ה-ZSR עבור מעגל עם מקור זרם מקביל לנגד והקבל. נסה למצוא פתרונות אנליטיים למטען על הקבל.

הפרק השישי – תופעות מעבר במעגלים מסדר שני

6.1 מעגלים מסדר שני – מבוא

בפרק הקודם פתרנו מעגלים חשמליים שהיו מורכבים מרכיב ראקטיבי בודד, **קבל או סליל**. הקשר בין המתח לזרם ברכיבים אלה יחד עם KCL ו-KVL אפשרו להגדיר את **המשוואה הדיפרנציאלית** (מסדר ראשון) של המעגל. כמו-כן, ראינו שבמקביל לתיאור המלא של המערכת יש להגדיר גם את **תנאי ההתחלה** על-מנת לקבוע באופן חד משמעי את הפתרון. המערכת הכוללת את המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה ניתנת לפתרון על-ידי חלוקה לתגובה לכניסה אפס ותגובה לתנאי התחלה אפס.

בפרק זה נפתור מעגלים חשמליים בהם שני רכיבים ראקטיביים **קבל וסליל**. המשוואה הדיפרנציאלית המתארת מעגל מסוג זה הינה משוואה מסדר שני. גם במקרה זה נחלק את הפתרון באופן דומה לפרק הקודם. עבור פתרון ה-ZSR נציג את משפט גרין ואת פונקצית גרין המאפשרת חישוב התגובה לכל עירור שהוא. כמו-כן, עבור מעגלים מסדר שני המכילים קבל וסליל נדון בהשפעת תדר התהודה על הפתרון הכולל בזמן.

6.2 תגובה לכניסה אפס (ZIR - Zero Input Response)

בסעיף זה נבחן מעגלים מסדר שני ללא עירור חיצוני אך עם תנאי התחלה שונים מאפס. כפי שאנו כבר יודעים מהפרק הקודם, נקבל במקרה זה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית, עם תנאי התחלה שונים מאפס. על-מנת לקבל פתרון יחיד למשוואה דיפרנציאלית מסדר שני, עלינו לספק שני תנאי התחלה:

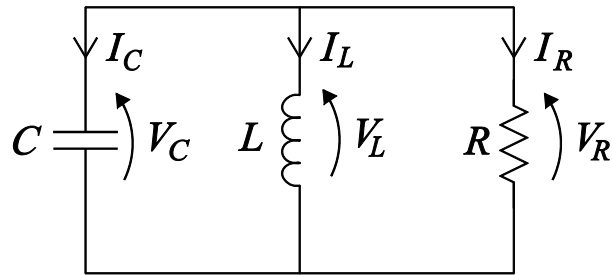
1. ערכו של משתנה המשוואה בראשית ציר הזמן.

2. ערך הנגזרת של משתנה המשוואה בראשית ציר הזמן.

כמובן אם התנאים אינם ניתנים בראשית הציר, נבצע הזזה של הפתרון אל הזמן בו הם נתונים. יחד עם זאת עלינו לקבל את שני התנאים באותו הזמן.

יש לציין, שברוב המקרים תנאי ההתחלה לא ניתנים מפורשות במונחים של משתנה המשוואה, אלא בתור מצב נתון במעגל בזמן מסוים. במקרים כאלו, ניתן להיעזר בחוקי קירכהוף כדי לקשר בין מתחי וזרמי הרכיבים השונים במעגל, ונביא את התנאים לצורה הנדרשת לפתרון המשוואה.

נדון בפתרון ZIR של מעגלים מסדר שני עבור דוגמא המוכרת לנו ממעגלים במצב מתמיד, דהיינו מעגל RLC מקבילי.



איור 6.1: מעגל RLC מקבילי

באיור 6.1 נתון מעגל RLC מקבילי ללא עירור. נתון גם מצב המעגל בראשית ציר הזמן:

$$(6.1) \quad V_C(t=0) = V_0$$

$$I_L(t=0) = I_0$$

נפעיל KCL על המעגל:

$$(6.2) \quad I_C(t) + I_L(t) + I_R(t) = 0$$

באמצעות שימוש בהגדרת הקשר בין המתח לזרם בקבל ובנגד, נקבל:

$$(6.3) \quad C \frac{dV_C(t)}{dt} + I_L(t) + \frac{V_R(t)}{R} = 0$$

כעת, לפי KVL (חיבור מקבילי):

$$(6.4) \quad C \frac{dV_L(t)}{dt} + I_L(t) + \frac{V_L(t)}{R} = 0$$

מהצבת הקשר בין המתח על-פני הסליל והזרם דרכו, נקבל:

$$(6.5) \quad LC \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + I_L(t) + \frac{L}{R} \frac{dI_L}{dt} = 0$$

נסדר את המשוואה מחדש:

$$(6.6) \quad \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I_L(t) = 0$$

או בצורתה הקנונית:

$$(6.7) \quad \frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = 0$$

כאשר:

$$(6.8) \quad \omega_0^2 \equiv \frac{1}{LC}$$

מסמן תדר אופייני למעגל, שעשוי להיות תדר התהודה, ואילו מקדם הריסון מוגדר לפי:

$$(6.9) \quad 2\alpha \equiv \frac{1}{RC}$$

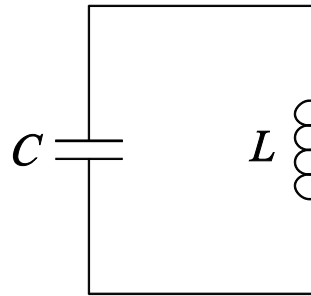
בהמשך הסעיף אנו נפתור את המשוואה ההומוגנית, בהתייחס לצורתה הקנונית. כאשר ניגש לפתור תגובת ZIR של מעגל חשמלי מסדר שני, כל שנצטרך לעשות הוא להביא את המשוואה הדיפרנציאלית לצורתה הקנונית.

הערה: ω_0 - אינו מסמן בהכרח את תדר התהודה במעגל. תדר התהודה הוגדר בפרק הרביעי בעת הדיון בניתוח מעגלים במצב מתמיד סינוסי.

נבטא כעת את תנאי ההתחלה במונחים של הנעלם במשוואה הדיפרנציאלית:

$$(6.10) \quad \begin{aligned} I_L(0) &= I_0 \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{V_L(0)}{L} = \frac{V_C(0)}{L} = \frac{V_0}{L} \end{aligned}$$

על-מנת לקבל תחושה לגבי התנהגות הפתרון, נבחן תחילה את המקרה עבורו אין הפסדים במעגל, דהיינו $R \rightarrow \infty$ (הנגד מהווה נתק) – איור 6.2.



איור 6.2: מעגל LC

א. פתרון המעגל במקרה של $R \rightarrow \infty$:

במקרה זה המעגל מתנוון למעגל LC המופיע באיור.

המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את הפתרון הינה:

$$(6.11) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L}{dt^2} + \omega_0^2 I_L = 0 \\ I_L(0) = I_0 \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L} \end{cases}$$

זוהי משוואה מוכרת ופתרונה באופן כללי הינו מהצורה:

$$(6.12) \quad I_L(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

נאלץ את תנאי ההתחלה:

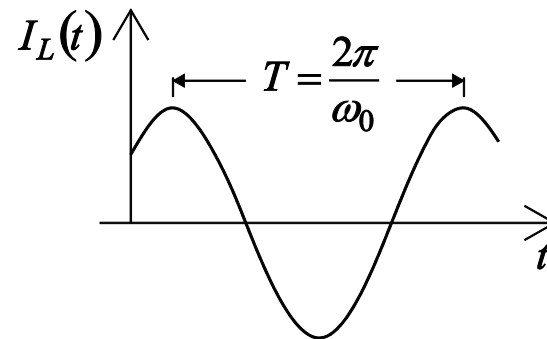
$$I_L(0) = A = I_0$$

$$(6.13) \quad \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} = B\omega_0 = \frac{V_0}{L} \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega_0 L} = \sqrt{LC} \frac{V_0}{L} = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

הפתרון המפורש במקרה זה:

$$(6.14) \quad I_L(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) + V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t)$$

להלן מתוארת ההתנהגות הפונקציונאלית של הפתרון כתלות בזמן:



איור 6.3: זרם הסליל במעגל LC פשוט

הפתרון הוא מחזורי במשרעת קבועה, מכיוון שאין התנגדות ממשית במעגל ולכן אין הפסדי אנרגיה.

ב. פתרון המעגל במקרה של התנגדות סופית ($R \rightarrow \infty$):

נפתור את הצורה הקונונית של משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מסדר שני מהצורה הבאה:

$$(6.15) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = y_1 \end{cases}$$

ננסה לפתור את המשוואה הנ"ל עבור $t \geq 0$.

ננחש פתרון מהצורה $y(t) = e^{\lambda t}$, ונציבו במשוואה. נקבל את הפולינום האופייני (פ"א) של המשוואה, דהיינו:

$$(6.16) \quad \lambda^2 + 2\alpha \lambda + \omega_0^2 = 0$$

כאשר פתרונותיו הם:

$$(6.17) \quad \lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \triangleq -\alpha \pm \alpha_d$$

לפיכך, צורת הפתרון הכללי הינה:

$$(6.18) \quad y(t) = A \exp(\lambda_+ t) + B \exp(\lambda_- t)$$

נדרוש קיום תנאי התחלה:

$$(6.19) \quad \begin{aligned} y(0) &= A + B = y_0 \\ \dot{y}(0) &= A\lambda_+ + B\lambda_- = y_1 \end{aligned}$$

זוהי מערכת ליניארית פשוטה מהצורה

$$(6.20) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

היפוך המטריצה הוא פשוט:

$$(6.21) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{y_1 - y_0(-\alpha - \alpha_d)}{2\alpha_d} \\ B = \frac{y_0(-\alpha + \alpha_d) - y_1}{2\alpha_d} \end{cases}$$

נציב קבועים אלה בפתרון הכללי:

$$(6.22) \quad y(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha_d} \left[(y_1 - y_0(-\alpha - \alpha_d)) e^{\alpha_d t} + (y_0(-\alpha + \alpha_d) - y_1) e^{-\alpha_d t} \right]$$

או לחילופין:

$$(6.23) \quad y(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d} \left[(y_1 + y_0 \alpha) \sinh(\alpha_d t) + y_0 \alpha_d \cosh(\alpha_d t) \right]$$

כאשר הפונקציות ההיפרבוליות נתונות לפי:

$$(6.24) \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(jx) = \cos(x) \quad \sinh(jx) = j \sin(x)$$

יש לזכור שהפתרון הנ"ל תקף עבור $t \geq 0$ בלבד.

נסכם כעת את הפתרון שקבלנו עד כה.

תהי נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מסדר שני בצורתה הקנונית:

$$(6.25) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = y_1 \end{cases}$$

אזי פתרונה כתלות בתנאי ההתחלה ובפרמטרים השונים הינו:

$$(6.26) \quad y(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d} \left[(y_1 + y_0 \alpha) \sinh(\alpha_d t) + y_0 \alpha_d \cosh(\alpha_d t) \right] h(t)$$

כאשר הגדרנו:

$$(6.27) \quad \alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

הערות:

1. נשים לב כי הכפלנו בפונקצית מדרגה, מכיוון שפתרון זה נכון החל מראשית ציר הזמן.

2. α_d , בהתאם להגדרתו עשוי לקבל ערכים מרוכבים.

תרגיל עצמי: מהו הקשר בין λ_{\pm} לבין תדרי התהודה של המעגל כפי שהוגדרו בפרק 4?

כעת נחזור למשוואה הדיפרנציאלית המתארת את התנהגות המעגל הנדון:

$$(6.28) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L}{dt^2}(t) + 2\alpha \frac{dI_L}{dt}(t) + \omega_0^2 I_L(t) = 0 \\ I_L(0) = I_0 \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{(t=0)} = \frac{V_0}{L} \end{cases}$$

פתרונה אם כן,

$$(6.29) \quad I_L(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d} \left[\left(\frac{V_0}{L} + I_0 \alpha \right) \sinh(\alpha_d t) + I_0 \alpha_d \cosh(\alpha_d t) \right] u(t)$$

נזכיר שעבור מעגל RLC מקבילי מתקיים:

$$(6.30) \quad 2\alpha = \frac{1}{RC} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

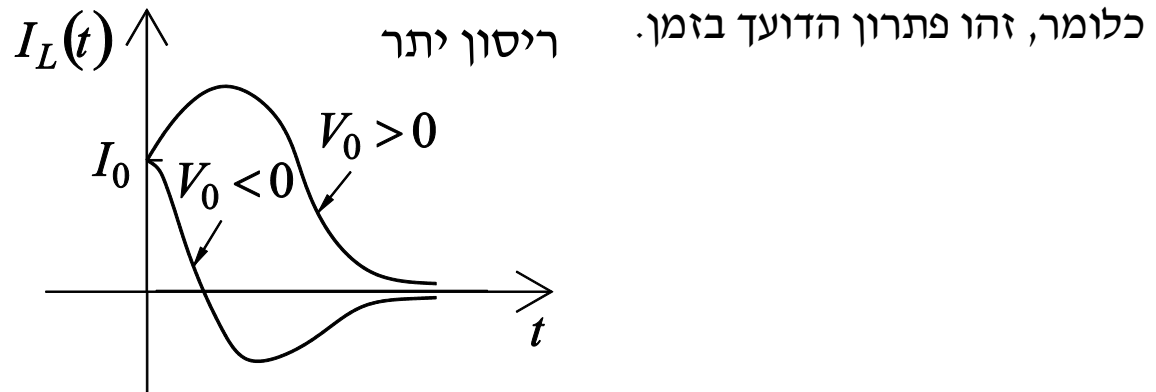
נבחין בין שלושה מקרים שונים כתלות בפרמטרים של המשוואה.

1. $\alpha^2 > \omega_0^2$ - ריסון יתר: במקרה זה $\alpha_d < \alpha$ ממשי והפתרון נשאר (6.29). נבדוק כיצד מתנהג פתרון זה ב- t גדול:

$$(6.31) \quad \cosh(\alpha_d t) \sim \frac{1}{2} e^{\alpha_d t} \quad \sinh(\alpha_d t) \sim \frac{1}{2} e^{\alpha_d t}$$

נציב זאת בפתרון ונקבל,

$$(6.32) \quad I_L \left(t \gg \frac{1}{\alpha_d} \right) = \frac{1}{2\alpha_d} \left(\frac{V_0}{L} + I_0(\alpha + \alpha_d) \right) e^{-(\alpha - \alpha_d)t} h(t)$$



איור 6.4: זרם הסליל כתלות בזמן – ריסון יתר

כדאי לשים לב שהתנאי לריסון יתר במעגל RLC מקבילי ניתן לבטא באמצעות הפרמטרים של המעגל

$$(6.33) \quad \alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2RC} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \triangleq \frac{1}{2} Z_0$$

השווה את התנאי האחרון לתנאי לריסון יתר במעגל טורי.

2. $\alpha^2 = \omega_0^2$ - ריסון קריטי : במקרה זה $\alpha_d = 0$.

נשים לב כי :

$$(6.34) \quad \cosh(\alpha_d t) = 1 \quad \frac{\sinh(\alpha_d t)}{\alpha_d} = \frac{\sinh(\alpha_d t)}{\alpha_d} t \rightarrow t$$

נציב נתונים אלה בפתרון הכללי (6.29) :

$$(6.35) \quad I_L(t) = \left[\left(\frac{V_0}{\omega_0 L} + I_0 \right) \omega_0 t + I_0 \right] e^{-\omega_0 t} h(t)$$

תנאי זה מתקבל כמובן עבור :

$$(6.36) \quad R = \frac{1}{2} Z_0$$

3. $\alpha^2 < \omega_0^2$ - ריסון חסר : במקרה זה α_d הוא מספר מרוכב, נגדיר :

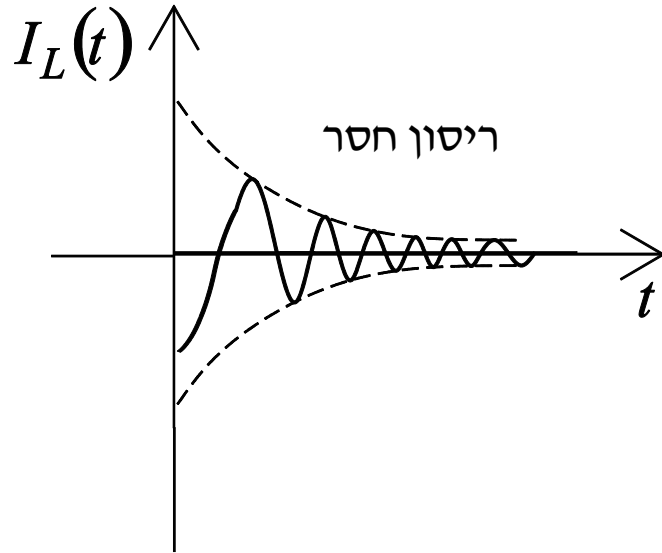
$$(6.37) \quad \alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \triangleq j\omega_d$$

ולכן מתקיים :

$$(6.38) \quad \begin{aligned} \sinh(\alpha_d t) &= \sinh(j\omega_d t) = j \sin(\omega_d t) \\ \cosh(\alpha_d t) &= \cosh(j\omega_d t) = \cos(\omega_d t) \end{aligned}$$

נציב נתונים אלה בפתרון, ונקבל :

$$(6.39) \quad I_L(t) = e^{-\alpha t} \left[\left(\frac{V_0}{L} + I_0 \alpha \right) \frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d} + I_0 \cos(\omega_d t) \right] u(t)$$

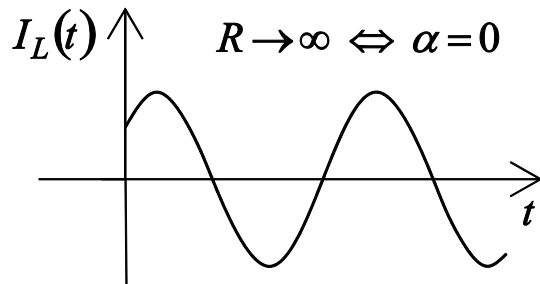


איור 6.6: זרם הסליל כתלות בזמן – ריסון חסר

זהו פתרון הרמוני שמשרעתו דועכת בזמן. מקרה זה מתקבל עבור:

$$(6.40) \quad R > \frac{1}{2} Z_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

שים-לב: עבור $R \rightarrow \infty$ או לחילופין $\alpha = 0$, פתרון זה מתנוון לפתרון (6.14) שקיבלנו בסעיף א' – כמובן שבמקרה זה אין דעיכה.

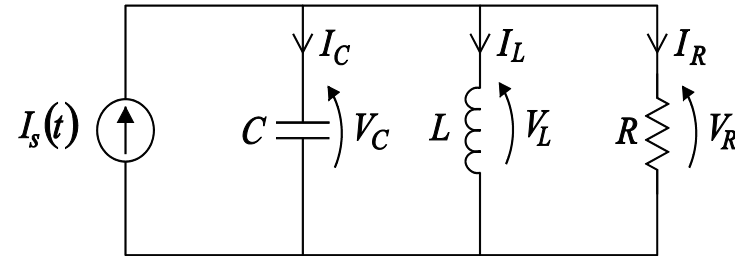


איור 6.7: זרם הסליל כתלות בזמן – ריסון חסר ($\alpha = 0$)

נזכור שוב, כי פתרון זה מאפיין רק את המעגל שניתחנו, דהיינו מעגל RLC מקבילי. במקרה של מעגל אחר, יש למצוא את הפרמטרים המתאימים לצורה הקנונית של המשוואה, ולמצוא את התנאים למקרי הריסון השונים.

6.3 תגובה לתנאי התחלה אפס (ZSR - Zero State Response)

כעת נרצה לדעת מה תגובת מעגל חשמלי מסדר שני, לעירור מסוים תוך אילוף תנאי התחלה אפס. כמו בפרק הקודם, הפתרון הכולל יהיה מורכב מסכום התגובות $ZIR + ZSR$, כפי שהוכח בפרק הקודם. נחבר מקור זרם אידיאלי למעגל שניתחנו בסעיף הקודם, איור 6.8.



איור 6.8: מעגל RLC מקבילי מוזן ממקור זרם

נפתח מחדש את המשוואה:

$$(6.41) \quad I_S(t) = I_C(t) + I_L(t) + I_R(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} + I_L(t) + \frac{V_R(t)}{R} = C \frac{dV_L(t)}{dt} + I_L(t) + \frac{V_L(t)}{R}$$

$$I_S(t) = CL \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + I_L(t) + \frac{L}{R} \frac{dI_L(t)}{dt}$$

או בסידור מחדש של המשוואה, יחד עם תנאי ההתחלה נקבל:

$$(6.42) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L(t)}{dt} + \omega_0^2 I_L(t) = \omega_0^2 I_S(t) \\ I_L(0^-) = 0 \\ \frac{dI_L(0^-)}{dt} = 0 \end{cases}$$

נשים לב כי תנאי ההתחלה נתונים במקרה זה ב- $t = 0^-$. כפי שראינו בפרק הקודם, הלמים בחלק האי-הומוגני של המשוואה, עשויים לשנות את תנאי ההתחלה במעבר מ- $t = 0^-$ ל- $t = 0^+$. נציג עתה שתי דוגמאות פשוטות יחסית לפתרון המשוואה הנ"ל עבור עירורים שונים אשר יהוו בסיס לפתרון כללי יותר. בדוגמא הראשונה נציג תגובה למדרגה ואילו בשניה תגובה להלם.

דוגמא #1 - תגובה למדרגה :

נקבע את מקור הזרם להיות $I_S(t) = I_0 h(t)$. עלינו לפתור כעת משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית מסדר שני. נעשה זאת באמצעות פירוק הפתרון, לפתרון הומוגני ופתרון פרטי, כזכור לנו מלימודי המשוואות הדיפרנציאליות הרגילות, הפתרון הכללי הינו סכום פתרון פרטי ופתרון הומוגני :

$$(6.43) \quad I_L(t) = I_h(t) + I_p(t)$$

ניחוש טוב של הפתרון הפרטי במקרה זה הוא :

$$(6.44) \quad I_{L,p}(t) = I_0$$

ואילו הפתרון ההומוגני הינו מהצורה:

$$(6.45) \quad I_{L,h}(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad \lambda_{\pm} = -\alpha \pm \alpha_d \quad \alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

סכום הפתרונות ההומוגני והפרטי נותן את הפתרון הכולל

$$(6.46) \quad I_L(t) = I_0 + Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$$

כעת נאלץ את תנאי ההתחלה על הפתרון הכללי לעיל, דהיינו תנאי התחלה אפס. הפתרון הסופי שמתקבל הינו:

$$(6.47) \quad I_L(t) = I_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\alpha_d} \sinh(\alpha_d t) + \cosh(\alpha_d t) \right) \right] h(t)$$

כמו בניתוח תגובת ZIR, גם כאן נהוג לחלק את הפתרון לשלושה מקרים שונים:

1. $\alpha^2 > \omega_0^2$ - **ריסון יתר**. במקרה זה $\alpha_d < \alpha$ ממשי והפתרון נשאר כמו שהוא.

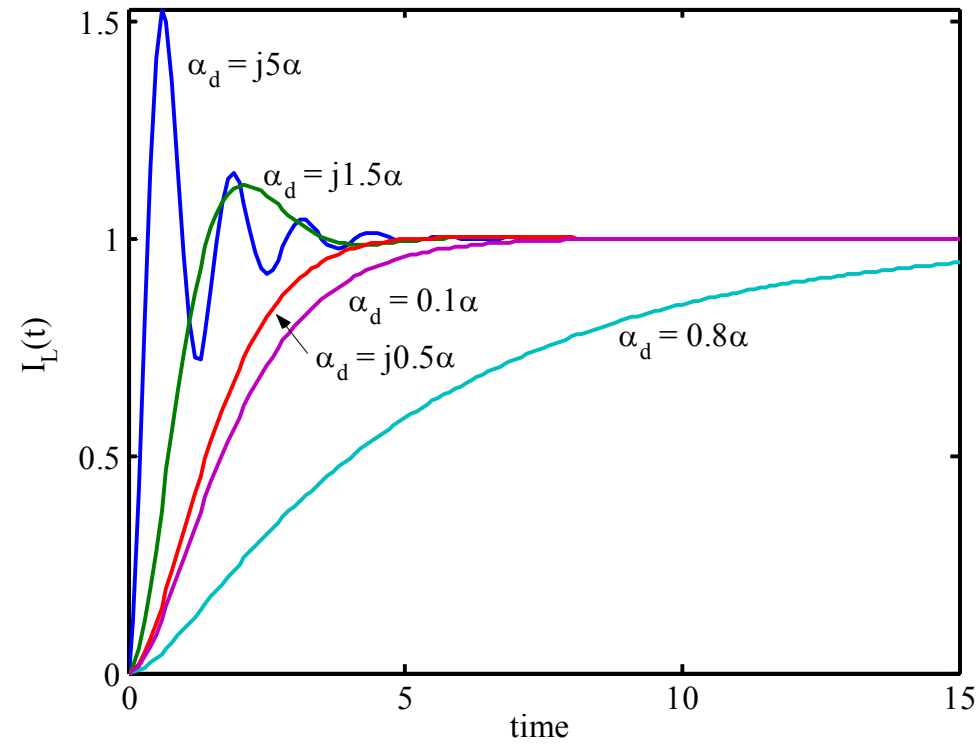
2. $\alpha^2 = \omega_0^2$ - **ריסון קריטי**. במקרה זה $\alpha_d = 0$. צורת הפתרון היא:

$$(6.48) \quad I_L(t) = I_0 u(t) \left[1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \right]$$

3. $\alpha^2 < \omega_0^2$ - **ריסון חסר**. במקרה זה α_d מרוכב, ומגדירים: $\omega_d = j \cdot \alpha_d$. צורת הפתרון היא:

$$(6.49) \quad I_L(t) = I_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \right) \right] h(t)$$

הגרפים באיור 6.9 מתארים את הפתרון הכולל כפונקציה של הזמן עבור הריסונים השונים.



איור 6.9: זרם הסליל במעגל RLC מקבילי כתלות בזמן עבור ריסונים שונים

דוגמא #2 - תגובה להלם :

לאחר שנתחנו תגובת מעגל מסדר שני לכניסת מדרגה, נבחן את תגובת המעגל עבור עירור של פונקציית הלם בזמן. דהיינו, נבחן את המעגל אשר מתואר על-ידי המשוואה הדיפרנציאלית הבאה :

$$(6.50) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L(t)}{dt} + \omega_0^2 I_L(t) = \omega_0^2 q \delta(t) \\ I_L(0^-) = 0 \\ \frac{dI_L(0^-)}{dt} = 0 \end{cases}$$

עבור $t > 0$ זוהי משוואה הומוגנית, שפתרונה כבר ידוע מתגובת ZIR, כתלות בתנאי ההתחלה שטרם קבענו ב- $t = 0^+$. עלינו לבדוק כיצד הופעת הלם באגף ימין משפיע על תנאי ההתחלה. נעשה זאת באמצעות שיטת איזון הלמים אותה הכרנו כבר בפרק הקודם.

נזכיר תכונה מתמטית בה דנו בפרק הקודם: ככל שנגזרת הפונקציה היא מסדר יותר גבוה, היא "רגישה" יותר, ולכן מקור שהוא פונקציית דלתא משפיע בראש וראשונה על האיבר שהוא הנגזרת הגבוהה ביותר. במקרה שלנו פונקציית ההלם באגף ימין היא תוצאה של נגזרת שנייה של הפונקציה באגף שמאל (6.50). באופן איכותי, הנגזרת השנייה של הפונקציה הנעלמת תתנהג כמו הלם, ולפיכך :

$$(6.51) \quad \frac{d^2 I_L}{dt^2}(t) \sim \delta(t) \quad \frac{dI_L}{dt} \sim h(t) \quad I_L \sim \text{continuous}$$

הערה: במידה והפתרון המוצע מקיים את המשוואה הנ"ל שנגזרה מחוקי קירכהוף אזי הפתרון המוצע הוא הפתרון היחיד למעגל. יש לשים לב שיחידות הפתרון מובטחת אך ורק עבור משוואות לינאריות. כפי שנראה בעתיד, למשוואות לא לינאריות יכולים להיות יותר מפתרון אחד.

על-מנת להתקדם צעד נוסף, נבצע אינטגרציה בציר הזמן בתחום עבורו פונקצית הדלתא שונה מאפס, דהיינו מ- $t = 0^-$ עד ל- $t = 0^+$:

$$(6.52) \quad \int_{0^-}^{0^+} \left[\frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L(t)}{dt} + \omega_0^2 I_L(t) \right] dt = \omega_0^2 q \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \omega_0^2 q$$

לאור האמור לעיל, השינוי בפונקציה ובנגזרת הראשונה באינטרוול הרלוונטי זניח ולכן מתקיים:

$$(6.53) \quad \int_{0^-}^{0^+} \frac{dI_L(t)}{dt} dt = 0 \quad \int_{0^-}^{0^+} I_L(t) dt = 0$$

כך שנקבל:

$$(6.54) \quad \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} dt = \frac{dI_L(0^+)}{dt} - \frac{dI_L(0^-)}{dt} = \frac{dI_L(0^+)}{dt} = \omega_0^2 q$$

כלומר קיבלנו שינוי בתנאי ההתחלה על הנגזרת של הזרם בסליל.

נרשום כעת את המשוואה הדיפרנציאלית עבור $t > 0^+$:

$$(6.55) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L(t)}{dt} + \omega_0^2 I_L(t) = 0 \\ I_L(0^+) = 0 \\ \frac{dI_L(0^+)}{dt} = \omega_0^2 q \end{cases}$$

פתרון משוואה זו הוא פתרון ה-ZIR עם תנאי ההתחלה המתאימים, ושוב נבחין בין שלושה מקרים:

$$: \alpha^2 > \omega_0^2 .1$$

$$(6.56) \quad I_L(t) = \omega_0^2 q e^{-\alpha t} \frac{\sinh(\alpha_d t)}{\alpha_d} h(t)$$

$$: \alpha^2 = \omega_0^2 .2$$

$$(6.57) \quad I_L(t) = \omega_0 q e^{-\alpha t} (\omega_0 t) h(t)$$

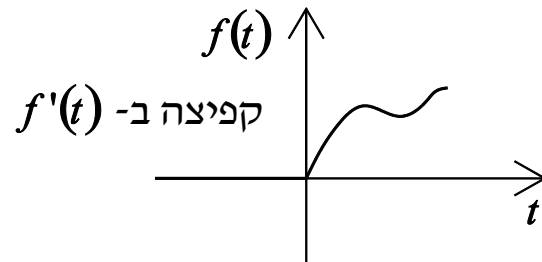
$$: \alpha^2 < \omega_0^2 .3$$

$$(6.58) \quad I_L(t) = \omega_0^2 q e^{-\alpha t} \frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d} h(t)$$

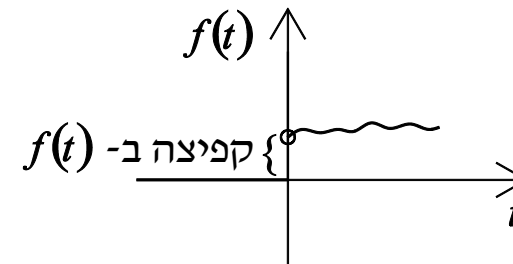
נשים לב כי כל הפתרונות רציפים כנדרש.

כדאי לשים לב להבדל בין השפעת פונקצית דלתא על מעגל מסדר ראשון ומעגל מסדר שני – איור 6.10.

מעגלים מסדר שני



מעגלים מסדר ראשון



איור 6.10 : השפעת פונקצית הלם על פתרון מעגל מסדר ראשון לעומת מעגל מסדר שני

6.4 משפט גרין

כאשר ניתחנו את תגובת ה-ZSR במעגל מסדר ראשון (RC) הגענו לביטוי הכללי שביטא את התגובה של המעגל כתלות בכל כניסה שהיא:

$$(6.59) \quad V_{C,ZSR}(t) = \int_{-\infty}^t V_S(t') \left[\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \right] dt'$$

בביטוי זה אפשר להציב כל כניסה $V_S(t)$ ומקבלים את המתח על הקבל עד כדי חישוב האינטגרל. לעומת זאת, כאשר ניתחנו את תגובת ה-ZSR של מעגלים מסדר שני, היינו מסוגלים לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית רק כאשר הכניסות היו כאלה עבורן היה "פשוט" לנחש פתרון פרטי. בפרק זה נלמד גישה כללית למציאת ZSR במעגל מסדר שני שמוזן על ידי כניסה כלשהי.

יהי נתון מעגל חשמלי מסדר שני המתואר על-ידי המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$(6.60) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] x(t) = s(t) \\ x|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

נניח בשלב זה שאנחנו יודעים את פתרון המשוואה כאשר העירור הוא פונקציה הלם, קרי

$$(6.61) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t, t') = \delta(t - t') \\ G(t, t')|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{dG(t, t')}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$G(t, t')$ נקראת **פונקצית גרין** – תגובה להלם. נשים לב שההלם ניתן בזמן t' ולכן פונקצית גרין הינה פונקצית של שני משתנים, הזמן t והפרמטר t' אשר מאפיין את זמן מתן ההלם. בטרם נמשיך כדאי לשים לב שעל סמך העירור של פונקצית ההלם ניתן לראות כי $G(t | t') = G(t - t')$. לפיכך, ניתן לשכתב את המשוואות הנ"ל באופן הבא:

$$(6.62) \quad \left[\frac{d^2}{dt'^2} + 2\alpha \frac{d}{dt'} + \omega_0^2 \right] x(t') = s(t') \quad \left[\frac{d^2}{dt'^2} - 2\alpha \frac{d}{dt'} + \omega_0^2 \right] G(t - t') = \delta(t - t')$$

כעת נכפיל את המשוואה משמאל ב $G(t - t')$ ואילו את המשוואה מימין ב x

$$(6.63) \quad \begin{aligned} G(t - t') \left[\frac{d^2}{dt'^2} + 2\alpha \frac{d}{dt'} + \omega_0^2 \right] x(t') &= G(t - t') s(t') \\ x(t') \left[\frac{d^2}{dt'^2} - 2\alpha \frac{d}{dt'} + \omega_0^2 \right] G(t - t') &= x(t') \delta(t - t') \end{aligned}$$

נחסר כעת את שתי המשוואות הנ"ל אחת מהשניה ונבצע אינטגרציה על משתנה הזמן, נקבל

$$\begin{aligned}
 (6.64) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \left[-G(t-t') \frac{d^2}{dt'^2} x(t') + x(t') \frac{d^2}{dt'^2} G(t-t') \right] dt' \\
 & + 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left[-G(t-t') \frac{d}{dt'} x(t') - x(t') \frac{d}{dt'} G(t-t') \right] dt' \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-G(t-t') s(t') + x(t') \delta(t-t') \right] dt'
 \end{aligned}$$

ניתן לפשט את הביטוי בשורה הראשונה על-ידי שימוש בהגדרה של גזירה בחלקים

$$\begin{aligned}
 (6.65) \quad & - \int_{-\infty}^{\infty} \left[G(t-t') \frac{d^2}{dt'^2} x(t') - x(t') \frac{d^2}{dt'^2} G(t-t') \right] dt' = \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} \left[G(t-t') \frac{d}{dt'} x(t') - x(t') \frac{d}{dt'} G(t-t') \right] dt' = \\
 & - \left[G(t-t') \frac{d}{dt'} x(t') - x(t') \frac{d}{dt'} G(t-t') \right]_{t'=-\infty}^{t'=\infty} = 0
 \end{aligned}$$

הנחתנו גם שתנאי ההתחלה הם אפס וגם שהמקורות פועלים פרק זמן סופי ובעקבותיהם קיימים הפסדים סופיים במערכת כך שהפתרון דועך לאפס. בדרך דומה ניתן להראות להלן, גם השורה

השניה ב (6.64) הינה זהותית אפס

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left[G(t-t') \frac{d}{dt'} x(t') + x(t') \frac{d}{dt'} G(t-t') \right] dt' = \\
 (6.66) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} [G(t-t')x(t')] dt' = \\
 & [G(t-t')x(t')]_{t'=-\infty}^{t'=\infty} = 0
 \end{aligned}$$

לפיכך, מאגף ימין של משוואה (6.63) אנחנו מסיקים ש-

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} [-G(t-t')s(t') + x(t')\delta(t-t')] dt' \Rightarrow \\
 (6.67) \quad & \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')s(t') dt'}
 \end{aligned}$$

במילים אחרות, אם ידועה לנו התגובה לפונקציה דלתא (הלם) של המעגל, לה קראנו פונקציה גרין, ניתן לחשב את ה ZSR של המעגל על-ידי האינטגרציה המתוארת במשוואה האחרונה. בהתאם לחישוב הנ"ל, ניתן לקבל ביטוי לתגובת ה- ZSR למעגל מסדר שני על-ידי חישוב האינטגרל. כל מה שנותר כרגע זה להעריך את פונקציה גרין עבור מעגל מסדר שני. בסעיף הבא נציג איך ניתן לחשב את פונקציה גרין בהיעזר בהתמרות אינטגרליות.

6.5 שימוש בהתמרות פורייה לפתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות

עד אשר הכנסנו את המושג של פונקצית גרין, טכנית התייחסנו לבעיית הפתרון של מעגל חשמלי כבעיית משוואה דיפרנציאלית. הניסוח של משפט גרין מצביע על-כך שאפשר לגשת לפתרון הבעיה מתוך גישה אינטגרלית. כידוע ("טורי פורייה והתמרות אינטגרליות"), אוסף הפונקציות $\{e^{j\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$, מהווה מערכת אורתוגונאלית סגורה, לכן נוכל לפתח פונקציה בתחום הזמן $x(t)$ בצורה הבאה:

$$(6.68) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

כאשר פונקצית המקדמים בפיתוח הליניארי $\bar{X}(\omega)$ נקראת "ספקטרום התדרים" של האות הזמני $x(t)$. מהי אותה פונקצית הספקטרום? על-מנת לענות על שאלה זו, ננצל את האורתוגונליות של המערכת הנדונה

$$(6.69) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega-\omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega-\omega')$$

האנלוגיה של ביטוי זה למקרה הבדיד ופונקצית דלתא של קרוניקר ברורה. עם זאת כדאי לציין שמבחינה מתמטית טהורה הטיפול באינטגרל האחרון הוא בעייתי (בגלל התכנסות) וכעת נשתמש בקשר זה כאקסיומה ובמהלך המקצוע "אותות ומערכות" תהיה התייחסות יותר מעמיקה גם לפונקציית דלתא וגם לאינטגרל.

כעת נשאל? $\bar{X}(\omega) = ?$. נתבונן בביטוי :

$$(6.70) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{X}(\omega')e^{j\omega't} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{X}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{j(\omega'-\omega)t} =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{X}(\omega')\delta(\omega - \omega') = 2\pi \bar{X}(\omega)$$

בסך-הכל קיבלנו שתי הצגות שונות של אותו אות. אחת בתחום התדר והשניה בתחום הזמן. נשים לב כי ההתמרה היא חד-חד ערכית, כלומר אם ידועה אחת ההצגות, אז גם ההצגה השניה ידועה, לסיכום

$$(6.71) \quad \bar{X}(\omega) = F[x](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = F^{-1}[\bar{X}](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

אנו נשתמש בהתמרות אינטגרליות על-מנת לפתור משוואות דיפרנציאליות עם תנאי התחלה אפס. לשם כך עלינו לראות כיצד נראית התמרת פורייה של נגזרת של פונקציה :

$$(6.72) \quad F\left[\frac{dx}{dt}\right](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} x(t)e^{-j\omega t} \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow \infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j\omega t} dt = j\omega \bar{X}(\omega)$$

או באופן כללי :

$$(6.73) \quad F\left[\frac{d^n x}{dt^n}\right](\omega) = (j\omega)^n F[x](\omega)$$

נתבונן בצורה הכללית של משוואה דיפרנציאלית מסדר שני, שפתרונה מייצג את תגובת ה-ZSR של מעגל חשמלי:

$$(6.74) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x(t) = s(t)$$

נגדיר את ההתמרות:

$$(6.75) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

נתמיר כעת את שני צידי המשוואה:

$$(6.76) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2 \right) \bar{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2 \right) \bar{X}(\omega) - \bar{S}(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega = 0$$

נזכור כי הרצף $\{e^{j\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ מהווה מערכת אורתוגונאלית סגורה, ולכן אם הטלה של פונקציה על

$span\{e^{j\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ היא אפס, אזי בהכרח הפונקציה המוטלת היא פונקצית האפס, כלומר:

$$(6.77) \quad \left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2 \right) \bar{X}(\omega) - \bar{S}(\omega) = 0$$

נסדר מחדש את המשוואה בצורה:

$$(6.78) \quad \bar{X}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2} \bar{S}(\omega)$$

כעת נחזור בחזרה לתחום הזמן:

$$(6.79) \quad \begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2\right)^{-1} \bar{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega t} \left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2\right)^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') e^{-j\omega t'} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2\right)^{-1} e^{j\omega(t-t')} s(t')}_{\triangleq G(t|t')} \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו:

$$(6.80) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t|t') s(t')$$

כאשר נותר להעריך את פונקציית גרין. אם נחזור לנקודת המוצא ברור שבחירת

$$(6.81) \quad s(t') = \delta(t' - \tau)$$

מכתיבה את תגובת המעגל, שהיא בדיוק פונקציית גרין:

$$(6.82) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t' - \tau) G(t|t') = G(t|\tau)$$

6.6 הערכת פונקצית גרין ברישומה האינטגרלי

בסעיפים קודמים הערכנו את פונקצית גרין על-ידי חישוב תגובת ה-ZSR עבור עירור הלם. בסעיף זהנבצע את החישוב על-ידי הערכת הביטוי האינטגרלי שהתקבל בסעיף הקודם לפונקצית גרין:

$$(6.83) \quad G(t|t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega_0^2 + 2j\alpha\omega - \omega^2} e^{j\omega(t-t')}$$

נפרק את השבר לשברים פשוטים:

$$(6.84) \quad \frac{1}{\omega_0^2 + 2j\alpha\omega - \omega^2} = \frac{A}{\omega - \omega_+} + \frac{B}{\omega - \omega_-} \Rightarrow \omega_{\pm} = j(\alpha \pm \alpha_d) \quad \alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

מכאן,

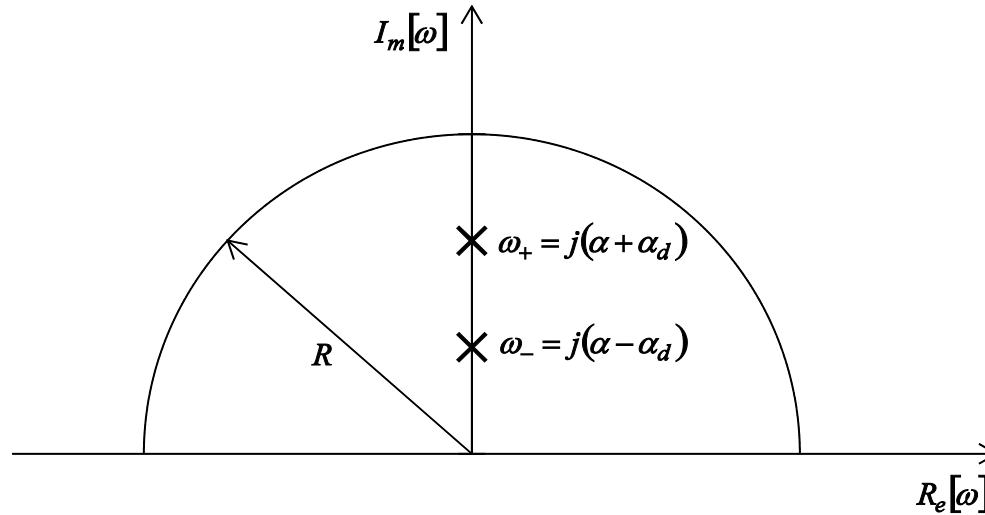
$$(6.85) \quad A = -B = -\frac{1}{2j\alpha_d}$$

כלומר,

$$(6.86) \quad G(t|t') = -\frac{1}{2\alpha_d} \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{1}{\omega - \omega_+} - \frac{1}{\omega - \omega_-} \right] e^{j\omega(t-t')}$$

נבצע הרחבה אנליטית לתחום האינטגרציה לחצי מעגל בחצי המישור המרוכב העליון ברדיוס R , ולבסוף נשאיף את R לאינסוף. מכיוון שהפונקציה אנליטית בכל נקודה במישור למעט בקטבים, כאשר

נשאיף את הרדיוס לאינסוף, האינטגרל על קשת המעגל יתאפס, וסך כל האינטגרל יהיה זהה לאינטגרל ב- (6.86)



איור 6.11: הקטבים של פונקצית גרין במישור הקומפלקסי – מסלול האינטגרציה

מדוע דווקא בחצי המישור העליון? זה נדרש בשל הסיבתיות של המערכת. בחצי המישור העליון, החלק המדומה של התדר חיובי. נניח כי:

$$(6.87) \quad \omega = jm \quad m > 0$$

אזי:

$$(6.88) \quad G \sim e^{j\omega(t-t')} = e^{-m(t-t')}$$

כלומר עבור $t \gg t'$, התגובה להלם של המערכת תשאף לאפס.

הערה: אם היינו מבצעים את האינטגרציה בחצי המישור התחתון, אז התוצאה היתה אפס (אין קטבים בתחום). זה מצדיק את הכפלת פונקציית גרין במדרגה מהצורה $u(t-t')$. לפי משפט השארית, ערך האינטגרל יהיה:

$$(6.89) \quad G(t|t') = -\frac{1}{2\alpha_d} \left[e^{j \cdot j(\alpha + \alpha_d)(t-t')} - e^{j \cdot j(\alpha - \alpha_d)(t-t')} \right] = \\ = -\frac{1}{2\alpha_d} e^{-\alpha(t-t')} \left[e^{-\alpha_d(t-t')} - e^{\alpha_d(t-t')} \right]$$

נפריד פיתרון זה לתחומים השונים של הריסון במעגלים מסדר שני ונקבל:

$$(6.90) \quad G(t|t') = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_d} e^{-\alpha(t-t')} \sinh[\alpha_d(t-t')] & \alpha^2 > \omega_0^2 \\ e^{-\alpha(t-t')} (t-t') & \alpha^2 = \omega_0^2 \\ \frac{1}{\omega_d} e^{-\alpha(t-t')} \sin[\omega_d(t-t')] & \alpha^2 < \omega_0^2 \end{cases}$$

בדיוק כמתבקש בסעיף בו חישבנו את ZSR עבור פונקציית דלתא.

6.7 משוואות מצב – מרחב המצב

נתאר כעת שיטה נוספת לניתוח משוואות דיפרנציאליות. לא נעמיק בניתוח תיאורטי של השיטה מכיוון שנושא זה נידון בהרחבה בקורסי ההמשך. לפנינו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני המתארת מעגל RLC מקבילי ותנאי התחלה.

$$(6.91) \quad \begin{cases} \ddot{I}_L(t) + \frac{1}{RC} \dot{I}_L(t) + \frac{1}{LC} I_L(t) = \frac{1}{LC} I_S(t) \\ I_L(0) = I_0 \\ \dot{I}_L(0) = \frac{V_0}{C} \end{cases}$$

נתבונן בקשר בין הזרם והמתח בסליל:

$$(6.92) \quad V_L(t) = L\dot{I}_L(t) \Rightarrow \dot{I}_L(t) = \frac{V_L(t)}{L} = \frac{V_C(t)}{L}$$

נציב קשר זה במשוואה הדיפרנציאלית:

$$(6.93) \quad \frac{1}{L} \dot{V}_C(t) + \frac{1}{RLC} V_C(t) + \frac{1}{LC} I_L(t) = \frac{1}{LC} I_S(t)$$

נגדיר את וקטור המצב

$$(6.94) \quad \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}$$

ואז מתקיים:

$$(6.95) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I_S(t)}{C} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \underline{\underline{M}} \vec{X}(t) + \vec{X}_S(t)$$

קיבלנו למעשה מערכת משוואות דיפרנציאליות צמודות מסדר ראשון. אנו יודעים כיצד לפתור מערכת כזו מלימודי המשוואות הדיפרנציאליות הרגילות. ייצוג זה שימושי לפתרון משוואות באופן נומרי באמצעות המחשב. נציג את פתרון ה-ZSR של המעגל במרחב המצב, במקרים השונים של הריסון, כאשר הכניסה היא כניסת מדרגה:

$$(6.96) \quad I_S(t) = I_0 h(t)$$

א. ריסון יתר:

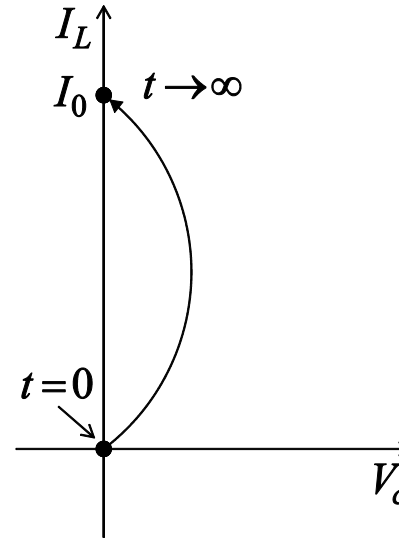
הזרם דרך הסליל במקרה זה הוא:

$$(6.97) \quad I_L(t) = I_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\alpha_d} \sinh(\alpha_d t) + \cosh(\alpha_d t) \right) \right] h(t)$$

המתח על הקבל הוא:

$$(6.98) \quad V_C(t) = L \frac{d}{dt} I_L(t) = \dots = \frac{I_0 \omega_0^2}{\alpha_d} e^{-\alpha t} \sinh(\alpha_d t) h(t)$$

איור 6.12 מתאר את תגובת המעגל במרחב המצב:



איור 6.12: ריסון יתר במעגל RLC מקבילי – מרחב המצב

ב. ריסון חסר:

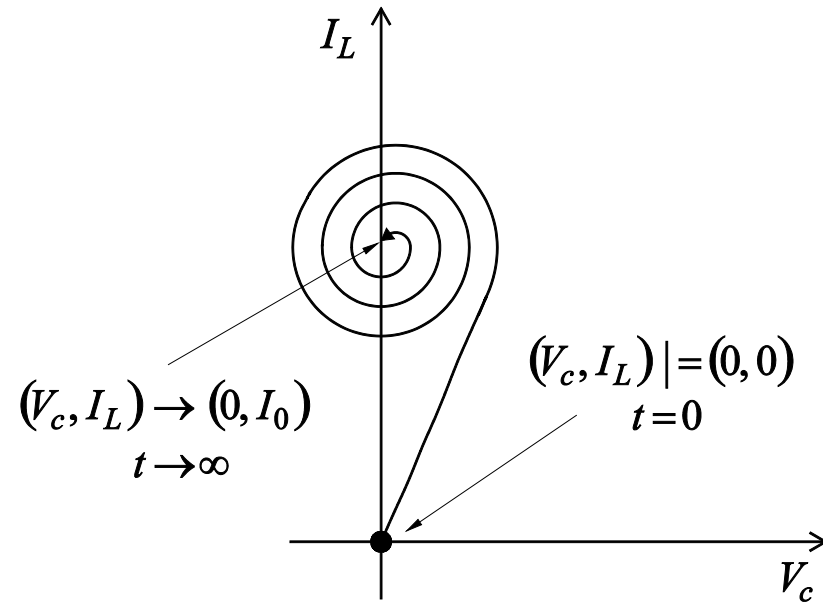
הזרם דרך הסליל במקרה זה הוא:

$$(6.99) \quad I_L(t) = I_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \right) \right] h(t)$$

המתח על הקבל הוא:

$$(6.100) \quad V_C(t) = L \frac{d}{dt} I_L(t) = \dots = \frac{I_0 \omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) h(t)$$

איור 6.13 מתאר את תגובת המעגל במרחב המצב:



איור 6.13 : ריסון חסר במעגל RLC מקבילי – מרחב המצב

6.8 שיקולי אנרגיה והספק במעגלים מסדר שני

בסעיף זה נבחן את ההשתנות הזמנית של ההספק והאנרגיה החשמלית והמגנטית במעגל מסדר שני. להלן מערכת מסדר שני ללא הפסדים ($\alpha = 0$):

$$(6.101) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right] I_L(t) = 0 \\ I_L(0) = I_0 \\ \frac{dI_L(0)}{dt} = \frac{V_0}{L} \end{cases}$$

הפתרון במקרה זה הוא (6.29), ונחזור עליו כאן:

$$(6.102) \quad I_L(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t) = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0 L} \right)^2} \sin(\omega_0 t + \psi)$$

כאשר הפאזה מקיימת:

$$(6.103) \quad \tan(\psi) = \frac{I_0 \omega_0 L}{V_0}$$

נחלק את הפתרון למקרים שונים כלהלן:

1. $I_0 = 0$ - בראשית ציר הזמן, כל האנרגיה במעגל נמצאת בקבל.

במקרה זה, הפתרון הוא מהצורה:

$$(6.104) \quad I_L(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t)$$

לפי הגדרת הסליל וחוקי קירכהוף, נקבל את המתח על-פני הקבל:

$$(6.105) \quad V_C(t) = V_L(t) = L \frac{dI_L}{dt}(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$$

נרשום את הביטויים לאנרגיה הרגעית האגורה בסליל ובקבל:

$$(6.106) \quad W_C(t) = \frac{1}{2} C V_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L I_L^2(t) = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L^2} \sin^2(\omega_0 t)$$

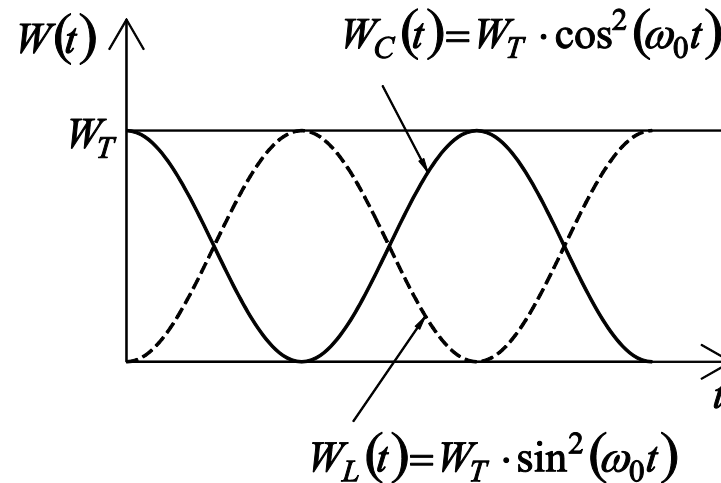
אם ניזכר בתדר התהודה במעגל RLC מקבילי:

$$(6.107) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

נקבל:

$$(6.108) \quad \begin{aligned} W_C(t) &= \frac{1}{2} CV_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ W_L(t) &= \frac{1}{2} CV_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ W_{Total}(t) &= W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} CV_0^2 = W_C(0) \end{aligned}$$

מסקנה: מכיוון שאין נגד במעגל, אין הפסדי אנרגיה, ובכל זמן נתון האנרגיה האגורה במעגל זהה לאנרגיה ההתחלתית, שהייתה כולה בקבל – ראה איור 6.14.



איור 6.14: אנרגיה רגעית אגורה בקבל ובסליל במעגל LC פשוט – אנרגיה התחלתית בקבל

2. $V_0 = 0$ - בראשית ציר הזמן כל האנרגיה במעגל נמצאת בסליל.

באופן דומה לדיון הנ"ל, קל להראות ש-

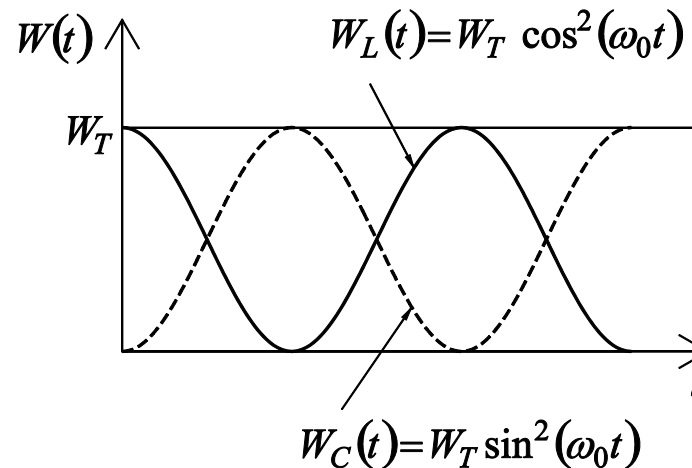
$$W_L(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

(6.109)

$$W_{Total}(t) = W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 = W_L(0)$$

מסקנה: מכיוון שאין נגד במעגל, אין הפסדי אנרגיה, ובכל זמן נתון האנרגיה האגורה במעגל זהה לאנרגיה ההתחלתית, שהייתה כולה בסליל.



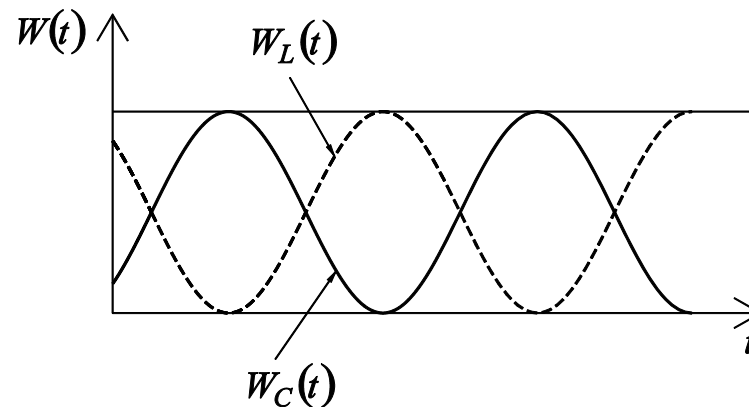
איור 6.15: אנרגיה רגעית אגורה בקבל ובסליל במעגל LC פשוט – אנרגיה התחלתית בסליל

תרגיל עצמי: מצא את הביטוי לחוק שימור האנרגיה מתוך המשוואה הדיפרנציאלית מסדר שני בדומה למה שעשינו במעגל מסדר ראשון.

3. שני תנאי ההתחלה שונים מאפס – בראשית ציר הזמן האנרגיה במעגל מחולקת בין הסליל לקבל בהתאם לתנאי ההתחלה:

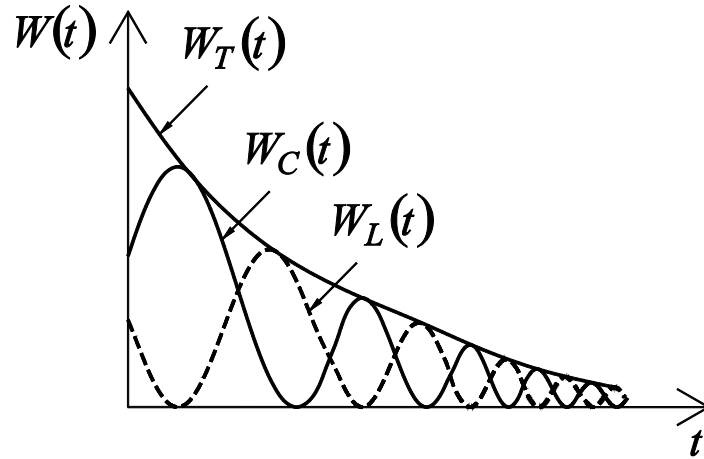
$$(6.110) \quad W_{Total}(t) = \frac{1}{2}CV_0^2 + \frac{1}{2}LI_0^2 = W_L(0) + W_C(0)$$

גם כאן, האנרגיה במעגל נשמרת – ראה איור 6.16.



איור 6.16: אנרגיה רגעית אגורה בקבל ובסליל במעגל LC פשוט – אנרגיה התחלתית בקבל ובסליל

במידה ובמעגל קיימים הפסדים, דהיינו במעגל ($\alpha \neq 0$), אז האנרגיה במעגל דועכת והופכת לחום בנגד. התנהגות אופיינית של הזרם במידה וישנם הפסדים הינה:



$$(6.111) \quad I \sim e^{-\alpha t} (\dots)$$

לאחר חישוב פשוט (חשבו!) ניתן להראות ש-

$$(6.112) \quad W_T(t) = W_T(0)e^{-2\alpha t}$$

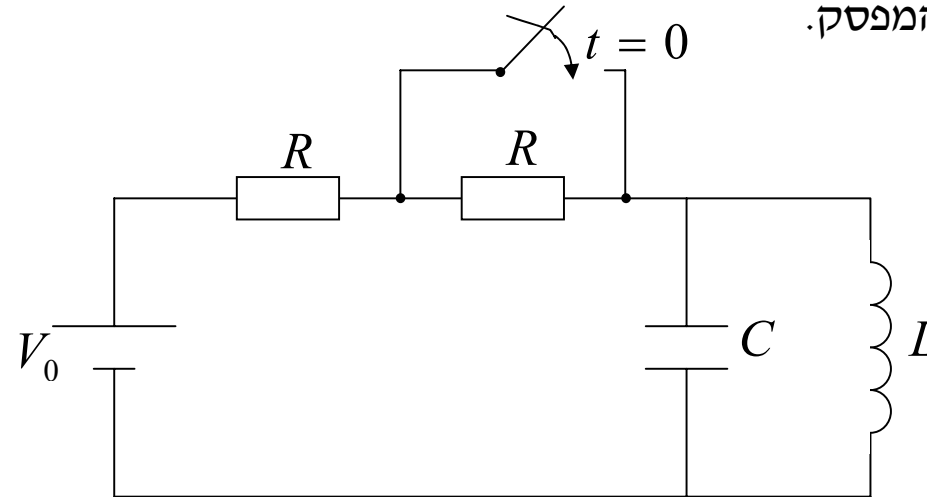
התנהגות אופיינית של דעיכת האנרגיה במקרה

זה מובאת באיור 6.17.

איור 6.17: אנרגיה רגעית RLC פשוט – אנרגיה התחלתית בקבל ובסליל

6.9 דוגמא מסכמת

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור 6.18

בזמן $t = 0$ סוגרים את המפסק.

איור 6.18 : מעגל חשמלי מסדר שני – דוגמא מסכמת

- א. רשום את תנאי ההתחלה עבור המעגל ברגע הזמן $t = 0^-$.
- ב. רשום משוואה דיפרנציאלית עבור זרם הסליל ואת תנאי ההתחלה ב- $t = 0^+$.
- ג. מצא פתרון מפורש לזרם הסליל עבור $t \geq 0$. וודא שהשיטות הבאות מובילות לאותו פתרון:

- פתרון פרטי + פתרון הומוגני
- פתרון ZIR + פתרון ZSR
- פתרון בעזרת פונקצית גרין

ד. חשב את האנרגיה החשמלית האגורה בקבל ואת האנרגיה המגנטית האגורה בסליל ברגעי

$$\text{הזמן } t = 0^-, t = 0^+ \text{ ו- } t \rightarrow \infty.$$

ה. חשב את סך כל האנרגיה המתבזבזת בחימום הנגד הראשון (המחובר ישירות אל המקור) בעת

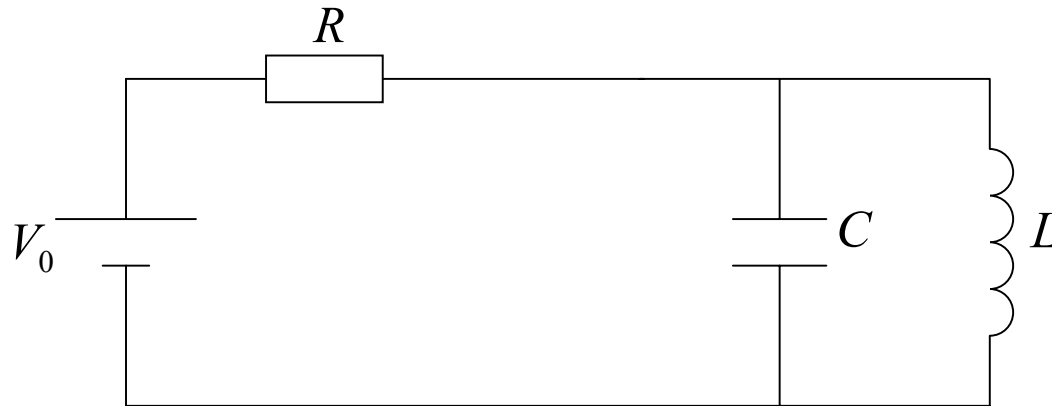
סגירת המפסק ($t = 0^- \rightarrow 0^+$)!!! הסבר את תשובתך!

פתרון

א. בהנחה שמקור המתח הזין את המעגל מ- $t = -\infty$ עד $t = 0^-$, ב- $t = 0^-$ המעגל נמצא במצב מתמיד ולפיכך, הקבל מהווה נתק והסליל קצר ולכן מתקיים:

$$(6.113) \quad V_C(t = 0^-) = 0; \quad I_L(t = 0^-) = \frac{V_0}{2R}$$

ב. עם סגירת המפסק הנגד הימני מקוצר ויש לנתח את המעגל המתואר באיור הבא:



איור 6.19: מעגל חשמלי מסדר שני

על-סמך חוקי קירכהוף ניתן להראות ש-

$$(6.114) \quad \begin{aligned} V_0 &= V_C + (I_L + I_C)R \\ V_0 &= V_L + \left(I_L + C \frac{dV_L}{dt} \right) R \\ V_0 &= L \frac{dI_L}{dt} + \left(I_L + LC \frac{d^2 I_L}{dt^2} \right) R \end{aligned}$$

לפיכך, המשוואה הדיפרנציאלית שעל זרם הסליל לקיים הינה:

$$(6.115) \quad \frac{d^2 I_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{LC} I_L = \frac{V_0}{RLC}$$

נגדיר:

$$(6.116) \quad 2\alpha = \frac{1}{RC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ואז המשוואה תקבל את הצורה הבאה:

$$(6.117) \quad \frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = \frac{V_0}{RLC}$$

כעת נחפש את תנאי ההתחלה עבור המשוואה הנ"ל.

• רציפות המתח בקבל:

$$(6.118) \quad V_C(t = 0^-) = V_C(t = 0^+) = V_L(t = 0^+) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

• רציפות הזרם בסליל:

$$(6.119) \quad I_L(t = 0^-) = I_L(t = 0^+) = \frac{V_0}{2R}$$

לסיכום:

$$(6.120) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = \frac{V_0}{RLC} \\ I_L(t=0) = \frac{V_0}{2R} \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

ג. נפתור עתה את המשוואה הנ"ל בכמה שיטות ונראה את השקילות ביניהן.

שיטה ראשונה: "פתרון פרטי + פתרון הומוגני"

פתרון פרטי:

$$(6.121) \quad I_L^{(p)}(t) = \frac{V_0}{R}$$

פתרון הומוגני:

ראינו בעבר שלמשוואה הנ"ל פתרון הומוגני מהצורה הבאה:

$$(6.122) \quad I_L^{(h)}(t) = e^{-\alpha t} \left[A e^{-\alpha_d t} + B e^{\alpha_d t} \right]$$

כאשר $\alpha_d \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. לשם פשטות בלבד אנו נתמקד בפתרון עבורו $\alpha^2 > \omega_0^2$.

על-מנת לקבוע את המקדמים A ו- B יש לאלץ תנאי התחלה עבור הפתרון הכולל, דהיינו סכום הפתרון הפרטי והפתרון ההומוגני.

$$(6.123) \quad I_L^{(h)}(t=0) + I_L^{(p)}(t=0) = A + B + \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{2R} \Rightarrow A + B = -\frac{V_0}{2R}$$

$$(6.124) \quad \left. \frac{dI_L^{(h)}}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{dI_L^{(p)}}{dt} \right|_{t=0} = -(\alpha + \alpha_d)A - (\alpha - \alpha_d)B = 0 \Rightarrow A - B = \frac{\alpha V_0}{2\alpha_d R}$$

מאילוץ שני התנאים הנ"ל, המקדמים A ו- B נתונים על-ידי הביטויים הבאים:

$$(6.125) \quad A = \frac{V_0}{4R} \frac{\alpha - \alpha_d}{\alpha_d}; \quad B = -\frac{V_0}{4R} \frac{\alpha + \alpha_d}{\alpha_d}$$

לפיכך, הפתרון המלא עבור זרם הסליל הינו:

$$(6.126) \quad I_L(t \geq 0) = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2\alpha_d} e^{-\alpha t} \left[\alpha_d \cosh(\alpha_d t) + \alpha \sinh(\alpha_d t) \right] \right\}$$

שיטה שניה: "פתרון ZIR + פתרון ZSR"

הסעיפים קודמים הראנו שעבור משוואה מהצורה

$$(6.127) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = 0 \\ I_L(t=0) = \tilde{I}_0 \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\tilde{V}_0}{L} \end{cases}$$

הפתרון הינו:

$$(6.128) \quad I_L^{(ZIR)}(t \geq 0) = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d} \left[\left(\frac{\tilde{V}_0}{L} + \tilde{I}_0 \alpha \right) \sinh(\alpha_d t) + \tilde{I}_0 \alpha_d \cosh(\alpha_d t) \right]$$

בפרט, במקרה הנידון מתקיים $\tilde{V}_0 = 0$ ו- $\tilde{I}_0 = \frac{V_0}{2R}$ ולכן פתרון ה-ZIR עבור זרם הסליל הינו:

$$(6.129) \quad I_L^{(ZIR)}(t \geq 0) = \frac{V_0}{2R} \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d} \left[\alpha \sinh(\alpha_d t) + \alpha_d \cosh(\alpha_d t) \right]$$

שים-לב: פתרון ה-ZIR אינו אלא פתרון הומוגני של המשוואה הדיפרנציאלית אשר מקיים את תנאי ההתחלה של המשוואה הכוללת.

כעת נחפש את פתרון ה-ZSR, דהיינו נפתור את המערכת הבאה:

$$(6.130) \quad \begin{cases} \frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = \frac{V_0}{RLC} \\ I_L(t=0) = 0 \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

הדרך הישירה לפתרון משוואה כני"ל הינה לחפש פתרון פרטי ופתרון הומוגני ולתפור תנאי התחלה, עבור הפתרון הכולל.

בדומה לשיטה הראשונה קל להראות ש-

$$(6.131) \quad I_L^{(ZSR,p)}(t) = \frac{V_0}{R}$$

$$(6.132) \quad I_L^{(ZSR,h)}(t) = e^{-\alpha t} [\tilde{A}e^{-\alpha_d t} + \tilde{B}e^{\alpha_d t}]$$

ואז מאילוף תנאי ההתחלה מתקבל:

$$(6.133) \quad I_L^{(ZSR,h)}(t=0) + I_L^{(ZSR,p)}(t=0) = \tilde{A} + \tilde{B} + \frac{V_0}{R} = 0 \Rightarrow \tilde{A} + \tilde{B} = -\frac{V_0}{R}$$

$$(6.134) \quad \left. \frac{dI_L^{(ZSR,h)}}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{dI_L^{(ZSR,p)}}{dt} \right|_{t=0} = -(\alpha + \alpha_d)\tilde{A} - (\alpha - \alpha_d)\tilde{B} = 0 \Rightarrow \tilde{A} - \tilde{B} = \frac{\alpha V_0}{\alpha_d R}$$

מאילוף שני התנאים הני"ל המקדמים \tilde{A} ו- \tilde{B} נתונים על-ידי הביטויים הבאים:

$$(6.135) \quad \tilde{A} = \frac{V_0}{2R} \frac{\alpha - \alpha_d}{\alpha_d}; \quad \tilde{B} = -\frac{V_0}{2R} \frac{\alpha + \alpha_d}{\alpha_d}$$

לפיכך, הפתרון המלא עבור זרם הסליל הינו:

$$(6.136) \quad I_L^{(ZSR)}(t \geq 0) = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_d} e^{-\alpha t} [\alpha_d \cosh(\alpha_d t) + \alpha \sinh(\alpha_d t)] \right\}$$

והפתרון הכולל הינו מהצורה:

$$(6.137) \quad I_L(t \geq 0) = I_L^{(ZIR)} + I_L^{(ZSR)} = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2\alpha_d} e^{-\alpha t} [\alpha_d \cosh(\alpha_d t) + \alpha \sinh(\alpha_d t)] \right\}$$

כמובן, הפתרון הנ"ל מתלכד עם הפתרון שהתקבל בשיטה הראשונה.

שים-לב: פתרון ה-ZIR הינו פתרון הומוגני בלבד, ואילו פתרון ה-ZSR הינו שילוב של פתרון הומוגני

ופרטי. על-כן החלוקה של פרטי והומוגני אינה מתלכדת עם החלוקה ל-ZIR ו-ZSR.

כעת נציג שיטה נוספת לחישוב ה-ZSR באמצעות פונקצית גרין.

שיטה שלישית: "חישוב ZSR בעזרת פונקצית גרין"

בסעיפים הקודמים הראנו שפתרון המערכת הבאה:

$$(6.138) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] x(t) = s(t) \\ x_L(t=0) = 0 \\ \left. \frac{dx_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

הינו מהצורה:

$$(6.139) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t')s(t')dt'$$

כאשר $G(t|t')$ הינה פונקצית גרין של המערכת (תגובה להלם $s(t) = \delta(t-t')$ במקרה הנידון:

$$(6.140) \quad s(t \geq 0) = \frac{V_0}{RLC}$$

בנוסף, הראנו שפונקצית גרין במקרה זה הינה:

$$(6.141) \quad G(t|t') = \frac{e^{-\alpha(t-t')}}{\alpha_d} \sinh[\alpha_d(t-t')]h(t-t')$$

לפיכך פתרון ה-ZSR של זרם הסליל הינו:

$$(6.142) \quad I_L^{(ZSR)}(t \geq 0) = \frac{V_0}{RLC_0} \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-t')}}{\alpha_d} \sinh[\alpha_d(t-t')] dt'$$

$$(6.143) \quad \begin{aligned} I_L^{(ZSR)}(t \geq 0) &= \frac{V_0}{RLC} \frac{1}{2\alpha_d} \left\{ e^{-t(\alpha-\alpha_d)} \int_0^t e^{t'(\alpha-\alpha_d)} dt' - e^{-t(\alpha+\alpha_d)} \int_0^t e^{t'(\alpha+\alpha_d)} dt' \right\} \\ &= \frac{V_0}{RLC} \frac{1}{2\alpha_d} \left\{ \frac{e^{-t(\alpha-\alpha_d)}}{(\alpha-\alpha_d)} [e^{t(\alpha-\alpha_d)} - 1] - \frac{e^{-t(\alpha+\alpha_d)}}{(\alpha+\alpha_d)} [e^{t(\alpha+\alpha_d)} - 1] \right\} \\ &= \frac{V_0}{RLC} \frac{1}{2\alpha_d} \left\{ \frac{1 - e^{-t(\alpha-\alpha_d)}}{(\alpha-\alpha_d)} - \frac{1 - e^{-t(\alpha+\alpha_d)}}{(\alpha+\alpha_d)} \right\} \\ &= \frac{V_0}{RLC} \frac{1}{2\alpha_d} \left\{ \frac{2\alpha_d}{\alpha^2 - \alpha_d^2} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 - \alpha_d^2} [(\alpha + \alpha_d)e^{+\alpha_d t} - (\alpha - \alpha_d)e^{-\alpha_d t}] \right\} \end{aligned}$$

$$(6.144) \quad I_L^{(ZSR)}(t \geq 0) = \frac{V_0}{RLC} \frac{1}{\alpha^2 - \alpha_d^2} \left\{ 1 - \frac{2e^{-\alpha t}}{2\alpha_d} [\alpha \sinh(\alpha_d t) + \alpha_d \cosh(\alpha_d t)] \right\}$$

$$(6.145) \quad I_L^{(ZSR)}(t \geq 0) = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d} [\alpha_d \cosh(\alpha_d t) + \alpha \sinh(\alpha_d t)] \right\}$$

כמובן, הביטוי הנ"ל מתלכד עם הפתרון שחושב בדרך הישירה על-ידי פתרון המשוואה הלא הומוגנית עם תנאי התחלה אפס. יש לציין, שהיתרון של פונקצית גרין הינו עבור המקרים בהם קיים קושי בניחוש פתרון פרטי.

ד. ברגע הזמן $t = 0^-$:

$$V_C(t = 0^-) = 0 \Rightarrow W_C(t = 0^-) = \frac{1}{2} C V_C^2(t = 0^-) = 0$$

(6.146)

$$I_L(t = 0^-) = \frac{V_0}{2R} \Rightarrow W_L(t = 0^-) = \frac{1}{2} L I_L^2(t = 0^-) = \frac{1}{8} \frac{L V_0^2}{R^2}$$

ברגע הזמן $t = 0^+$:

$$V_C(t = 0^+) = 0 \Rightarrow W_C(t = 0^+) = \frac{1}{2} C V_C^2(t = 0^+) = 0$$

(6.147)

$$I_L(t = 0^+) = \frac{V_0}{2R} \Rightarrow W_L(t = 0^+) = \frac{1}{2} L I_L^2(t = 0^+) = \frac{1}{8} \frac{L V_0^2}{R^2}$$

ברגע הזמן $t \rightarrow \infty$:

$$V_C(t \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow W_C(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} C V_C^2(t \rightarrow \infty) = 0$$

(6.148)

$$I_L(t \rightarrow \infty) = \frac{V_0}{R} \Rightarrow W_L(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} L I_L^2(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \frac{L V_0^2}{R^2}$$

ה. על-מנת לענות על השאלה, נחשב תחילה את הזרם בנגד הראשון ברגעי הזמן $t = 0^-$ ו- $t = 0^+$.

ב- $t = 0^-$ הקבל מהווה נתק והסליל קצר ולכן הזרם דרך שני הנגדים הינו כזרם הסליל ושווה ל- $\frac{V_0}{2R}$

ועל-כן הספק הנגד הראשון ברגע הזמן $t = 0^-$ שווה ל- $P_R(t = 0^-) = \frac{V_0^2}{4R}$. ב- $t = 0^+$ הזרם בנגד

הראשון שווה לסכום הזרם בסליל (אשר זהה לרגע הזמן $t = 0^-$) ולזרם בקבל וניתן לחשבו באופן הבא:

$$(6.149) \quad V_0 = \left(I_L(t = 0^+) + C \frac{dV_C}{dt} \Big|_{t=0^+} \right) R$$

מרציפות הזרם בסליל נקבל:

$$(6.150) \quad V_0 = \left(\frac{V_0}{2R} + C \frac{dV_C}{dt} \Big|_{t=0^+} \right) R$$

ולפיכך הזרם הכולל בנגד ברגע הזמן $t = 0^+$ שווה ל- $\frac{V_0}{R}$ ועל-כן ההספק ברגע הזמן $t = 0^+$ שווה ל-

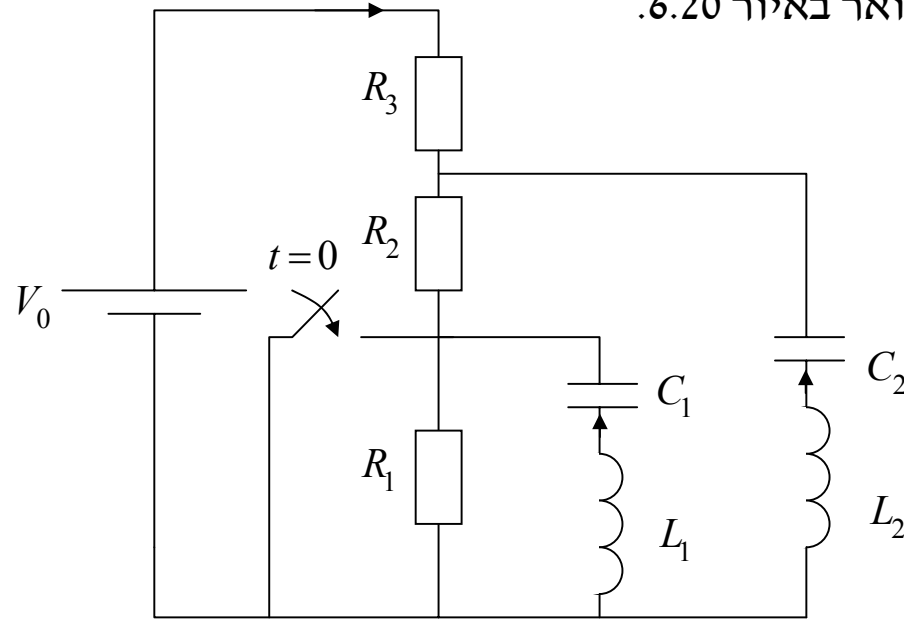
$$P_R(t = 0^+) = \frac{V_0^2}{R}$$

למרות הקפיצה בהספק הנגד הראשון, הקפיצה מתרחשת באפס זמן ולכן אין כל בזבוז אנרגיה הקשור בקפיצה זו.

6.10 פתרון מצב מתמיד סינוסי לעומת פתרון תופעת מעבר

בסעיף זה נביא דוגמא מסכמת אשר מתארת את הקשר בין פתרון תופעת המעבר (במישור הזמן) לבין פתרון מצב מתמיד סינוסי (במישור התדר – רישום פאזורי).

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור 6.20.



איור 6.20 : מעגל חשמלי מסדר רביעי

המפסק היה פתוח זמן ממושך ונסגר ברגע הזמן $t=0$.

א. חשב את מתחי הקבלים ואת זרמי הסלילים ברגע הזמן $t=0^-$.

ב. רשום את מערכת המשוואות אשר מאפשרת פתרון המעגל הנ"ל מרגע הזמן $t=0$.

ג. ציין את הקשר (אם קיים) בין קבועי הדעיכה בזמן של פתרון המערכת שרשמת בסעיף ב' לבין

הפתרון במצב מתמיד.

פתרון:

א. נחשב תחילה את תנאי ההתחלה במעגל. ברור שעבור זמן ממושך של עירור DC אין זרם בקבלים ומפל המתח על הסלילים מתאפס, לכן מתקיים:

$$(6.151) \quad I_{L,1}(t=0^-) = I_{L,2}(t=0^-) = 0$$

המתח על הקבלים זהה למתח על הנגדים המחוברים במקביל אליהם, דהיינו

$$(6.152) \quad V_{C,1}(t=0^-) = -V_{R_1} = -V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

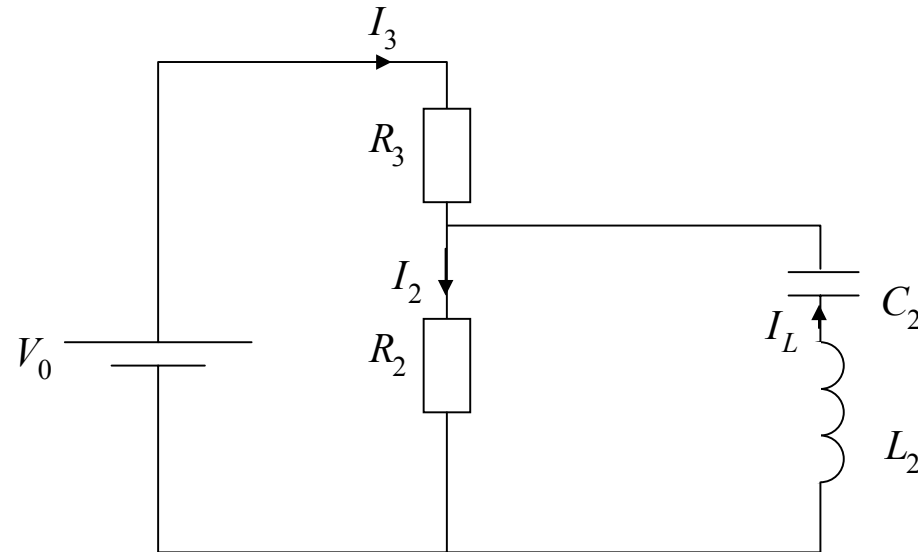
$$V_{C,2}(t=0^-) = -V_{R_1+R_2} = -V_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

מרציפות המתח על הקבל והזרם בסליל הערכים הנ"ל תקפים גם עבור $t=0^+$ והם מהווים התחלה למערכת המשוואות אשר פותרת את המעגל.

ב. ברגע הזמן $t=0$ מקצרים את הנגד R_1 ונוצרים שני מעגלים בלתי תלויים:

I. מעגל תהודה L_1, C_1 אשר יתנדנד בתדר $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$. למעגל אין כל מנגנון ריסון.

II. המעגל השני הינו כמתואר באיור 6.21:



איור 6.21 : מעגל חשמלי מסדר שני

נקבע כעת את המשוואה שקובעת את הדינמיקה של המעגל.

מחוק קירכהוף למתחים מתקבל :

$$(6.153) \quad V_0 = V_2 + V_3 \Rightarrow V_0 = I_2 R_2 + I_3 R_3$$

$$(6.154) \quad V_2 + V_C + V_L = 0 \Rightarrow I_2 R_2 + V_C + L_2 \frac{dI_L}{dt} = 0$$

מחוק קירכהוף לזרמים נקבל :

$$(6.155) \quad I_3 + I_L = I_2$$

אמנם, $I_L = I_C = C \frac{dV_C}{dt}$, ולכן נקבל את מערכת המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} V_0 &= I_2 R_2 + I_3 R_3 \\ (6.156) \quad I_2 R_2 + V_C + L_2 C_2 \frac{d^2 V_C}{dt^2} &= 0 \\ C_2 \frac{dV_C}{dt} &= I_2 - I_3 \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה במערכת הנ"ל נחלץ את I_2 ונציבו במשוואה השלישית ונקבל:

$$\begin{aligned} (6.157) \quad C_2 \frac{dV_C}{dt} &= \frac{1}{R_2} [V_0 - I_3 R_3] - I_3 \\ \Rightarrow I_3 &= \frac{R_2}{R_2 + R_3} \left[\frac{V_0}{R_2} - C_2 \frac{dV_C}{dt} \right] \end{aligned}$$

נציב את הביטויים לזרמים I_2 ו- I_3 במשוואה השנייה במערכת המשוואות (6.156) ונקבל:

$$(6.158) \quad V_0 - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \left[\frac{V_0}{R_2} - C_2 \frac{dV_C}{dt} \right] + V_C + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_C}{dt^2} = 0; \quad \omega_0^2 \equiv \frac{1}{L_2 C_2}$$

נביא את המשוואה האחרונה לצורה קנונית כלהלן:

$$(6.159) \quad \frac{V_0}{1 + R_3/R_2} + V_C + \underbrace{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C_2}_{2\alpha} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_C}{dt^2} = 0$$

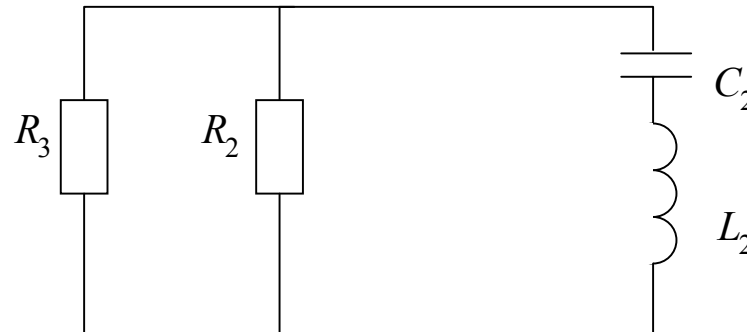
הערות:

- את מפל המתח על הקבל עם סיום תופעת המעבר יכולנו לחזות מראש מאחר ובמצב מתמיד הקבל יהווה נתק ומתחו שווה בגודלו למתח הנגד R_2 . ובמפורש מתח זה נתון על-ידי:

$$(6.160) \quad V_C = -V_0 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = -\frac{V_0}{1 + R_3/R_2}$$

זהו כמובן הפתרון הפרטי של משוואה (6.159).

- את מקדם הניחות או הדעיכה בזמן יכולנו גם לחזות מראש הרי הוא מתקבל מהפתרון ההומוגני והמעגל במצב זה הינו מהצורה הבאה:



איור 6.22: המעגל ההומוגני

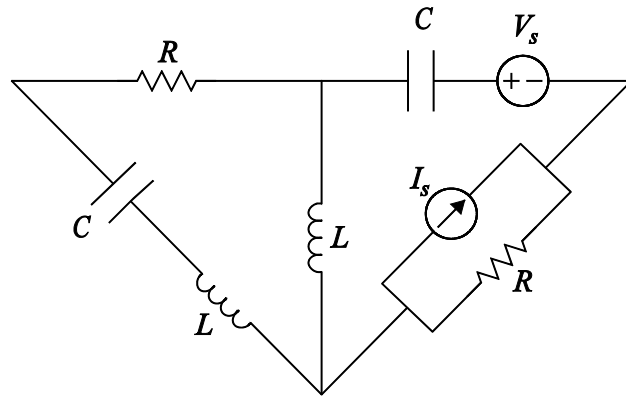
ג. כזכור הפתרונות במקרה ההומוגני הם פתרונות הטהודה המתקבלים מהפולינום האופייני ברישום הפאזורי, דהיינו

$$(6.161) \quad -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\omega C_2 (R_2 \parallel R_3) + 1 = 0$$

הפרק השביעי - שיטות מטריציות

מטרת הפרק הנוכחי היא פיתוח גישה כללית לפתרון מעגלים חשמליים במצב מתמיד. בארבעת הפרקים הראשונים למדנו לפתור מעגלים פשוטים במצב מתמיד, סינוסי או קבוע, על-ידי הפעלת חוקי קירכהוף. כאשר ניצב לפנינו מעגל חשמלי הכולל **מספר רב** של ענפים וצמתים, רישום חוקי קירכהוף מביא אותנו למערכות לינאריות מסדר גבוה. פתרון המעגל בגישה זו, עלול לקחת הרבה מאוד זמן, או להוביל לבלבול וכשלון בפתרונו. בפרק הנוכחי נפתח אלגוריתם (בהסתמך על חוקי קירכהוף) באמצעותו נוכל לפתור באופן שיטתי כל מעגל חשמלי הנמצא במצב מתמיד. כיום, קיימות בשימוש הרחב מספר תוכנות הבנויות על העיקרון אשר יוסבר כאן.

7.1 ניתוח מעגלים בשיטת הצמתים - Node Analysis



איור 7.1: מעגל דוגמא ליישום שיטת הצמתים

נפתח את השיטה באופן כללי, ולאורך כל הפיתוח נמחיש את השימוש על-ידי דוגמא. נתון מעגל חשמלי כמתואר כבאיור 7.1, בהנחת מצב מתמיד יש לפתור את המעגל. נפתור בשיטת מתחי הצמתים. נעקוב אחר השלבים הבאים:

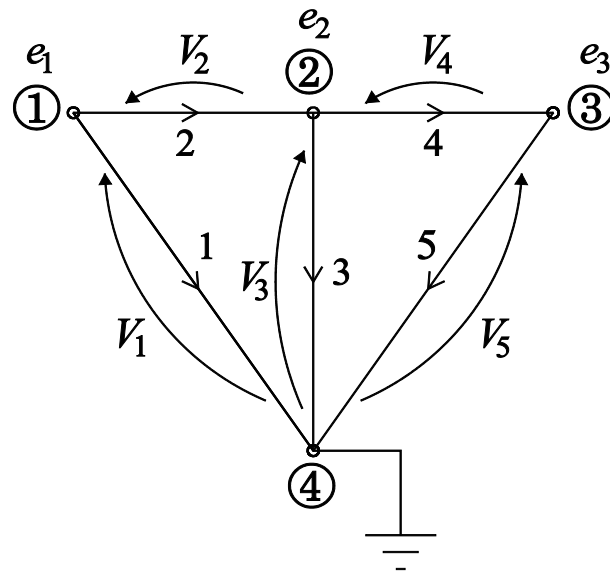
שלב 1 : מספור צמתים/ענפים

נסמן את הענפים והצמתים במספרים. נזכור שפתרון המעגל הוא מציאת כל זרמי ומתחי הענפים.

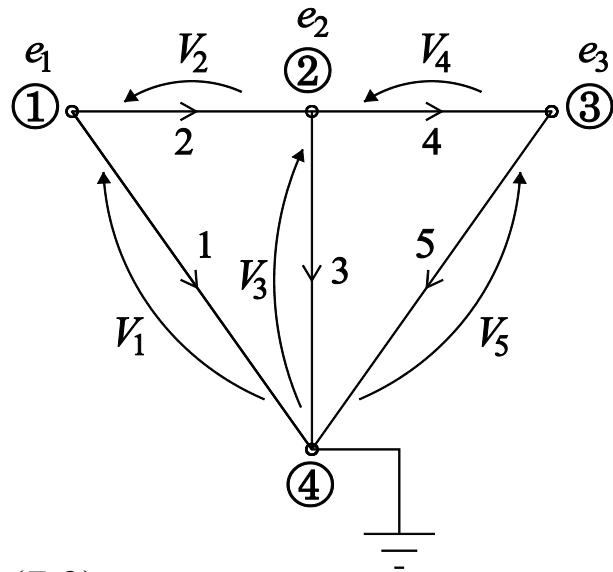
נניח כי במעגל שלנו ישנם N צמתים ו- B ענפים. נגדיר את מטריצת הפגיעה (Incidence Matrix)

כמטריצה במימד $N \times B$, המוגדרת באופן הבא:

$$(7.1) \quad \underline{A}: a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{branch } k \text{ leaves node } i \\ -1 & \text{branch } k \text{ enters node } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



איור 7.2: סימון הענפים והצמתים במעגל במעגל שבדוגמא נסמן 4 צמתים. ומטריצת הפגיעה הינה:



(7.3)

(7.2)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

שלב 2: משוואות KCL עבור הצמתים

נרשום את משוואות KCL בצמתי המעגל:

$$I_1 + I_2 = 0$$

$$-I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$-I_4 + I_5 = 0$$

$$-I_1 - I_3 - I_5 = 0$$

אם נגדיר את וקטור זרמי הענפים בצורה הבאה:

(7.4)

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}$$

אז בקלות רואים כי מערכת המשוואות (7.3) שקולה ל-

$$(7.5) \quad \underline{A} \cdot \vec{I} = \vec{0}$$

וזהו הייצוג המטריצי למשוואות KCL במעגל. כלומר לאחר מספור הענפים והצמתים, רישום מטריצת הפגיעה שקול לרישום KCL.

שלב 3: קביעת מתחי הצמתים

בפרקים הראשונים אמרנו כי המתח החשמלי השורר על ענף במעגל חשמלי הוא יחסי להפרש הפוטנציאלים בין שני הדקי הענף. מלימודי הפיזיקה אנו יודעים כי לפוטנציאל אין משמעות אם אינו יחסי לפוטנציאל אחר. לכן אם ברצוננו להגדיר מתחי צמתים, יש בידינו דרגת חופש אחת, של בחירת צומת בו הפוטנציאל יהיה אפס, ושאר מתחי הצמתים יהיו הפוטנציאל ביחס לאותו אפס **בצומת הייחוס**.

נסמן את מתח הצומת ה- i ב- e_i . וקטור מתחי הצמתים מוגדר באותו אופן כמו וקטור זרמי הענפים. עלינו לבחור צומת ייחוס במעגל הדוגמא שלנו. כפי שניתן לראות באיור בחרנו בצומת 4 בתור צומת הייחוס.

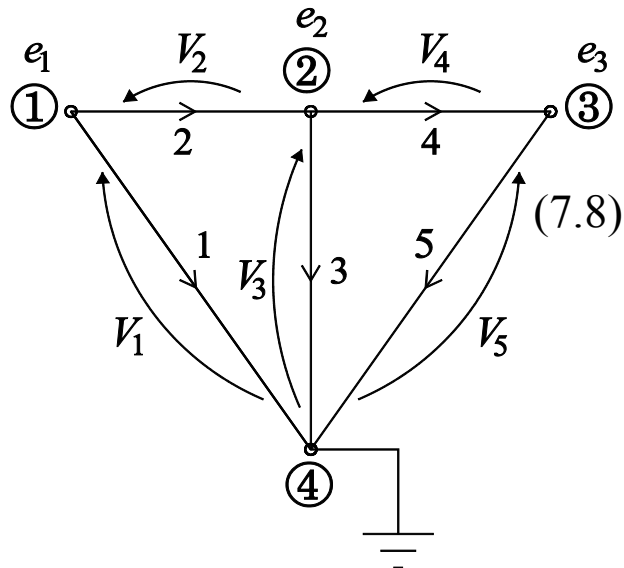
אמרנו כבר בפרקים הקודמים כי במעגל בו N צמתים ישנן $N-1$ משוואות KCL בת"ל. כלומר ניתן לבחור צומת אחד בו לא נרשום את משוואת KCL המתאימה לו. לשם העקביות נבחר שוב בצומת בו בחרנו בתור צומת ייחוס. מכאן נובעת ההגדרה של **מטריצת הפגיעה המצומצמת** המתקבלת ממטריצת הפגיעה על-ידי מחיקת השורה המתאימה לצומת הייחוס. בדוגמא שלנו מטריצת הפגיעה המצומצמת הינה:

$$(7.6) \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

נזכור שוב כי פתרון המעגל הוא מציאת מתחי הענפים ולא מתחי הצמתים. לכן עלינו לקשר בין מתחי הענפים למתחי הצמתים. נעשה זאת על-ידי שימוש ב-KVL (או ההגדרה שהמתח השורר על ענף הוא הפרש הפוטנציאלים בין שני הדקויו). למשל המתח על ענף k הינו:

$$(7.7) \quad V_k = e_i - e_j$$

במעגל הדוגמא:



(7.9)

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = e_1 \\ V_2 = e_1 - e_2 \\ V_3 = e_2 \\ V_4 = e_2 - e_3 \\ V_5 = e_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^T} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \vec{e}$$

כלומר הייצוג המטריצי של KVL הינו:

$$\vec{V} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \vec{e}$$

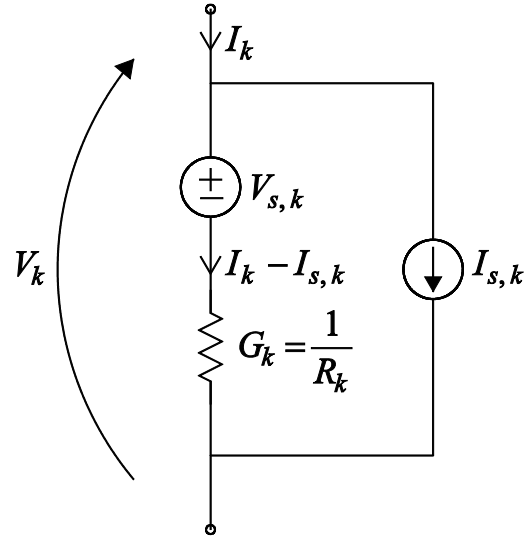
שלב 4: משוואת המצב של הענפים

באיור 7.3 ניתן לראות ענף כללי הכולל מקור מתח בטור לאימפדנס כללי ובמקביל אליהם מקור זרם. זהו הענף ה- k במעגל. לפי הסימונים באיור, משוואת האופיין, או משוואת המצב, של הענף הזה הינה:

$$(7.10) \quad V_k = R_k (I_k - I_{S,k}) + V_{S,k}$$

או לחילופין

$$(7.11) \quad I_k = G_k (V_k - V_{S,k}) + I_{S,k}$$



איור 7.3: תיאור ענף כללי

כעת נרצה לתאר במשוואה וקטורית – מטריצית את משוואות המצב של כל הענפים במעגל:

$$(7.12) \quad \vec{I} = \underline{\underline{G}}\vec{V} + \underbrace{(\vec{I}_s - \underline{\underline{G}}\vec{V}_s)}_{\vec{u}_s}$$

כאשר:

$\underline{\underline{G}}$: מטריצת המוליכויות, מטריצה אלכסונית המכילה באיבר ה- k (באלכסון) את המוליכות בענף k .

\vec{u}_s : וקטור המקורות. ניתן לראות כי הוא מתקבל מהחלפת מקורות המתח במעגל בשקולי הנורטון שלהם.

כזכור הייצוג המטריצי של משוואות KCL ו-KVL:

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \text{KCL: } \underline{A} \cdot \vec{I} &= \vec{0} \\ \text{KVL: } \vec{V} &= \underline{A}^T \cdot \vec{e} \end{aligned}$$

נתחיל מהצבת KVL אל תוך משוואת המצב:

$$(7.14) \quad \vec{I} = \underline{G} \cdot \underline{A}^T \cdot \vec{e} + \vec{u}_s$$

נכפיל את שני צידי המשוואה משמאל במטריצת הפגיעה המצומצמת ונשתמש ב-KCL:

$$(7.15) \quad \vec{0} = \underline{A} \cdot \vec{I} = \underbrace{(\underline{A} \cdot \underline{G} \cdot \underline{A}^T)}_{\underline{Y}} \cdot \vec{e} + \underline{A} \cdot \vec{u}_s = \vec{0}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$(7.16) \quad \underline{Y} \cdot \vec{e} = -\underline{A} \cdot \vec{u}_s$$

❖ \underline{Y} : מטריצת האדמיטנסים – מטריצה ריבועית רגולרית, ולכן קיימת לה הופכית \underline{Y}^{-1} .

נסכם את שיטת הצמתים:

1. נמספר את הענפים והצמתים במעגל ונבחר צומת ייחוס.
2. נרשום את מטריצת הפגיעה המצומצמת (ללא צומת הייחוס) A , את מטריצת המוליכויות G ,

ואת וקטור המקורות \vec{u}_s שהנוסחא עבורו היא: $\vec{u}_s = \vec{I}_s - \underline{G} \cdot \vec{V}_s$.

3. וכעת נותר להציב בנוסחאות הבאות ולקבל את זרמי ומתחי הענפים :

$$(7.17) \quad \begin{aligned} \underline{\bar{e}} &= -\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{\bar{u}}_s \\ \underline{\bar{V}} &= \underline{A}^T \cdot \underline{\bar{e}} \quad \underline{\bar{I}} = \underline{G} \cdot \underline{A}^T \cdot \underline{\bar{e}} + \underline{\bar{u}}_s \end{aligned}$$

תרגיל עצמי: השתמשו בדוגמא בסעיף 3.1 (עמוד 52) על מנת להוכיח את משפט הסופרפוזיציה ביחס למעגלים חשמליים.

7.2 משפט תלגן Tellegen – חוק שימור האנרגיה

הסכום האלגברי של ההספק החשמלי הנצרך ברכיבים במעגל החשמלי הינו אפס. או לחילופין, סך כל ההספק המסופק במעגל שווה לסך כל ההספק המבוזבז בו. נשים לב כי מדובר בסכום אלגברי מכיוון שהגדרנו את ההספק להיות חיובי (צריכת אנרגיה) כאשר כיווני הזרם והמתח הפיזיקליים מתלכדים עם כיווני הייחוס התואמים ולהיות שלילי (ייצור אנרגיה) כאשר הכיוונים הפיזיקליים מנוגדים לכיווני הייחוס התואמים. נוכיח את המשפט הנ"ל על סמך הרישום המטריצי שהבאנו בשיטת הצמתים בסעיף הקודם.

הוכחה:

הייצוג המטריצי של חוקי קירכהוף:

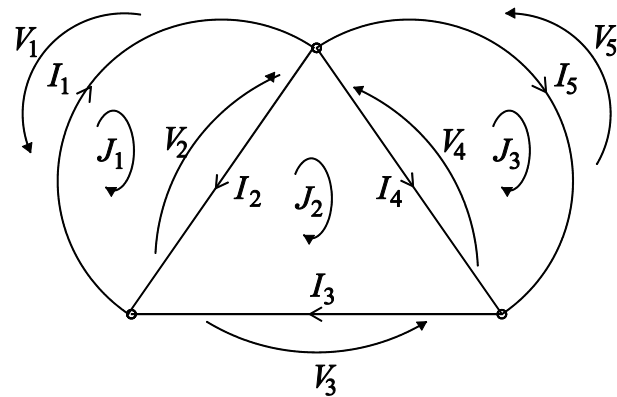
$$(7.18) \quad \begin{aligned} \text{KCL: } \underline{A} \cdot \underline{\bar{I}} &= \underline{\bar{0}} \\ \text{KVL: } \underline{\bar{V}} &= \underline{A}^T \cdot \underline{\bar{e}} \end{aligned}$$

$$(7.19) \quad \sum_k P_k = \sum_k V_k \cdot I_k = \vec{V}^T \cdot \vec{I} = (\underline{A}^T \cdot \vec{e})^T \cdot \vec{I} = \vec{e}^T \cdot \underbrace{\underline{A} \cdot \vec{I}}_{\vec{0}} = 0$$

כלומר

$$(7.20) \quad \boxed{\sum_k P_k = 0}$$

7.3 ניתוח מעגלים בשיטת העיניים (לולאות) - Mesh Analysis



בסעיף הקודם הצגנו את שיטת הצמתים המתבססת בעיקר על חישוב פוטנציאלי הצמתים ביחס לצומת הייחוס. בסעיף זה נציג שיטה נוספת לפתרון מעגל חשמלי המתבססת בעיקר על חישוב הזרמים החשמליים בלולאות שונות במעגל. נפתח את השיטה באופן כללי, ולאורך כל הפיתוח נמחיש את השימוש על-ידי דוגמא וכמו במקרה הקודם, נדגיש את השלבים העיקריים:

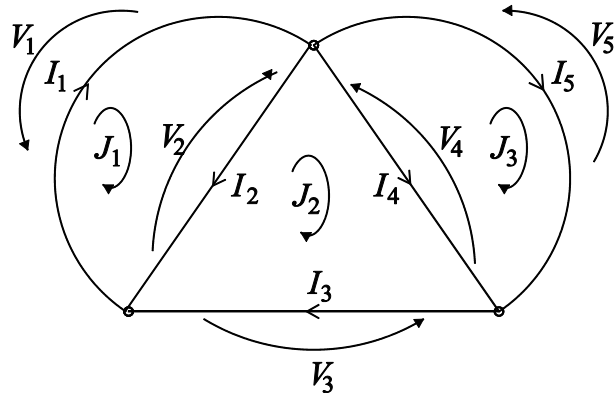
איור 7.4: מעגל דוגמא ליישום שיטת העיניים

שלב 1: מספור לולאות

מומלץ למספר לולאות משמאל לימין, נגדיר זרמי עיניים \vec{J} בכיוון סיבוב השעון. נשים לב כי גם הלולאה החיצונית במעגל שלנו מהווה "עין". בהמשך נסביר מדוע אין לנו מחשיבים אותה עם שאר העיניים. נניח כי במעגל שלנו N צמתים ו- B ענפים. ניתן להוכיח (משפט אוילר בתורת הגרפים) כי יש במעגל $B-N+1$ עיניים לא כולל העין החיצונית. בעבר כבר אמרנו כי במעגל כזה יש בדיוק $B-N+1$ משוואות KVL בת"ל. לכן אין צורך להשתמש בעין החיצונית. ביטול העין החיצונית אנלוגי לביטול צומת הייחוס בשיטת הצמתים.

נגדיר את **מטריצת העיניים – (Mesh Matrix)**:

$$(7.21) \quad \underline{\underline{M}} : m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{branch } k \text{ in mesh } i, \text{ and their reference coincides} \\ -1 & \text{branch } k \text{ in mesh } i, \text{ and their reference do not coincide} \\ 0 & \text{branch } k \text{ does not belong to mesh } i \end{cases}$$



במעגל הנדון מטריצת העיניים הינה:

$$(7.22) \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

שלב 2: רישום משוואות KVL עבור העיניים

$$(7.23) \quad \begin{aligned} V_1 + V_2 &= 0 \\ -V_2 + V_3 + V_4 &= 0 \\ -V_4 + V_5 &= 0 \end{aligned}$$

מכאן רואים שהמערכת הנ"ל שקולה לרישום המטריצי הבא:

$$(7.24) \quad \underline{\underline{M}} \cdot \vec{V} = \vec{0}$$

וזהו הניסוח המטריצי ל-KVL.

שלב 3: קישור בין זרמי העיניים לזרמי הענפים

באופן אנלוגי לקישור בין מתחי הענפים למתחי הצמתים בשיטת הצמתים נקשר בין זרמי העיניים לזרמי הענפים באופן הבא:

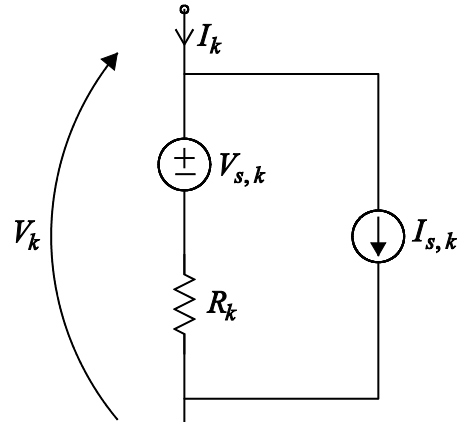
$$(7.25) \quad \left. \begin{aligned} I_1 &= J_1 \\ I_2 &= J_1 - J_2 \\ I_3 &= J_2 \\ I_4 &= J_2 - J_3 \\ I_5 &= J_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}^T} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{M}}^T \cdot \vec{J}$$

כלומר הייצוג המטריצי של KCL הוא:

$$(7.26) \quad \vec{I} = \underline{\underline{M}}^T \cdot \vec{J}$$

שלב 4: משוואות מצב של כל ענף

ב- (7.10) ראינו את משוואת המצב של הענף ה-k-י.



איור 7.5: תיאור ענף כללי

$$(7.27) \quad \vec{V} = \underline{\underline{R}}(\vec{I} - \vec{I}_S) + \vec{V}_S$$

כזכור הייצוג המטריצי של משוואות KCL ו-KVL:

$$(7.28) \quad \text{KCL: } \vec{I} = \underline{\underline{M}}^T \cdot \vec{J}$$

$$\text{KVL: } \underline{\underline{M}} \cdot \vec{V} = \vec{0}$$

נציב את המשוואות הנ"ל במשוואת המצב:

$$(7.29) \quad \underline{\underline{M}} \cdot \left[\underline{\underline{R}} \cdot (\underline{\underline{M}}^T \cdot \vec{J} - \vec{I}_S) + \vec{V}_S \right] = \vec{0}$$

נסמן, נעביר אגפים ונקבל:

$$(7.30) \quad \underbrace{(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{M}}^T)}_{\underline{\underline{Z}}} \cdot \vec{J} - \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \vec{I}_S + \underline{\underline{M}} \cdot \vec{V}_S = \vec{0}$$

$$(7.31) \quad \underline{\underline{Z}} \cdot \vec{J} = \underline{\underline{M}} \cdot (\underline{\underline{R}} \cdot \vec{I}_S - \vec{V}_S)$$

❖ $\underline{\underline{Z}}$: מטריצת האימפדנסים – מטריצה ריבועית רגולרית, ולכן קיימת לה הופכית $\underline{\underline{Z}}^{-1}$.

נסכם את שיטת העיניים:

1. נמספר את העיניים והענפים במעגל. כיוון זרמי העיניים עם כיוון השעון.
2. נרשום את מטריצת העיניים M , את מטריצת ההתנגדויות R , ואת וקטור

$$\vec{u}_s = \underline{R} \cdot \vec{I}_S - \vec{V}_S$$

3. וכעת נותר להציב בנוסחאות הבאות ולקבל את זרמי ומתחי הענפים:

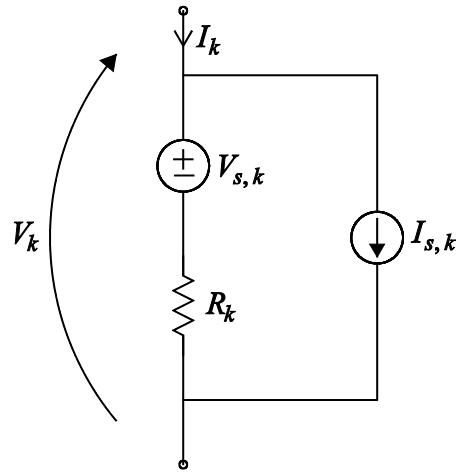
$$(7.32) \quad \begin{aligned} \vec{J} &= \underline{Z}^{-1} \cdot \underline{M} \cdot \vec{u}_s \\ \vec{I} &= \underline{M}^T \cdot \vec{J} \quad \vec{V} = \underline{R} \cdot \underline{M}^T \cdot \vec{J} - \vec{u}_s \end{aligned}$$

7.4 הכללת השיטה למקורות מבוקרים – לדוגמא: שיטת הצמתים

כשתיארנו את שיטת הצמתים, המשוואה המרכזית אליה הגענו הייתה:

$$(7.33) \quad (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}}^T) \cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{I}}_S - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{V}}_S) = \underline{\underline{0}}$$

בהיעדר מקורות מבוקרים, ראינו כי $\underline{\underline{G}}$ אלכסונית. נוסיף כעת מקורות מבוקרים באופן הבא:



$$(7.34) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{I}}_S &= \underline{\underline{I}}_{SS} + \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}_{SS} + \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{e}} \\ \underline{\underline{V}}_S &= \underline{\underline{V}}_{SS} + \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_{SS} + \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{e}} \end{aligned}$$

נציב זאת ב- (7.33) ונקבל:

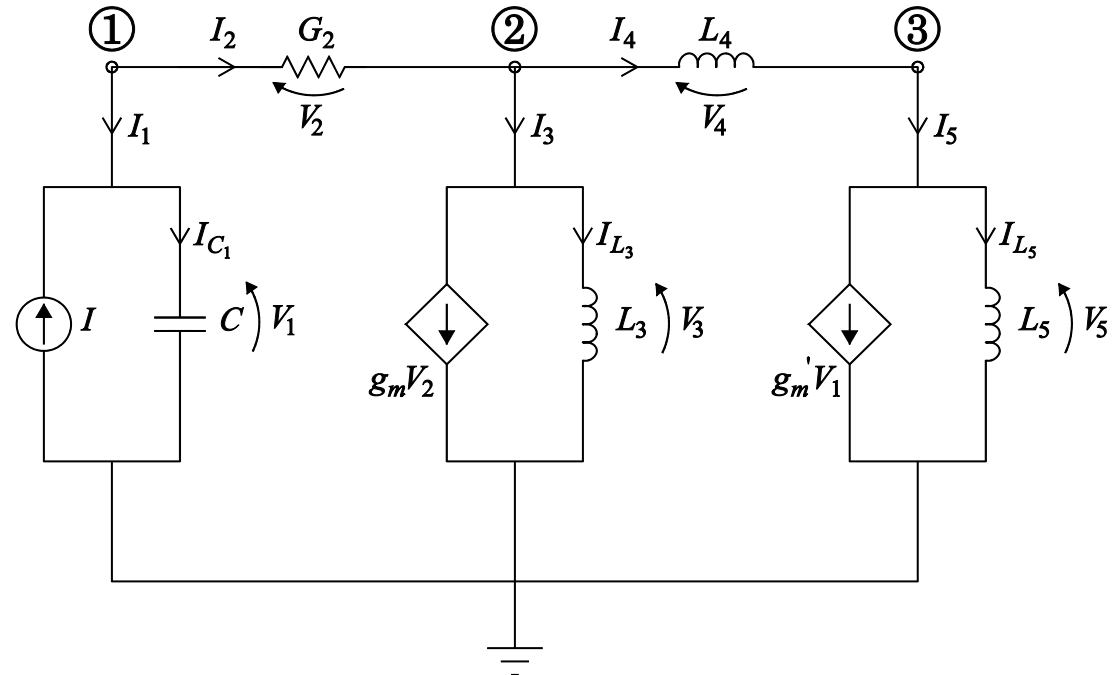
$$(7.35) \quad \begin{aligned} (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}}^T) \cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{I}}_{SS} + \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{e}}) - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}} (\underline{\underline{V}}_{SS} + \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{e}}) &= \underline{\underline{0}} \\ \left[\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{g}} - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \cdot \underline{\underline{A}}^T \right] \cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{I}}_{SS} - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{V}}_{SS}) &= 0 \end{aligned}$$

למעשה קיבלנו על-ידי ההרחבה לשימוש במקורות מבוקרים, מטריצת מוליכויות מהצורה:

$$(7.36) \quad \underline{\underline{\tilde{G}}} = \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{g}} - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\mu}}$$

שאיננה אלכסונית. באותו אופן ניתן להרחיב את משוואות העיניים כך שייטפלו גם במקרה של מקורות מבוקרים במעגל.

להלן מעגל לדוגמא לפתרון כתרגיל עצמי:



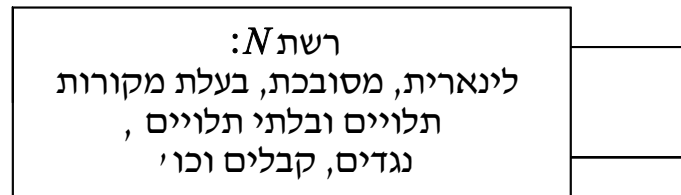
איור 7.6: מעגל דוגמא המוזן ממקורות מבוקרים

פתור את המעגל הנ"ל פעם בשיטת העיניים ופעם בשיטת הצמתים.

7.5 הוכחת השקילות לפי תבנית או נורטון בשיטת המטריצות

בפרק 3 קבענו את השקילות לפי תבנית ונורטון בצורה אקסיומטית. כתזכורת קבענו שעבור רשת לינארית כלשהי מנקודת ראות של הצרכן, המבנה הפנימי של הרשת אינו מעניין כל עוד הרשת מספקת את התנאים הנדרשים לצרכן. הטענה הבסיסית היא שכל רשת חשמלית לינארית ניתנת לתיאור באמצעות מקור מתח/זרם שקול ו"נגד" שקול.

להלן נתונה רשת בעלת 2 הדקים חיצוניים (המאפשרים חיבור לעומס או לחלקי מעגל אחרים):



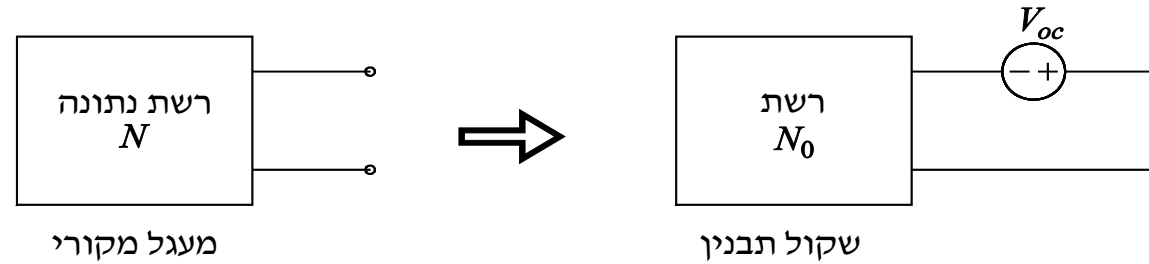
איור 7.7: רשת לינארית כללית

הנחות:

- א. הרשת לינארית, כלומר מורכבת מרכיבים לינאריים (העומס לא בהכרח לינארי).
- ב. הרשת איננה כוללת מקורות מבוקרים התלויים בגדלים שמחוצה לה, וכן איננה משפיעה ישירות על מקורות מבוקרים שמחוצה לה.
- ג. קיים פתרון יחיד כאשר מחברים מקור זרם או מתח בלתי תלוי בין הדקי הרשת.

הגדרת המעגל השקול של תבנין

באיור 7.8 מתואר שקול תבנין של רשת חשמלית לינארית נתונה:



איור 7.8: שקול תבנין עבור רשת לינארית

ערך מקור המתח והרשת החדשה מתקבלים מהרשת המקורית באופן הבא:

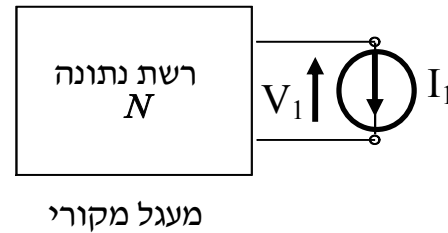
א. V_{oc} הוא המתח בין ההדקים כאשר ישנו נתק ביניהם (עומס לא מחובר) (oc – Open Circuit)

ב. N_0 היא הרשת המתקבלת על-ידי איפוס כל המקורות הבלתי תלויים ברשת המקורית; מקורות מבוקרים נשארים ללא שינוי.

ג. תנאי התחלה ב- N_0 הם אפס.

ברוח הפרק הנוכחי נניח שהרשת מחוברת לעומס נתון כך שעל סמך משפט ההצבה בהינתן המתח

והזרם על העומס נוכל להחליפו במקור זרם I_1



איור 7.9: מקור הזרם מחליף את העומס

ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח כעת שהמערכת באיור 7.9 מתוארת בצורה מטריצית על ידי מטריצת אדמיטנסים

$$\underline{Y} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix} = \underline{Y}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix}$$

על סמך משפט הסופרפוזיציה

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix} = \underline{Y}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix} = \underline{Y}^{-1} \left[\begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix} \right]$$

מנקודת ראות של המתח על העומס, האיברים אחרי הראשון מהווים את התרומה למתח במצב של נתק

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix} = \underline{Y}^{-1} \left[\begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix}}_{\text{open circuit } (I_1=0)} \right] = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix}^{I_1 \neq 0} + \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix}^{OC}$$

ואילו האיבר הראשון מתאים לתרומה כאשר כל המקורות של המערכת המקורית מאופסים

$(I_2 = I_3 = \dots = I_M = 0)$. מנקודת ראות של המתח V_1 :

$$V_1 = V_1^{I_1 \neq 0} + V_1^{OC}$$

בצורה מפורשת, מנקודת ראות של העומס, למתח יש שתי תרומות: האחת ממצב של נתק, קרי המתח המדד כאשר כל המקורות במערכת פועלים אך העומס מנותק ($I_1 = 0$) ואילו התרומה השנייה למתח

נובעת ממצב שכל המקורות בתוך המערכת המקורית הם אפס אך מקור הזרם שהחליף את העומס מזרים את הזרם המאופיין.

תרגיל עצמי : א. מה קורה אם העירור הוא כלשהו ולא דווקא מחזורי?
ב. יש חזור על הצעדים העיקריים עבור שקול נורטון.

הפרק השמיני - מעגלים לא ליניאריים

8.1 מבוא

עד כה עסקנו בפתרון מעגלים ליניאריים. נזכור כי מעגלים ליניאריים הם כאלה המורכבים מרכיבים עבורם מוגדר קשר ליניארי בין המתח השורר עליהם, לבין הזרם הזורם דרכם, בין אם הוא דיפרנציאלי או אלגברי. מספיק שיהיה במעגל רכיב בודד שאינו מקיים תנאי זה, והמעגל לא יהיה ליניארי.

מדוע אנו מפרידים בין מעגלים ליניאריים לבין מעגלים שאינם ליניאריים? ובכן, אם נזכור את ניסוח משפט הסופרפוזיציה, נראה כי הדרישה לשימוש בו היא שהמערכת אותה אנו מנסים לפתור, תהיה ליניארית. סביר להניח כי בניסיון שצברנו עד כה, אנו משתמשים בתוצאות משפט זה בצורה כה אינטואיטיבית, עד כי איננו חושבים כמעט על דרישותיו.

למעשה כל הכלים שפיתחנו עבור פתרון מעגלים, הניחו ליניאריות המעגל, פרט כמובן לחוקי קירכהוף שהנחנו נכונותם עבור כל רשת חשמלית מקובצת. בפרק הנוכחי אנו נציג מספר שיטות לניתוח ופתרון מעגלים לא ליניאריים. באופן כללי פתרון מעגל שאינו ליניארי יהיה מקורב ולא מדויק. במקרים פרטיים, ניתן לעיתים לפתור מעגלים לא ליניאריים באופן מדויק.

בפרק זה אנו נציג שלוש דוגמאות הממחישות פתרון מעגלים לא ליניאריים.

8.2 נקודת עבודה במעגל לא ליניארי

נבחן מעגלים בהם הכניסה מורכבת משני מקורות – מקור DC דומיננטי, ומקור AC בעל משרעת קטנה ביחס למתח המקור הקבוע:

$$(8.1) \quad |V_{AC}|_{\max} \ll |V_{DC}|$$

נבחן כעת מעגלים בעלי רכיב לא ליניארי בודד, עבורו משוואת המצב המקשרת בין המתח השורר על-פניו לזרם הזורם דרכו, היא משוואה אלגברית, סתומה באופן כללי, מהצורה:

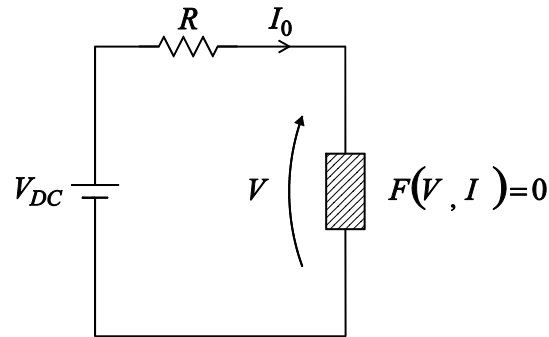
$$(8.2) \quad F(I, V) = 0$$

אם הקשר הנ"ל איננו ליניארי, אז הרכיב אותו הוא מתאר אינו ליניארי. נשים לב בנוסף שהרכיב אותו מתאר הקשר האלגברי הנ"ל, איננו תלוי-זמן.

לדוגמא משוואת המצב של דיודת מל"מ, בה נתקלנו כבר בעבר:

$$(8.3) \quad I - I_0 \left(\exp\left(\frac{V}{V_T}\right) - 1 \right) = 0$$

צעד #1 - מציאת נקודת העבודה:



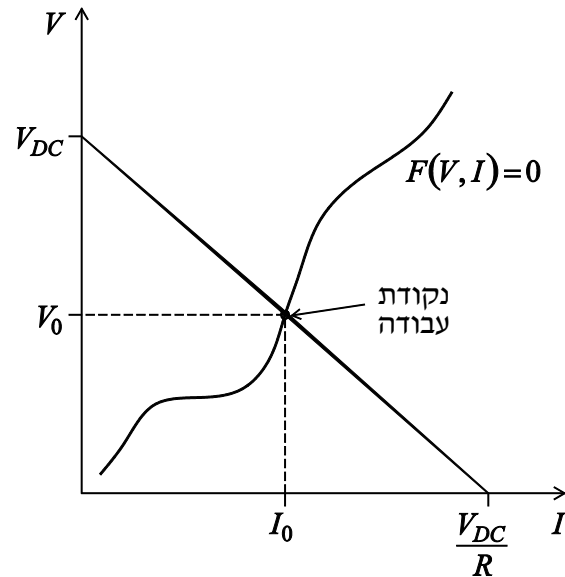
בשלב זה נתעלם מהשפעת מקור ה-AC ונחפש את פתרון המעגל.

הפעלת KVL על המעגל תיתן:

$$(8.4)$$

$$V = V_{DC} - RI$$

איור 8.1: רכיב לא ליניארי המוזן ממקור DC



השוואת הקשר הליניארי עם משוואת המצב (8.2) נותנת פתרון אותו נכנה בתור "נקודת העבודה" במעגל הלא ליניארי ונסמנו כ- (I_0, V_0) . פתרון המשוואה עשוי להיות אנליטי או נומרי לחילופין. להלן איור גרפי של הפתרון.

$$(8.5) \quad (I_0, V_0) : F(I_0, V_{DC} - R \cdot I_0) = 0$$

עקרונית יכולים להיות מספר פתרונות כאלה.

איור 8.2: חיפוש נקודת העבודה באופן גרפי

צעד #2 - ליניאריזציה סביב נקודת העבודה:

כעת, לאחר שידועה נקודת העבודה, נחזיר את מקור ה- AC הקטן, ונניח שהשפעתו גורמת לשינויים קטנים בזרם ובמתח על-פני הרכיב הלא-ליניארי, דהיינו הפתרון יהיה:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} I &= I_0 + \delta I & |\delta I| &\ll I_0 \\ V &= V_0 + \delta V & |\delta V| &\ll V_0 \end{aligned}$$

נשים לב כי בכותבנו זאת אנו מניחים כי ההשפעות של מקור ה- DC הגדול ומקור ה- AC הקטן, אדיטיביות, או לחילופין מקיימות את תנאי משפט הסופרפוזיציה. אם תנאי משפט הסופרפוזיציה הוא ליניאריות המערכת, אז ניתן לומר כי למעשה ביצענו לינאריזציה של הרכיב סביב נקודת העבודה. למעשה אנו דורשים קיום:

$$(8.7) \quad F(I_0 + \delta I, V_0 + \delta V) = 0$$

אם הסטייה מנקודת העבודה היא קטנה אז נוכל להעזר בפיתוח טילור לפונקציות בשני משתנים:

$$(8.8) \quad 0 = F(I_0 + \delta I, V_0 + \delta V) = \underbrace{F(I_0, V_0)}_{=0} + \delta I \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_{(I_0, V_0)} + \delta V \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{(I_0, V_0)} + \dots$$

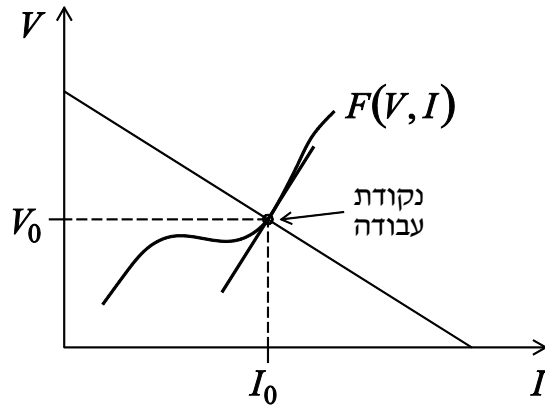
מכיוון שאנו מניחים שהסטייה כה קטנה מנקודת שיווי המשקל, אנחנו יכולים להזניח איברים מסדר שני ומעלה, ולמעשה להתחשב רק בסדר הראשון. נקודת העבודה מקיימת את משוואת המצב ולכן מתקבל:

$$(8.9) \quad 0 = \delta I \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_{(I_0, V_0)} + \delta V \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{(I_0, V_0)}$$

או לחלופין:

$$(8.10) \quad \frac{\delta V}{\delta I} = - \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_{(I_0, V_0)}}{\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{(I_0, V_0)}} \triangleq \delta R$$

הערה: זוהי תוצאת משפט הפונקציות הסתומות מלימודי החשבון הדיפרנציאלי.



איור 8.3: הגדרה גרפית של δR

הגדרנו את ההתנגדות הדיפרנציאלית δR בתור שיפוע הגרף בנקודת העבודה. בהנחה שהסטייה מנקודת העבודה מאוד קטנה, קיבלנו מודל לינארי בו אנו יכולים בקלות לפתור את המעגל.

הערה: חשוב לזכור שההתנגדות הדיפרנציאלית הינה פונקציה של נקודת העבודה - $\delta R = \delta R(I_0, V_0)$. הרכיב הלא לינארי מתנהג כמו התנגדות פשוטה בסביבת נקודת עבודה, ולכן ניתן לרשום:

$$(8.11) \quad V_{AC} = R\delta I + \delta V = (R + \delta R)\delta I$$

ומכאן חישוב הסטייה מנקודת העבודה הוא פשוט ביותר:

$$(8.12) \quad \delta I = \frac{V_{AC}}{R + \delta R} \quad \delta V = \frac{\delta R}{R + \delta R} V_{AC}$$

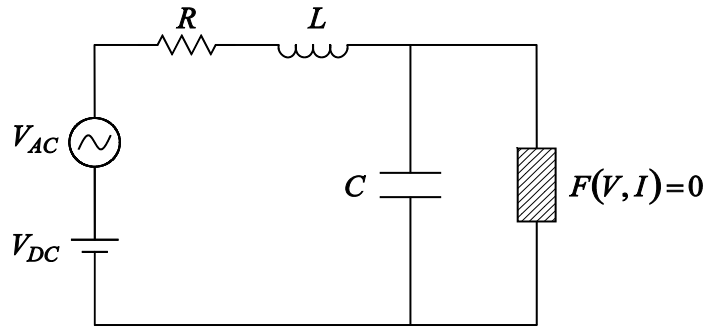
כאשר קיבלנו למעשה מחלק מתח בין שתי התנגדויות פשוטות.

הערות:

- א. מאחר וההתנגדות הדיפרנציאלית δR הינה פונקציה של נקודת העבודה, הספק ה- AC המתבזבז בה תלוי במקור ה- DC גם כן.
- ב. ניתן להשתמש באותה הגישה גם במעגלים מורכבים יותר.

תרגיל עצמי: עבור דיודה (משוואת המצב עבורה היא (8.3), צייר את התלות של הספק ה- AC הממוצע כפונקציה של מתח מקור ה- DC .

דוגמא נוספת:



איור 8.4: מעגל לא ליניארי

נתבונן במעגל באיור 8.4. הרכיב הלא-ליניארי במעגל הוא זהה לזה מהדוגמא הקודמת. בהנחת מצב מתמיד סינוסי יש לחשב את הסטייה במתח וזרם הרכיב הלא ליניארי. נתחיל ממציאת נקודת העבודה. בשלב זה עלינו להתעלם ממקור ה- AC . נזכור כי במצב DC , קבל מהווה נתק וסליל קצר. כלומר ב- DC , המעגל מתנוון לזה מהדוגמא הקודמת, ולכן נקודת העבודה בשני המעגלים זהה. נגדיר באותו האופן את ההתנגדות הדיפרנציאלית, כלומר נבצע ליניאריזציה סביב נקודת העבודה.

$$(8.13) \quad V_{AC} = I_L \left(R + j\omega L + \delta R \parallel \frac{1}{j\omega C} \right)$$

ולכן:

$$(8.14) \quad \delta I = \frac{1}{1 + (R + j\omega L) \left(\frac{1}{\delta R} + j\omega C \right)} \frac{V_{AC}}{\delta R}$$

$$\delta V = \frac{1}{1 + (R + j\omega L) \left(\frac{1}{\delta R} + j\omega C \right)} V_{AC}$$

8.3 פתרון באמצעות שיטת הפרעות - סטייה מליניאריות של רכיב אוהמי

קבוצה נוספת של מעגלים לא ליניאריים היא כזו שבה קיים מקור יחיד אך קיים רכיב אחד או יותר אשר מתנהג כרכיב ליניארי עבור אותות קטנים וכרכיב לא ליניארי עבור אותות גדולים. נבחן נושא זה על-ידי פתרון הדוגמא הבאה.

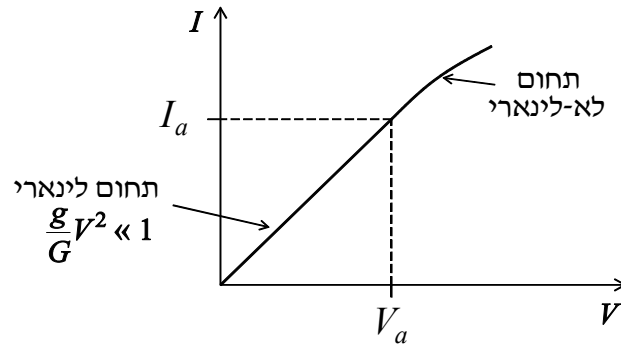
נתון עומס לא ליניארי בעל האופיין הבא:

$$(8.15) \quad I = GV - gV^3 = GV \left(1 - \frac{g}{G} V^2 \right)$$

נניח עתה מעגל המורכב ממקור (V_S) , נגד ליניארי

(R) והרכיב הלא ליניארי המתואר במשוואה (8.15)

ראה איור 8.5. נרשום את הפתרון בתחום הליניארי:



איור 8.5: אופיין מתח-זרם עבור רכיב לא ליניארי

$$(8.16) \quad V_S(t) = V_R + V_L = RI + V = RG V \left(1 - \frac{g}{G} V^2 \right) + V$$

כלומר,

$$(8.17) \quad V_0(t) = \frac{V_S(t)}{1+RG} \quad I_0(t) = \frac{G}{1+RG} V_S(t)$$

כעת נתייחס למרכיב הלא ליניארי בעומס, ונרשום את המשוואה שעלינו לפתור:

$$(8.18) \quad V_S(t) = R(GV - gV^3) + V = (1+RG)V - RgV^3$$

נגדיר את הגדלים המנורמלים הבאים:

$$(8.19) \quad u \equiv \frac{V}{V_a} \quad u_S \equiv \frac{V_S}{V_a} \quad \xi \equiv RgV_a^2$$

נשים לב כי V_a מוגדר כך ש- $1 + RG \ll \xi$ כלומר הסטיה מהליניאריות היא קטנה. נציב את ההגדרות חזרה לתוך המשוואה (8.18) ונקבל משוואה פשוטה יותר, חסרת יחידות:

$$(8.20) \quad u_S = (1 + RG)u - \xi u^3$$

כעת, ננחש פתרון בצורת טור חזקות של הסטייה מהליניאריות $\xi \ll 1$:

$$(8.21) \quad u(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t)$$

בצורה כזו נוכל לבחור ולקרב את הפתרון לאיזה סדר שנרצה, כתלות בסטייה מהליניאריות. נציב צורת פתרון זו ב- (8.20) ונקבל:

$$(8.22) \quad \begin{aligned} u_S(t) &= (1 + RG) \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t) - \xi \left[\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t) \right]^3 = \\ &= (1 + RG) \left[\xi^0 X_0(t) + \xi^1 X_1(t) + \xi^2 X_2(t) + \dots \right] \\ &\quad - \xi \underbrace{\left[\xi^0 X_0(t) + \xi^1 X_1(t) + \xi^2 X_2(t) + \dots \right]^3}_{(\xi^0 X_0)^3 + 3(\xi^0 X_0)^2(\xi^1 X_1) + 3(\xi^0 X_0)(\xi^1 X_1)^2 + \dots} \end{aligned}$$

נקבץ איברים לפי חזקות הסטיה,

$$(8.23) \quad 0 = \xi^0 [-u_S + (1+RG)X_0] + \xi^1 [(1+RG)X_1 - X_0^3] + \xi^2 [(1+RG)X_2 - 3X_0^2X_1] + \dots$$

לפי השוואת מקדמים נקבל סדרת משוואות:

$$(8.24) \quad \begin{cases} X_0(t) = \frac{1}{1+RG} u_S(t) \\ X_1(t) = \frac{X_0^3(t)}{1+RG} = \frac{1}{(1+RG)^4} u_S^3(t) \\ X_2(t) = \frac{3X_0^2(t)X_1(t)}{1+RG} = \frac{3}{(1+RG)^7} u_S^5(t) \\ \dots \end{cases}$$

רישום מפורש של הפתרון יהיה:

$$(8.25) \quad u(t) = \xi^0 X_0 + \xi^1 X_1 + \xi^2 X_2 + \dots = \frac{u_S(t)}{1+RG} + \xi \frac{u_S^3(t)}{(1+RG)^4} + \xi^2 \frac{3u_S^5(t)}{(1+RG)^7} + \dots$$

אם נציב כעת את ההגדרות ל- u, u_S, ξ (8.19), נקבל את הפתרון המפורש:

$$(8.26) \quad V(t) = \frac{V_s(t)}{1+RG} + Rg \frac{V_s^3(t)}{(1+RG)^4} + 3(Rg)^2 \frac{V_s^5(t)}{(1+RG)^7} + \dots =$$

$$= \frac{V_s}{1+RG} \left[1 + Rg \frac{V_s^2(t)}{(1+RG)^3} + 3(Rg)^2 \frac{V_s^4(t)}{(1+RG)^6} + \dots \right]$$

נבדוק כעת מהו הקריטריון ל- V_a על-מנת שהפתרון הליניארי יהיה דומיננטי.

$$(8.27) \quad \frac{Rg(V_s^2)_{MAX}}{(1+RG)^3} \ll 1$$

כערך אופייני ל- V_C , נקבע:

$$(8.28) \quad \frac{RgV_a^2}{(1+RG)^3} = 0.01 \Rightarrow V_a = \sqrt{\frac{0.01(1+RG)^3}{Rg}}$$

הערות:

א. אם המערכת נמצאת בתחום הליניארי ו- $V_s = V_{S0} \cos(\omega_0 t)$, אזי $V(t) \propto V_s(t)$ והתדרים

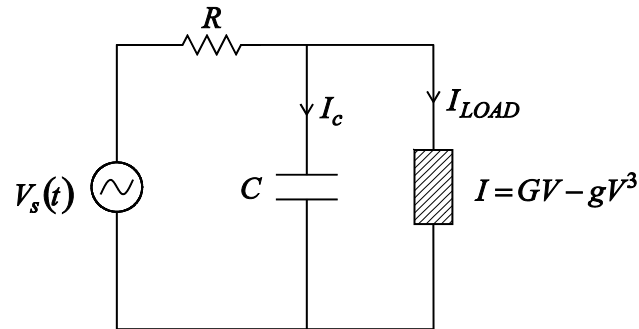
האופייניים במעגל יקבעו על-ידי $V_s(t)$, כלומר, ω_0 .

ב. אם האמפליטודה V_{S0} היא כזו שאנו "יוצאים" מהתחום הליניארי, אזי נוצרים תדרים אופייניים

נוספים... $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$.

8.4 סטיה מליניאריות במעגלים לא ליניאריים עם רכיבים ריאקטיביים

כעת נציג דוגמא של מעגל לא ליניארי המכיל רכיב ריאקטיבי פשוט, קבל. על-ידי הוספת רכיב ריאקטיבי למעגל, נצפה לקבל סדרה של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, במקום סדרה של משוואות אלגבריות, כפי שהתקבל במעגלים ליניאריים. נראה כי לכל המשוואות צורה זהה, ולכן ניתן יהיה לפתור את כולן בבת-אחת, על-ידי שימוש בפונקצית גרין. נפתור את הדוגמא הבאה שלב אחר שלב.



דוגמא – סטיה מליניאריות במעגל RC:

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור 8.6. המעגל מכיל רכיב לא ליניארי וקבל ונגד. כמו-כן, נתון תנאי ההתחלה:

$$(8.29) \quad V_C(t=0) = 0$$

נפתח את המשוואה הדיפרנציאלית:

איור 8.6: מעגל RC המחובר לרכיב לא ליניארי

$$(8.30) \quad V_S(t) = R(I_C + I_{LOAD}) + V_C = R \left[C \frac{dV_C(t)}{dt} + GV_C(t) - gV_C^3(t) \right] + V_C(t)$$

או בצורה אחרת:

$$(8.31) \quad \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{RC} \right) V_C(t) = \frac{1}{RC} V_S(t) + \frac{gR}{RC} V_C^3(t)$$

נגדיר את הגדלים המנורמלים הבאים :

$$(8.32) \quad \tau = RC \quad u(t) = \frac{V_C(t)}{V_a} \quad \xi = gRV_a^2 \quad u_S(t) = \frac{V_S(t)}{V_a}$$

V_a הוא קבוע נרמול אשר מיועד לסייע לנו לעבוד בגדלים חסרי יחידות. נציב במשוואה הדיפרנציאלית ונקבל :

$$(8.33) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau} \right) u(t) = \frac{1}{\tau} u_S(t) + \frac{\xi}{\tau} u^3(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

נניח כי $\xi < 1$ ונציע פתרון מהצורה :

$$(8.34) \quad u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t)$$

נציב פתרון זה אל תוך המשוואה הדיפרנציאלית :

$$(8.35) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t) &= \frac{1}{\tau} u_S(t) + \frac{\xi}{\tau} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t) \right)^3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \left[\left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau} \right) X_n(t) - \frac{1}{\tau} u_S(t) \delta_{n,0} \right] &= \frac{\xi}{\tau} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t) \right)^3 \end{aligned}$$

כאשר,

$$(8.36) \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

היא פונקצית הדלתא של קרוניקר. נפתח את האגף הימני במשוואה:

$$(8.37) \quad \begin{aligned} \frac{\xi}{\tau} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t) \right)^3 &= \frac{\xi}{\tau} (\xi^0 X_0 + \xi^1 X_1 + \dots)^3 = \frac{\xi}{\tau} \left[(\xi^0 X_0)^3 + 3(\xi^0 X_0)^2 (\xi^1 X_1)^1 + \dots \right] = \\ &= \xi^0 (0) + \xi^1 \left(\frac{1}{\tau} X_0^3 \right) + \xi^2 \left(\frac{3}{\tau} X_0^2 X_1 \right) + \dots \end{aligned}$$

המשוואה מתקיימת לכל t ולכן נוכל לערוך השוואת מקדמים לחזקות של מקדם הפיתוח. נקבל סדרה של משוואות דיפרנציאליות:

$$(8.38) \quad \begin{cases} \xi^0 : & \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau} \right) X_0(t) = \frac{1}{\tau} u_s(t) \\ \xi^1 : & \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau} \right) X_1(t) = \frac{1}{\tau} X_0^3(t) \\ \xi^2 : & \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau} \right) X_2(t) = \frac{1}{\tau} X_0^2(t) X_1(t) \end{cases}$$

נתרגם את תנאי ההתחלה לתנאי על סדרי התיקון השונים - $X_n(t)$:

$$(8.39) \quad u(t=0) = \sum_n X_n(t=0)\xi^n = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ : X_n(t=0) = 0$$

כלומר קיבלנו לכל סדר תיקון משוואה דיפרנציאלית התלויה בסדר התיקון הקודם, עם תנאי התחלה אפס. כל שנותר לעשות הוא לפתור את המשוואות לפי הסדר. נרשום את פונקציית גרין עבור משוואה מסדר ראשון:

$$(8.40) \quad G(t|t') = u(t-t') \exp\left[-\frac{(t-t')}{\tau}(1+RG)\right]$$

$$(8.41) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau}\right) X_0(t) = \frac{1}{\tau} u_s(t) \\ X_0(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t') \frac{u_s(t')}{\tau} dt'$$

מכאן לתיקון מסדר ראשון:

$$(8.42) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \frac{1+RG}{\tau}\right) X_1(t) = \frac{1}{\tau} X_0^3(t) \\ X_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t') \frac{X_0^3(t')}{\tau} dt'$$

וכך, בצורה זו עוברים בפתרון מסדר לסדר, ובסופו של דבר מסכמים:

$$(8.43) \quad u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_n(t)$$

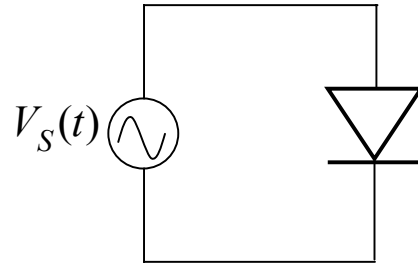
נוכל כעת להציב חזרה את הגדלים שהגדרנו, על מנת לקבל ביטוי מפורש למתח על פני הקבל:

$$(8.44) \quad V_C(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t') V_S(t') dt' + \frac{Rg}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t|t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'' G(t'|t'') V_S(t'') \right]^3 + \dots$$

הערה: שים-לב, במקרה זה קיימת הרחבה רציפה של הספקטרום.

8.5 שיקולי אנרגיה במעגל לא ליניארי

במעגלים הלא ליניאריים הפשוטים אשר בחנו עד כה ראינו שגם אם מעוררים את המעגל בתדר בודד, מתפתחים תדרים נוספים. האם בעקבות עובדה זו חל כל שינוי על שיקולי האנרגיה במעגל? על-מנת לענות על השאלה הזו נתמקד לשם פשטות בדיודת מל"מ אשר מחוברת אל מקור מתח המשתנה הרמונית בזמן כפי שמתואר באיור 8.7.



איור 8.7: דיודת מל"מ מחוברת במקביל למקור מתח הרמוני

עירור מקור המתח הינו מהצורה

$$(8.45) \quad V_S(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

הזרם בדיודת המל"מ (J) והמתח על פניה (V) מקיימים את הקשר

$$(8.46) \quad J = J_a \left[e^{V/V_a} - 1 \right] = J_a \left[e^{V_0 \cos(\omega t)/V_a} - 1 \right]$$

על-מנת לבחון את השפעת התדרים הנוספים אשר מתעוררים במעגל כזה עקב נוכחות רכיב לא ליניארי ננצל את הגדרת הפונקציה היוצרת של פונקציות בסל (*Modified Bessel Function*) באופן הבא:

$$(8.47) \quad e^{z \cos \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(z) \cos(k\theta)$$

כאשר $I_k(z)$ הינה פונקציה בסל מסדר k . בהתאם לרישום ב- 8.47 ניתן לשכתב את 8.46 בצורה הבאה:

$$(8.48) \quad J = J_a \left[I_0 \left(\frac{V_0}{V_a} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \cos(k\omega t) - 1 \right]$$

משמעות התוצאה האחרונה היא שאמנם עוררנו את המעגל בתדר בודד, אך מתעוררים "אינסוף" תדרים. אף על-פי כן במקרה הזה, רק התדר הראשון גורם לבזבוז אנרגיה. נמחיש את זה בחישוב הבא:

$$(8.49) \quad P(t) = V_S(t)J(t) = J_a V_0 \cos(\omega t) \left[I_0 \left(\frac{V_0}{V_a} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \cos(k\omega t) - 1 \right]$$

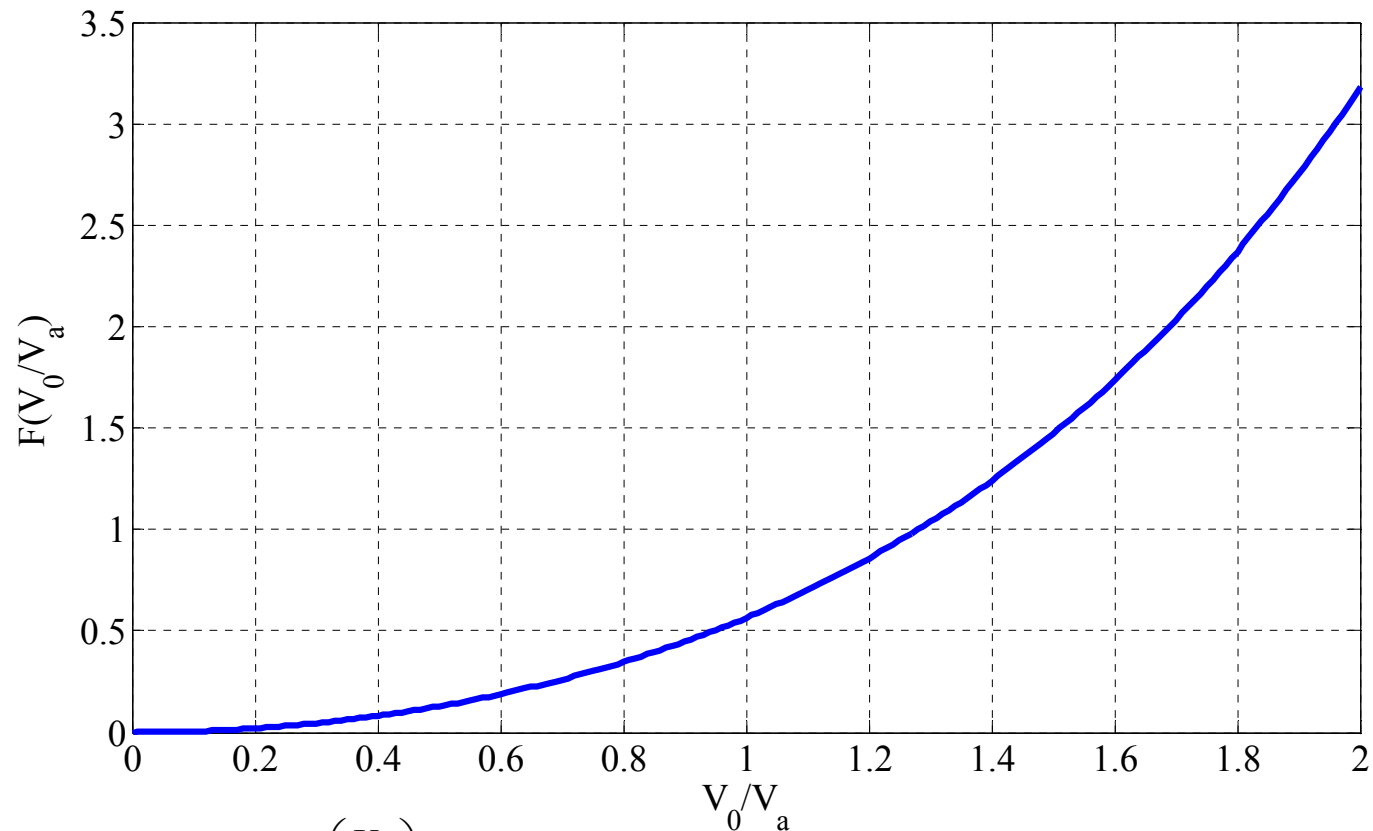
לכן, האנרגיה המתבזבת במחזור אחד $T = 2\pi/\omega$ הינה

$$(8.50) \quad \begin{aligned} W &= \int_0^T dt P(t) = J_a V_0 \int_0^T dt \cos(\omega t) \left[I_0 \left(\frac{V_0}{V_a} \right) - 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \cos(k\omega t) \right] \\ &= 2J_a V_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \int_0^T dt \cos(\omega t) \cos(k\omega t) = 2J_a V_0 I_1 \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \frac{T}{2} \end{aligned}$$

זאת אומרת, רק האיבר שמתאים $k=1$ תורם לאנרגיה שמתבזבת

$$(8.51) \quad W = J_a V_a T \left[\frac{V_0}{V_a} I_1 \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \right] \equiv J_a V_a T \left[F \left(\frac{V_0}{V_a} \right) \right]$$

באיור 8.8 מתוארת התנהגות אופיינית של הפונקציה $F \left(\frac{V_0}{V_a} \right)$.

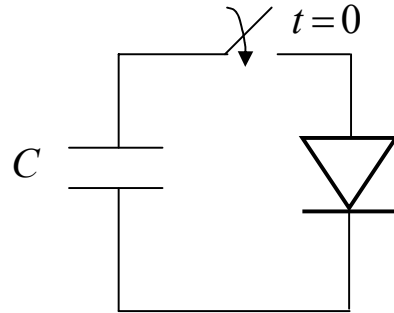


איור 8.8: התנהגות אופיינית של הפונקציה $F \left(\frac{V_0}{V_a} \right)$

8.6 תופעת מעבר במעגל לא ליניארי

בדרך כלל פתרון אנליטי של תופעות מעבר במעגלים לא ליניאריים הינה משימה לא קלה אך, קיימים מקרים מאוד מסוימים שניתן לפתור גם תופעות מעבר במעגלים לא ליניאריים. המקרה שנדון בסעיף זה ימחיש פתרון כזה.

יהי נתון מעגל המורכב מקבל ליניארי ודיודת מל"מ המחוברים במקביל על-ידי סגירת מפסק ברגע הזמן $t = 0$. המעגל מתואר באיור 8.9 להלן:



איור 8.9: דיודת מל"מ בחיבור מקבילי לקבל טעון

אנו מניחים שהקבל היה טעון למתח V_0 ברגע הזמן $t = 0$. יש לנתח את תופעת המעבר החל מרגע הזמן $t = 0$.

על-מנת לפתור את בעיית תופעת המעבר נעזר בחוק קירכהוף למתחים ובמשוואות המצב עבור דיודת המל"מ ועבור הקבל ונקבל:

$$(8.52) \quad I = I_a \left(e^{V/V_a} - 1 \right) = I_a \left(e^{V_C/V_a} - 1 \right) = -C \frac{dV_C}{dt}$$

לפיכך, משוואת המעגל הינה:

$$(8.53) \quad \begin{cases} \frac{dV_C}{dt} = -\frac{I_a}{C} \left(e^{V_C/V_a} - 1 \right) \\ V_C(t) = V_0 \end{cases}$$

לשם פתרון המשוואה נוח להגדיר את הגדלים המנורמלים הבאים:

$$(8.54) \quad u_0 \equiv \frac{V_0}{V_a}; \quad u \equiv \frac{V_C}{V_a}; \quad \tau \equiv t \frac{I_a}{CV_a}$$

ואז המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל תקבל את הצורה הבאה:

$$(8.55) \quad \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = 1 - e^u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

את המשוואה הדיפרנציאלית ניתן לפתור אנליטית כדלקמן:

$$(8.55) \quad \frac{du}{e^u - 1} = -d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{due^{-u}}{1 - e^{-u}} = -d\tau$$

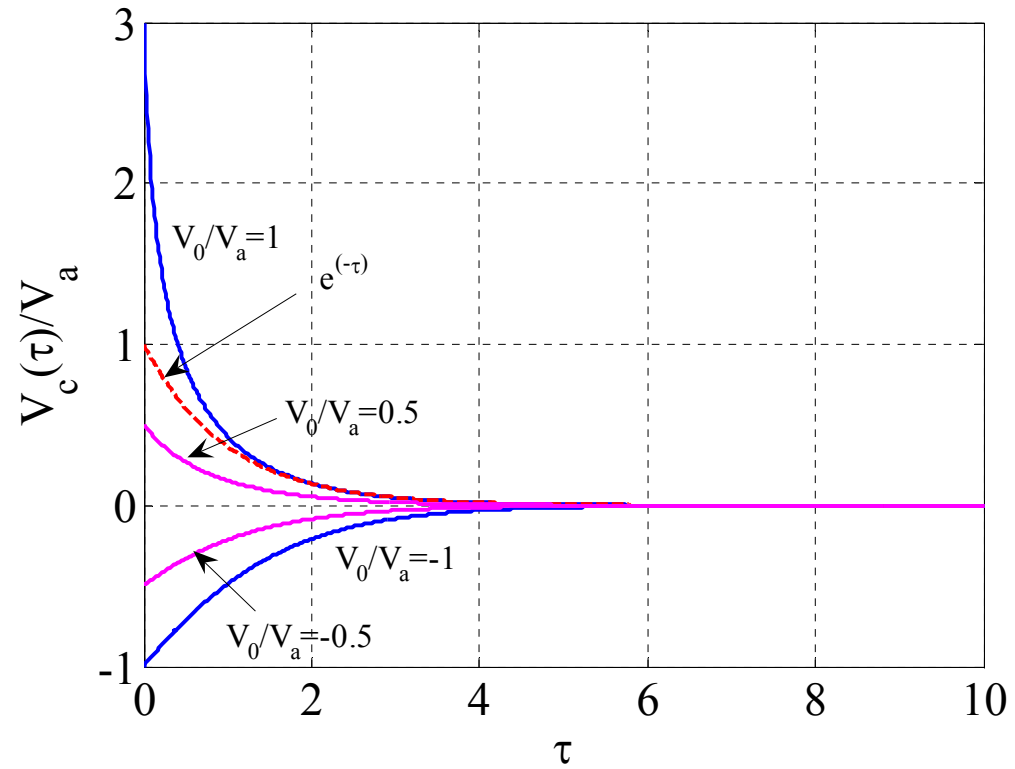
פתרון המשוואה הנ"ל הינו מהצורה:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \ln(1 - e^{-u}) - \ln(1 - e^{-u_0}) = -\tau \\
 (8.56) \quad &\Rightarrow \ln\left(\frac{1 - e^{-u}}{1 - e^{-u_0}}\right) = -\tau \\
 &\Rightarrow 1 - e^{-u} = (1 - e^{-u_0})e^{-\tau}
 \end{aligned}$$

ובאופן מפורש מתח הקבל ניתן על-ידי הביטוי:

$$(8.57) \quad \frac{V_C(t)}{V_a} = \ln \left[\frac{1}{1 - e^{-\frac{tI_a}{CV_a} \left(1 - e^{-\frac{V_0}{V_a}}\right)}} \right]$$

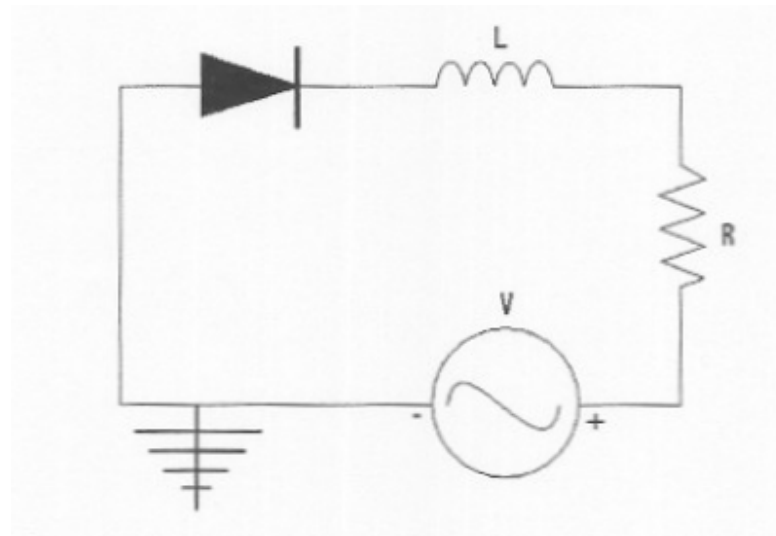
באיור 8.10 מתוארת התנהגות אופיינית של מתח הקבל המנורמל. שים-לב להבחנה בין שני המקרים $\frac{V_0}{V_a} > 0$ ו- $\frac{V_0}{V_a} < 0$ בנוסף יש לשים-לב שאין תנודות בעת דעיכת מתח הקבל והדעיכה אינה דעיכה מעריכית.



איור 8.9: ההתנהגות הזמנית של מתח הקבל המנורמל

8.7 כאוס במעגל לא ליניארי

במעגל ליניארי מסדר שני המוזן על ידי מקור מחזורי בזמן, התדרים המתעוררים נקבעים אך ורק על ידי המקור. ראינו שפועל יוצא של עירור מחזורי בזמן של מעגל לא ליניארי הוא היווצרות של ספקטרום רחב של תדרים. במצבים מסוימים קיימת חוקיות כללית בין התדרים האופניים והאמפליטודה של המקור. המעגל שבו נדון כולל נגד, סליל ודיודה¹ כמתואר



¹ Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator - Physical Review Letters 48, 714 (1982)

הדיודה הינה הרכיב הלא ליניארי מתנהג כך:

- עבור מטען חיובי הוא יהיה קבל C_1 המחובר בטור למקור מתח E_0
- עבור מטען שלילי הוא יהיה קבל C_2 המחובר בטור למקור מתח E_0
- עבור מטען 0 הוא יהיה מקור מתח E_0

לכן אופיין המטען מתח:

$$V = \begin{cases} \frac{q}{C_1} + E_0 & q \geq 0 \\ \frac{q}{C_2} + E_0 & q \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow q = \begin{cases} C_1(V - E_0) & V \geq E_0 \\ C_2(V - E_0) & V \leq E_0 \end{cases}$$

דרך שימושית לכתיבת אופיין הרכיב היא $V = \frac{C_2 - C_1}{2C_1C_2}|q| + \frac{C_1 + C_2}{2C_1C_2}q + E_0$

נשים לב כי הרכיב הלא ליניארי שבחרנו לניתוח הוא פשוט קבל בעל קיבול קבוע C_1 עבור מטען חיובי וקיבול C_2 עבור מטען שלילי.

על סמך חוקי קירכוף המשוואה הדיפרנציאלית תיכתב

$$L\dot{I} + RI + V = V_S$$

נביע את המשוואה בעזרת המטען, q :

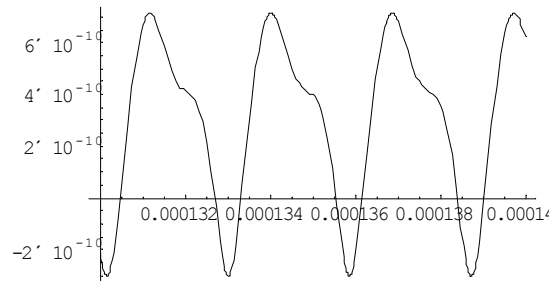
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{C_2 - C_1}{2C_1C_2}|q| + \frac{C_1 + C_2}{2C_1C_2}q + E_0 = V_S$$

מקור ה-AC נתון על ידי $V_S = V_0 \sin(2\pi f t)$ כאשר V_0 מסמל את האמפליטודה של המקור.

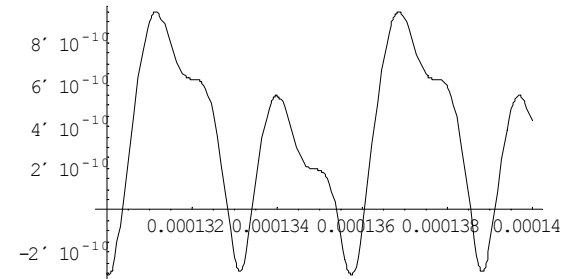
את המשוואה האחרונה ניתן לפתור רק נומרית כמוצג עבור כמה ערכים של V_0

$C_1 = 10[pF]$
 $C_2 = 0.4[nF]$
 $R = 60[\Omega]$
 $L = 100[\mu H]$
 $f = 0.7[MHz]$
 $E_0 = 0.1[V]$

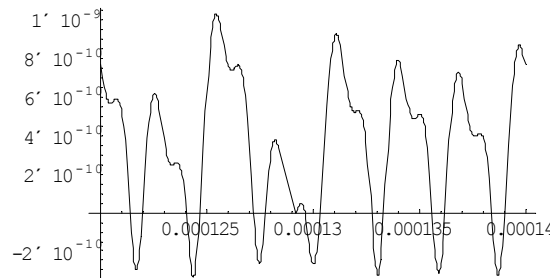
$V_0 = 0.22[V]$



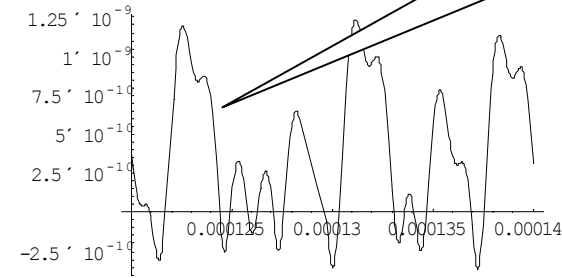
$V_0 = 0.26[V]$



$V_0 = 0.30[V]$

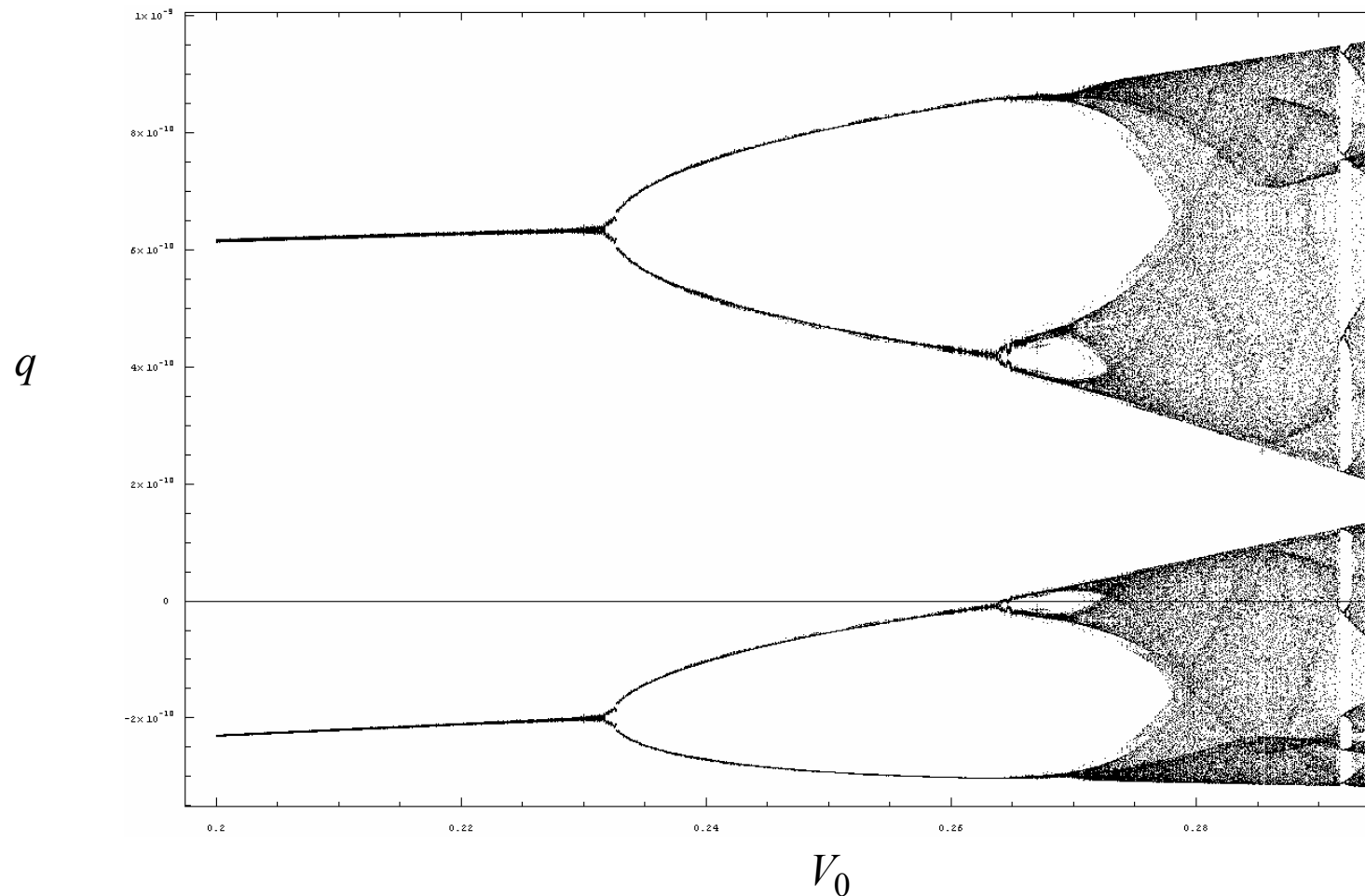


$V_0 = 0.34[V]$



שימו לב
למחזוריות

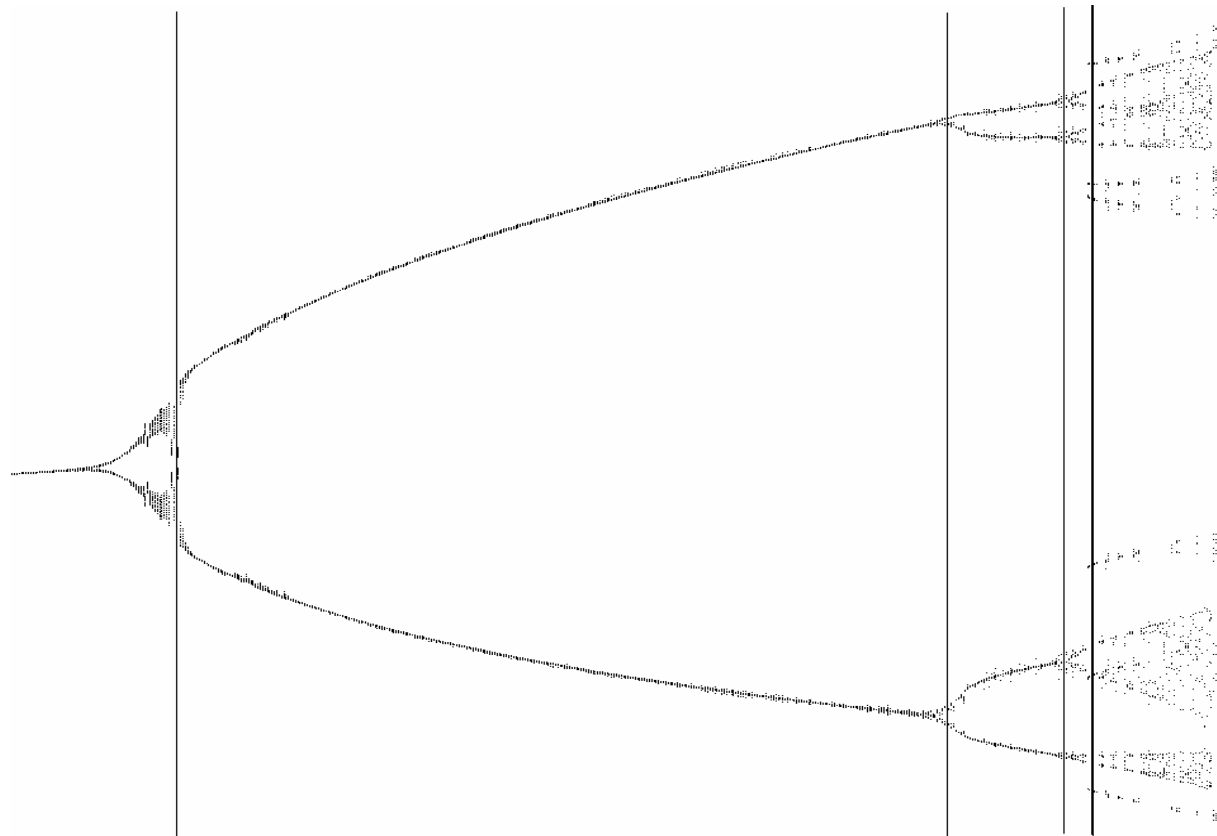
ניתן לעקוב אחר התדרים המתעוררים במערכת כפונקציה של V_0 .



• עבור ערכים קטנים של V_0 , האמפליטודה של המטען קבועה.

- עבור ערך מסוים של V_0 מתרחש פיצול וישנם שני תדרים אופניים (שווי משקל) עם שתי אמפליטודות. כאשר לא קיים שיווי המשקל המבוקש אנו מכנים את המצב כאוס.

נציג גרף נוסף מוגדל עבור $V_0 \in [1.2, 1.9]$. נשים לב לתופעת הדמיון העצמי:

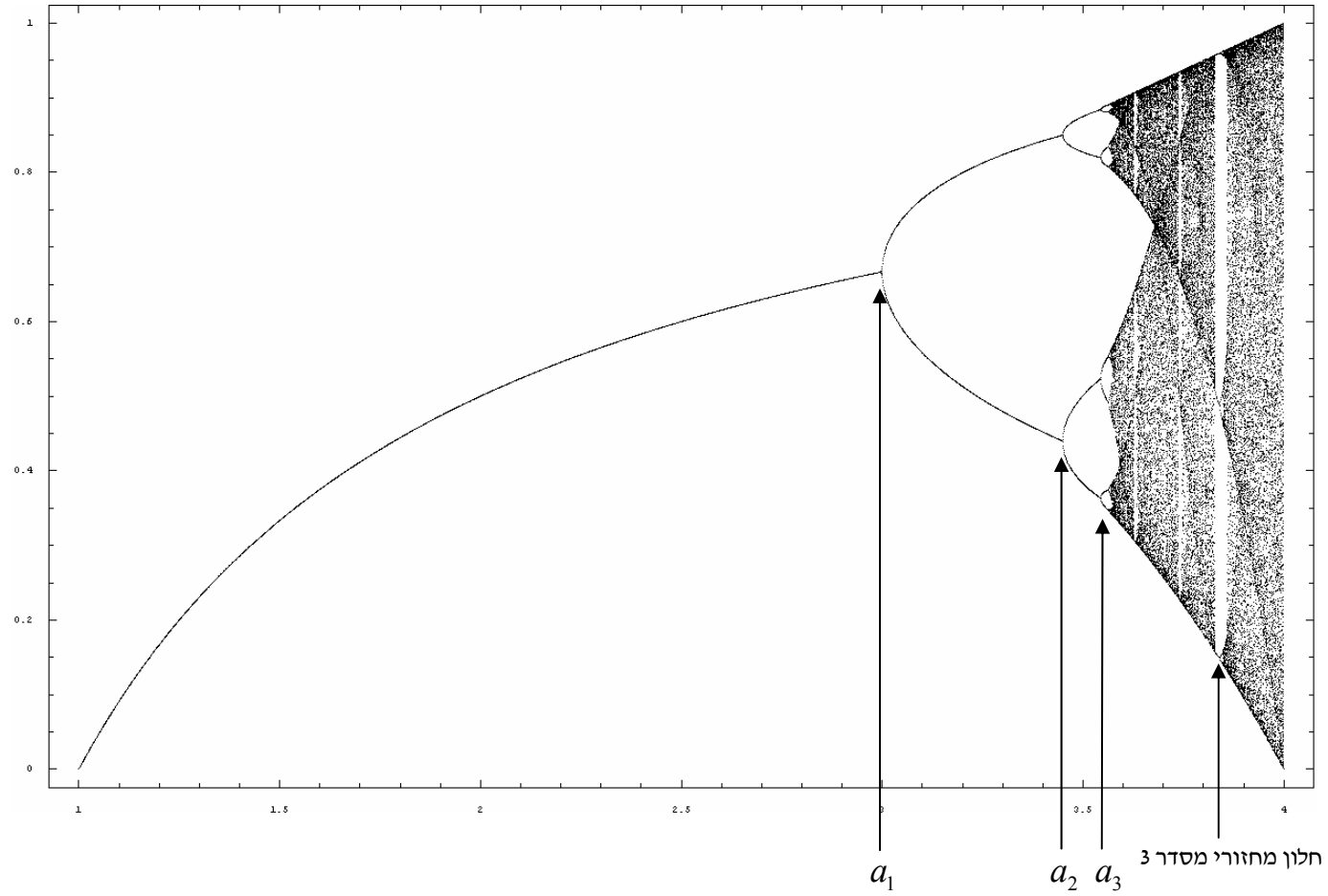


נספח א: מושגים בסיסיים בכאוס

- ההתנהגות של מערכת דינאמית לא ליניארית המגלה רגישות גבוהה לשינויים קטנים לתנאי התחלה נקראת **כאוס**.
- **המשוואה הלוגיסטית** - $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$; הניסיון לקבוע לאן מתכנסת הסדרה x_n עבור ערכים שונים של a מפיק את המפה הלוגיסטית – גרף כאוטי.
- החלונות הם חללים בגרף בהם הסדרה מתכנסת למספר ערכים סופי. הם מופיעים בין תחומי כאוס בהם הסדרה אינה מתכנסת.
- לדוגמא: החלון הגדול ביותר מתחיל ב- $a = 1 + 2\sqrt{2} = 3.828\dots$ זהו חלון עם מחזור 3 (הסדרה מתכנסת לשלושה ערכים המתקבלים אחד אחר השני במחזוריות). כל ענף בחלון עובר התפצלויות ולכן צמוד למחזור 3 ישנם מחזורים 6, 12, 24, ...

המפה הלוגיסטית – דוגמא למפת התפצלויות

גבול סדרת המספרים $\{x_n\}$ כתלות ב a

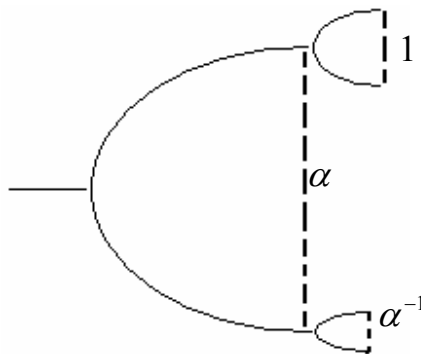


• מהתבוננות בגרף שקיבלנו, ניתן לראות כי קיימת סדרת ערכים של a $\{a_1 = 3, a_2, \dots, a_n \dots\}$ כך שלכל $a_n < a < a_{n+1}$ הסדרה מתכנסת למספר סופי של ערכים 2^n , כאשר ב $a = a_{n+1}$ ישנה התפצלות של המספר ועתה הסדרה מתכנסת ל 2^{n+1} ערכים. תהליך זה אשר אנו רואים בגרף נקרא **הכפלת מחזור**.

• אנו שמים לב שהמרחקים בין a_n לבין a_{n+1} הולכים וקטנים. ניתן להוכיח כי הסדרה הנ"ל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי אשר ערכו $a_{\infty} = 3.5699$. מעבר לגבול זה הסדרה כבר לא מחזורית ואז מתחיל **האזור הכאוטי**.

• אפשר להוכיח כי ההפרש $a_{n+1} - a_n$ קטן פי 4.669.. מההפרש $a_n - a_{n-1}$ עבור n מספיק גדול. כלומר, $\delta \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \cong 4.6692\dots$; לקבוע זה קוראים **קבוע פייגנבאום**.

• כמו כן, היחסים בין ההתפצלויות מתוארות ע"י הסכמה הבאה :



$$\alpha = 2.502$$

α נקרא **קבוע ההפחתה**.

הפרק התשיעי - תופעות צימוד

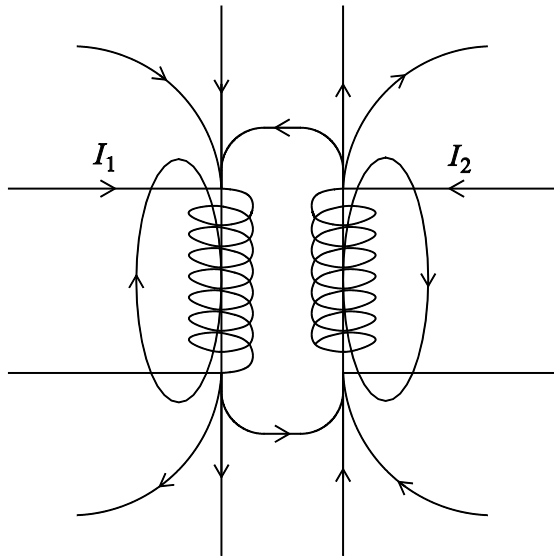
9.1 מבוא

בפרק זה נעסוק בתופעות פיזיקליות של צימוד מגנטי וחשמלי. מלימודי הפיזיקה אנו יודעים כי ניתוח התנהגות הקבל והסליל במעגל חשמלי משתלב בד בבד בניתוח פעולת השדות האלקטרומגנטיים בסביבת רכיבים אלה. עד כה הנחנו שהשפעת השדות מוגבלת לפניס רכיבים אלה, וכי לא ניתן להבחין בקיום השדות האלקטרומגנטיים בסביבת הרכיבים.

לעיתים הנחה זו אינה מספיק מדויקת. שני סלילים "קרובים" מידי יכולים לגרום לכך ששדה מגנטי המושרה באחד הסלילים ישרה בסליל השני מתח, שניתוח אידיאלי של המעגל לא היה צופה. באותו אופן שני קבלים יכולים להשרות מטען אחד על השני על-ידי שדות חשמליים "הזולגים" מקצוות הקבלים. לעיתים אף נרצה להשתמש בתופעות אלה לצרכינו. למשל כשנעסוק בשנאי אידיאלי, נניח כי כל השדה המגנטי המושרה בסליל אחד, משפיע על הסליל השני ומשרה בו זרם.

בפרק זה נלמד כיצד מנתחים תופעות צימוד. נציג בעיקר תופעות הקשורות בצימוד השראותי ובצימוד קיבולי.

9.2 צימוד השראותי



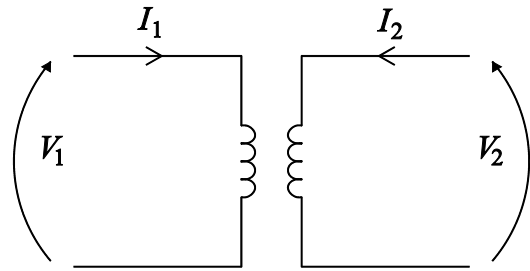
איור 9.1: זוג סלילים מצומדים

זוג סלילים נקראים מצומדים כאשר השטף הנוצר על-ידי הזרם בסליל אחד עובר בחלקו גם דרך הסליל האחר ומשרה בו מתח. באותו אופן ניתן להגדיר קבוצה גדולה יותר של סלילים מצומדים.

נתבונן באיור 9.1. אם נזרים זרם I_1 בסליל השמאלי, ייווצר שטף מגנטי, שחלקו עובר דרך הסליל הימני. באם השטף משתנה בזמן (אם I_1 הוא למשל זרם חילופין), ייווצר בסליל הימני מתח מושרה (כא"מ) V_2 לפי חוק לנץ – הסליל מתנגד לשינוי בשטף דרכו ויוצר זרם כזה המשרה שטף בכיוון המתנגד לשינוי בשטף הכולל דרך הסליל.

על-מנת להגדיל את כמות השטף שעובר דרך הסליל הימני, ניתן ללפף את שני הסלילים סביב ליבה עשויה חומר פרומגנטי. באופן זה לא תהיה כמעט זליגה של שדה מגנטי אל מחוץ לליבה. נדון בהרחבה באפשרות זו כשנעסוק בשנאי אידיאלי.

כעת, עלינו ליצור מודל מתמטי שיפשט את הבעיה ויעזור לנו לנתח באופן אנליטי מעגלים בהם ישנם זוגות של סלילים מצומדים.



באיור 9.2 מוצג זוג סלילים מצומדים. בסליל רגיל הנחנו כי השטף המגנטי דרך הסליל תלוי ליניארית בזרם דרכו. כעת בהינתן זוג סלילים מצומדים נניח כי השטף המגנטי דרך כל אחד מהסלילים תלוי ליניארית בשני הזרמים:

איור 9.2: זוג סלילים מצומדים – כיווני ייחוס

$$(9.1) \quad \left. \begin{aligned} \phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \\ \phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\phi}(t) = \underline{\underline{L}} \cdot \vec{I}(t)$$

כאשר $L_{21}I_1$ למשל הוא השטף המושרה בסליל 2, כתוצאה מהזרם בסליל 1. בנוסף:

L_{ii} – השראות עצמית של סליל i .

$L_{ij} =$ השראות הדדית (Mutual Inductance) של סליל i על סליל j .

משיקולים פיזיקליים ניתן להראות שמתקיים:

$$(9.2) \quad L_{12} = L_{21} \triangleq M$$

אך אנחנו לא נתעמק בכך בשלב זה.

על-מנת לקשר בין הזרם הזורם בסליל למתח המושרה על-פניו נזכר בחוק פרדיי – שינוי בזמן של השטף המגנטי יוצר הפרש פוטנציאלים:

$$(9.3) \quad V_i = \frac{d\phi_i}{dt}$$

לכן נוכל לרשום:

$$(9.4) \quad \vec{V}(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \vec{\phi}(t) = \underline{\underline{L}} \cdot \frac{d}{dt} \vec{I}(t) = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt}(t) \\ \frac{dI_2}{dt}(t) \end{bmatrix}$$

ובמשטר מתמיד סינוסי, נוכל להעזר ברישום פאזורי, ולקבל:

$$(9.5) \quad \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega \bar{I}_1 \\ j\omega \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

הערה לגבי ההשראות ההדדיות:

ההשראות ההדדיות, M , והשראות באופן כללי נמדדת ביחידות של *Henry*. ההשראות ההדדיות יכולה להיות חיובית או שלילית. סימנה תלוי בשני גורמים עיקריים:

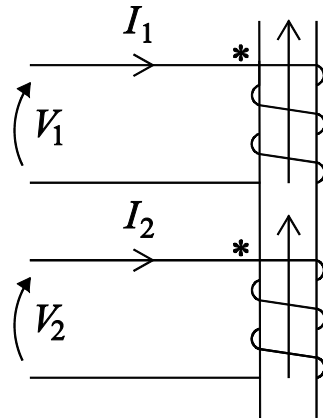
א. המבנה הפיזיקלי של הסלילים ומיקומם במערכת הפיזיקלית.

ב. בחירת כיווני הייחוס לגבי שני הסלילים המצומדים.

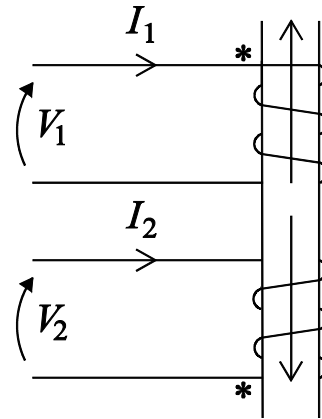
לאחר שבוחרים כיווני ייחוס לשני הזרמים I_1 ו- I_2 יש לבדוק:

א. אם I_1 ו- I_2 חיוביים והסלילים במקרה זה מייצרים שטף מגנטי באותו כיוון, אז $M > 0$.

ב. אם I_1 ו- I_2 חיוביים והסלילים במקרה זה מייצרים שטף מגנטי בכיוונים מנוגדים, אז $M < 0$.



$M > 0$



$M < 0$

איור 9.3: קביעת סימן ההשראות ההדדית

נתבונן באיור 9.3 ונגדיר את הסכום

הסימנים הבא:

הכוכב מסמל את כיוון הליפוף:

א. אם הזרם נכנס לכוכב בשני הסלילים

אז $M > 0$.

ב. אם הזרם נכנס לכוכב בסליל אחד

ויוצא בכוכב בסליל השני אז $M < 0$.

מקדם הצימוד – Coupling Coefficient

מכיוון שסליל הוא אלמנט פסיבי אשר אינו מסוגל לייצר אנרגיה, הרי שמתקיים עבורו:

$$(9.6) \quad W_L(t) \geq 0$$

כלומר:

$$(9.7) \quad W = \frac{1}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2} \underline{\underline{L}} \vec{I} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2} \vec{I}^t \underline{\underline{L}} \vec{I} \geq 0$$

או באופן מפורש:

$$(9.8) \quad W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 = \frac{1}{2} L_{11} \left(I_1 + \frac{M}{L_{11}} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) I_2^2 \geq 0$$

ביטוי זה נכון לכל ערכי הזרמים דרך הסלילים, ובפרט במקרה הפרטי בו מתקיים:

$$(9.9) \quad I_1 + \frac{M}{L_{11}} I_2 = 0$$

על מנת שיתקיים התנאי (9.6), נדרוש:

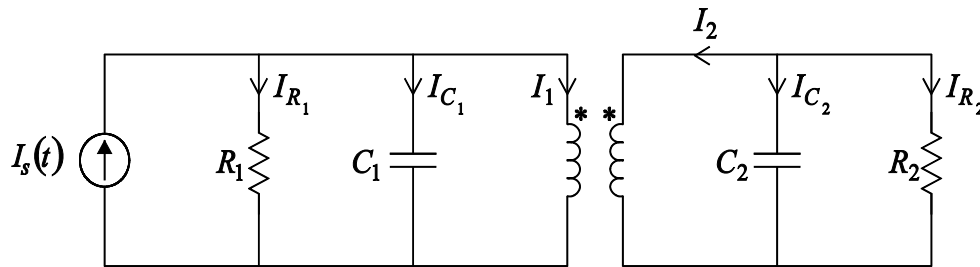
$$(9.10) \quad L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad M^2 \leq L_{11} \cdot L_{22}$$

מגדירים את מקדם הצימוד בין הסלילים:

$$(9.11) \quad K = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq K \leq 1$$

כאשר אין צימוד ("מרחק" אינסופי בין הסלילים), אז $K = 0$.

9.3 פתרון מעגל חשמלי במצב מתמיד סינוסי ובו סלילים מצומדים



נתון המעגל החשמלי המתואר באיור 9.4. המעגל מכיל זוג סלילים מצומדים. בהנחת מצב מתמיד סינוסי יש לפתור את המעגל.

נתון כי מטריצת ההשראות היא:

איור 9.4: מעגל חשמלי המכיל זוג סלילים מצומדים – מצב מתמיד סינוסי

$$(9.12) \quad \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}$$

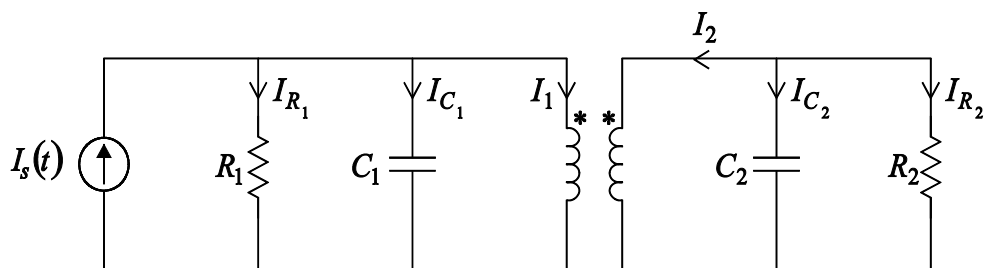
על-סמך כיווני הייחוס שהוגדרו באיור,

אנו מפרשים את הסכם סימון

הכוכבים, כך ש-

$$(9.13) \quad M > 0$$

נרשום את משוואות הצימוד:



(9.14)

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= j\omega L_{11}\bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= j\omega M\bar{I}_1 + j\omega L_{22}\bar{I}_2 \end{aligned}$$

נפעיל KCL בצמתי המעגל:

(9.15)

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_S - \bar{I}_{R1} - \bar{I}_{C1} = \bar{I}_S - \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} \right) \bar{V}_1 \\ \bar{I}_2 &= -\bar{I}_{R2} - \bar{I}_{C2} = -\left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \right) \bar{V}_2 \end{aligned}$$

הצבת (9.15) אל תוך (9.14), ורישום מחדש בכתיב מטריצי יתן:

(9.16)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 + j\omega L_{11} \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} \right) & j\omega M \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \right) \\ j\omega M \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} \right) & 1 + j\omega L_{22} \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_{11} \bar{I}_S \\ j\omega M \bar{I}_S \end{bmatrix}$$

מכאן הפתרון נובע מהיפוך המטריצה D . ניתן כעת להרחיב את הגדרת פונקציית התמסורת להיות

$$(9.17) \quad \vec{V} = \underline{\underline{D}}^{-1}(j\omega) \begin{pmatrix} j\omega L_{11} & 0 \\ 0 & j\omega M \end{pmatrix} \vec{I}_S \triangleq \underline{\underline{H}}(j\omega) \vec{I}_S$$

נזכור כי $\{\underline{\underline{H}}(j\omega)\}_{ik}$ היא פונקציה מרוכבת ועל-כן אפסיה וקטביה מבודדים.

גם במקרה של צימוד נוכל להיעזר בהגדרה של מושג **התהודה** :

$$(9.18) \quad \text{Resonance} : \{ \text{Re}(\omega) \mid \det[D(j\omega)] = 0 \}$$

דהיינו, תדר תהודה מוגדר כתדר עבורו הדיטרמיננט של המטריצה אשר פותרת את המעגל מתאפסת.

נדון כעת בשני מקרים פרטיים במעגל אותו ניתחנו :

א. מקרה בו אין צימוד, כלומר $M = 0$. במצב זה, שני חלקי המעגל לא תלויים זה בזה. נרשום מחדש את המשוואה המטריצית :

$$(9.19) \quad \begin{bmatrix} 1 + j\omega L_{11} \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} \right) & 0 \\ 0 & 1 + j\omega L_{22} \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_{11} \bar{I}_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

נחפש את תדרי התהודה :

$$(9.20) \quad \begin{aligned} D_{11} = 0 &\Rightarrow \omega_{11,\pm} \approx \pm \frac{1}{\sqrt{L_{11}C_1}} + j \frac{1}{2C_1R_1} \\ D_{22} = 0 &\Rightarrow \omega_{22,\pm} \approx \pm \frac{1}{\sqrt{L_{22}C_2}} + j \frac{1}{2C_2R_2} \end{aligned}$$

כלומר תהודת המעגל שקולה לתהודה של כל אחד מהחלקים בנפרד, בהם תדרי התהודה הם:

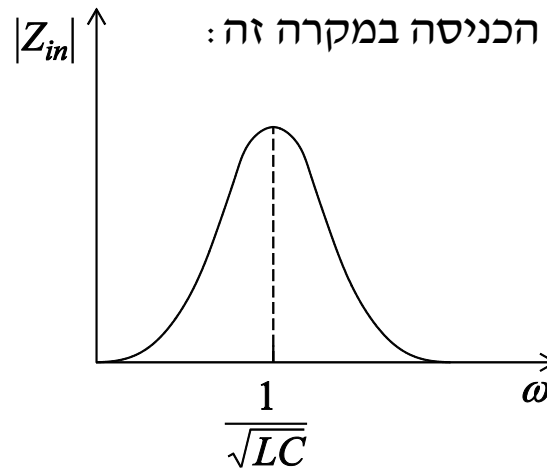
$$(9.21) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

אימפדנס הכניסה למעגל במקרה בו $L_{11} = L_{22} = L$ $R_1 = R_2 = R$ $C_1 = C_2 = C$:

$$(9.22) \quad Z_{in}(\omega) = \frac{\bar{V}_1(\omega)}{\bar{I}_s} = \frac{j\omega L}{D_{11}(\omega)} = \frac{j\omega LR}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

והוא בלתי תלוי במעגל השני.

להלן תיאור גרפי של אימפדנס הכניסה במקרה זה:



איור 9.5: אימפדנס הכניסה כפונקציה של התדר בהעדר צימוד

ב. כעת נניח כי יש צימוד, כלומר $M \neq 0$. נניח בנוסף $L_{11} = L_{22} = L$ $R_1 = R_2 = R$ $C_1 = C_2 = C$

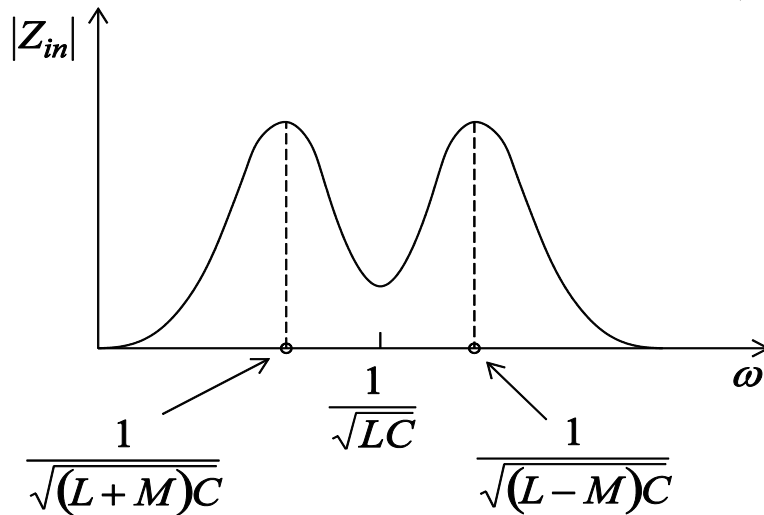
$$(9.23) \quad \begin{bmatrix} D(\omega) & j\omega M \left(j\omega C + \frac{1}{R} \right) \\ j\omega M \left(j\omega C + \frac{1}{R} \right) & D(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L \bar{I}_S \\ j\omega M \bar{I}_S \end{bmatrix}$$

נחפש את התנאי לתהודה:

$$(9.24) \quad D^2 + \omega^2 M^2 \left(j\omega C + \frac{1}{R} \right)^2 = 0 \Rightarrow D(\omega) = \pm j\omega M \left(j\omega C + \frac{1}{R} \right)$$

הפתרונות (פתור!) למשוואה זו הינם: (אלה שחלקם הממשי חיובי)

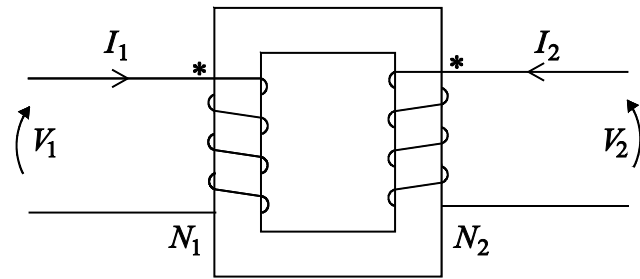
$$(9.25) \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(L \pm M)C}}$$



כלומר הוספת הצימוד מפצלת את מצב התהודה לשניים. הגרף הבא מתאר את אימפדנס הכניסה בנוכחות הצימוד.

איור 9.6: אימפדנס הכניסה כפונקציה של התדר בנוכחות צימוד

9.4 שנאי אידיאלי



מקרה מיוחד של סלילים מצומדים הינו שנאי אידיאלי כמתואר באיור 9.6 או בסכמת התמורה עבורו באיור 9.7. הליבה העוברת בין הסלילים עשויה חומר פרומגנטי.

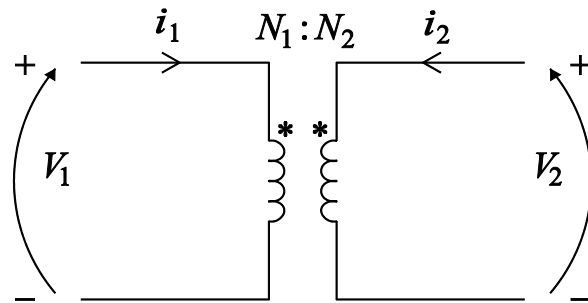
נניח כי:

איור 9.6: שנאי אידיאלי – מבנה פיזיקלי

א. אין איבוד אנרגיה לחוס.

ב. השטף המגנטי לא יוצא מהכריכה, כלומר ישנו צימוד מלא.

ג. ההשראויות העצמיות מקיימות $L_{11}, L_{22} \rightarrow \infty$.



איור 9.7: שנאי אידיאלי – סכמת תמורה

נסמן ב- ϕ את השטף המגנטי מכריכה בודדת.

אזי:

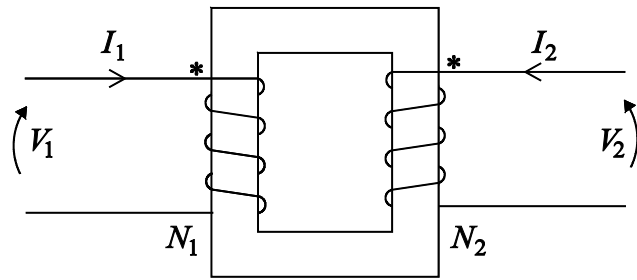
$$(9.26) \quad \Phi_1 = N_1 \phi \quad \Phi_2 = N_2 \phi$$

לכן לפי חוק פרדיי:

$$(9.27) \quad V_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad V_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

ולכן יחס המתחים בשנאי אידיאלי מקיים:

$$(9.28) \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$



מכיוון שההשראות העצמית בשנאי היא אינסופית, בהכרח סך כל השטף דרך הליבה מתאפס, אחרת הזרמים היו אינסופיים, ומצב זה אינו פיזיקאלי.

$$(9.29) \quad \Phi_{TOT} = \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \Rightarrow N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$$

לכן יחס הזרמים בשנאי אידיאלי מקיים:

$$(9.30) \quad \frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

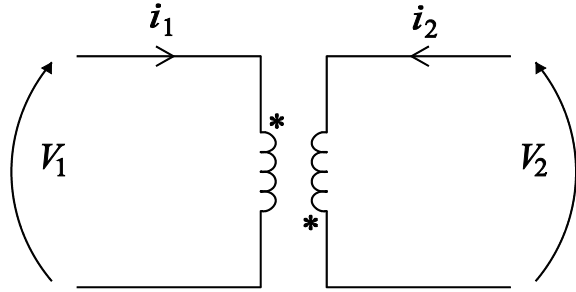
הערה #1: נבדוק כיצד מתנהג ההספק בשנאי אידיאלי:

$$(9.31) \quad P_1 = V_1 I_1 = \left(V_2 \frac{N_1}{N_2} \right) \cdot \left(-I_2 \frac{N_2}{N_1} \right) = -V_2 I_2 = -P_2 \Rightarrow P_1 + P_2 = 0$$

כלומר הנחה אי מתקיימת, האנרגיה הנכנסת לשנאי גם יוצאת ממנו.

הערה #2: נבדוק מה היחס בין אימפדנס הכניסה לאימפדנס המוצא בשנאי:

$$(9.32) \quad Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{V_2}{I_2} \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = -Z_{out} \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{Z_{in}}{Z_{out}} = -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$



הערה #3: הופכים את אחת הכריכות כך שההשראות ההדדית שלילית.

על-מנת שההשראות העצמית בשנאי תהיה אינסוף נדרוש במקרה זה:

$$(9.33) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

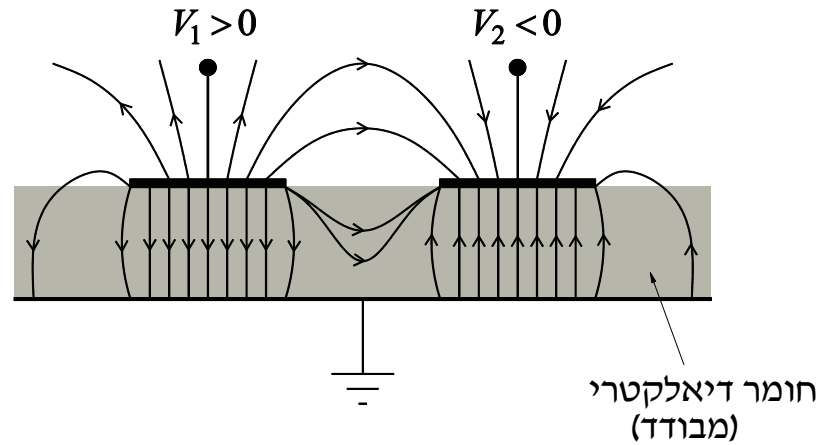
לכן היחסים הופכים להיות:

איור 9.8: שנאי אידיאלי – הפיכת כיוון אחת הכריכות

$$(9.34) \quad \frac{V_1}{V_2} = -\frac{N_1}{N_2} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

כלומר הפיכת אחת הכריכות שקולה להחלפה בכיווני הייחוס באחד הצדדים.

9.5 צימוד קיבולי



בדומה לצימוד השראותי קיים צימוד קיבולי בין לוחות חשמליים. סעיף זה אנלוגי לחלוטין לסעיף "צימוד השראותי" ונעסוק בזוג קבלים אשר ביניהם יש השפעה חשמלית הדדית, ומטען מושרה על הלוחות (איור 9.9).

איור 9.9: צימוד קיבולי – מבנה פיזיקלי

נניח כי המטען על גבי כל אחד מהלוחות ליניארי בכל אחד מהמתחים על הקבלים:

$$(9.35) \quad \begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{aligned}$$

או בצורה מטריצית:

$$(9.36) \quad \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{Q}(t) = \underline{\underline{C}} \cdot \vec{V}(t)$$

כאשר $\underline{\underline{C}}$ היא מטריצת הקיבולים.

עבור קבלים מצומדים ניתן להראות משיקולים פיזיקליים כי,

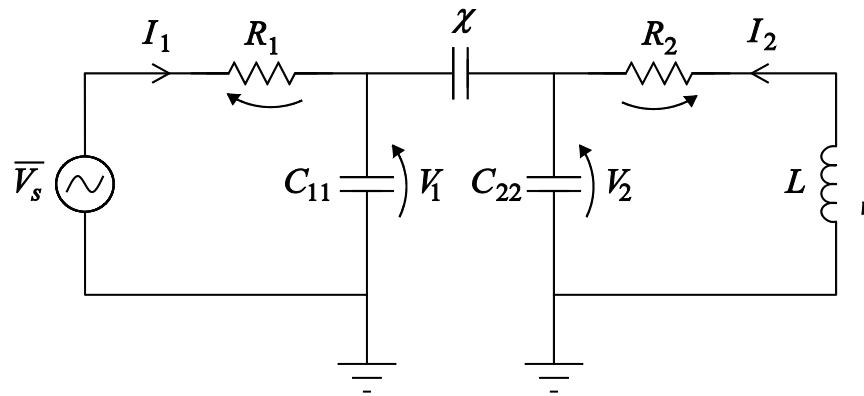
$$(9.37) \quad C_{12} = C_{21} \triangleq -\chi < 0$$

בניגוד לצימוד השראותי, בצימוד קיבולי, הקיבול ההדדי הינו **תמיד שלילי**.
 במשטר מתמיד סינוסי נרשום:

$$(9.38) \quad \vec{I}(t) = \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} = j\omega \underline{\underline{C}} \cdot \vec{V}(t) = \begin{bmatrix} j\omega C_{11} & -j\omega\chi \\ -j\omega\chi & j\omega C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

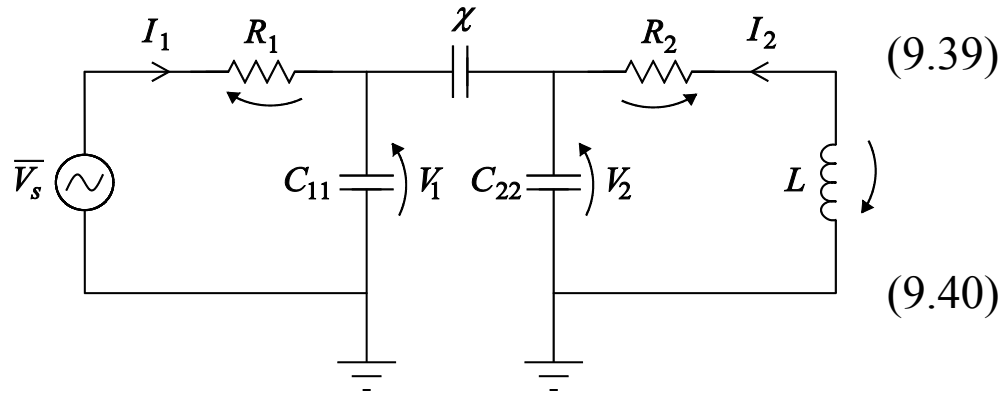
דוגמא #1: מעגל חשמלי המורכב מקבלים מצומדים

נתון מעגל חשמלי כמתואר באיור 9.10. המעגל מכיל זוג קבלים מצומדים, בהנחת מצב מתמיד סינוסי יש לפתור את המעגל.



איור 9.10: מעגל דוגמא המכיל זוג קבלים מצומדים

משוואות הצימוד



$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= j\omega C_{11}\bar{V}_1 - j\omega\chi\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= -j\omega\chi\bar{V}_1 + j\omega C_{22}\bar{V}_2 \end{aligned}$$

נפעיל KVL במעגל:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_S - \bar{I}_1 R_1 \\ \bar{V}_2 &= -\bar{I}_2 (R_2 + j\omega L) \end{aligned}$$

הצבת (9.40) ב-(9.39), ורישום מחדש בצורה מטריצית ייתן,

$$(9.41) \quad \begin{bmatrix} 1 + j\omega C_{11}R_1 & -j\omega\chi(R_2 + j\omega L) \\ -j\omega\chi R_1 & 1 + j\omega C_{22}(R_2 + j\omega L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega C_{11}\bar{V}_S \\ -j\omega\chi\bar{V}_S \end{bmatrix}$$

נסמן את המטריצה ב- $\underline{\underline{D}}(j\omega)$.

התנאי לתהודה הוא באופן אנלוגי,

$$(9.42) \quad \det[\underline{\underline{D}}(j\omega)] = 0$$

א. אין צימוד, $\chi = 0$. נרשום מחדש את המשוואה המטריצית:

$$(9.43) \quad \begin{bmatrix} 1 + j\omega C_{11}R_1 & 0 \\ 0 & 1 + j\omega C_{22}(R_2 + j\omega L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega C_{11}\bar{V}_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

קיבלנו כצפוי מטריצה אלכסונית, ולכן תהודת המעגל שקולה לתהודה בכל אחד מחלקי המעגל בנפרד, מכיוון שאינם קשורים זה לזה.

ב. באופן כללי $\chi \neq 0$. בהנחה שהמעגל אינו בתהודה:

$$(9.44) \quad \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + j\omega C_{22}(R_2 + j\omega L) & j\omega\chi(R_2 + j\omega L) \\ j\omega\chi R_1 & 1 + j\omega C_{11}R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega C_{11}\bar{V}_S \\ -j\omega\chi\bar{V}_S \end{bmatrix}$$

כאשר מתקיים:

$$(9.45) \quad \Delta = \det(D) = (1 + j\omega C_{11}R_1)[1 + j\omega C_{22}(R_2 + j\omega L)] + \omega^2 \chi^2 R_1 (R_2 + j\omega L)$$

נניח כעת בנוסף:

$$(9.46) \quad C_{11} = C_{22} = C \quad L = 0 \quad R_1 = 0 \quad R_2 = R$$

נקבל (בדוק!),

$$(9.47) \quad \bar{I}_2 = -\frac{j\omega\chi}{1 + j\omega RC} \bar{V}_S$$

ההספק על הנגד R_2 הוא:

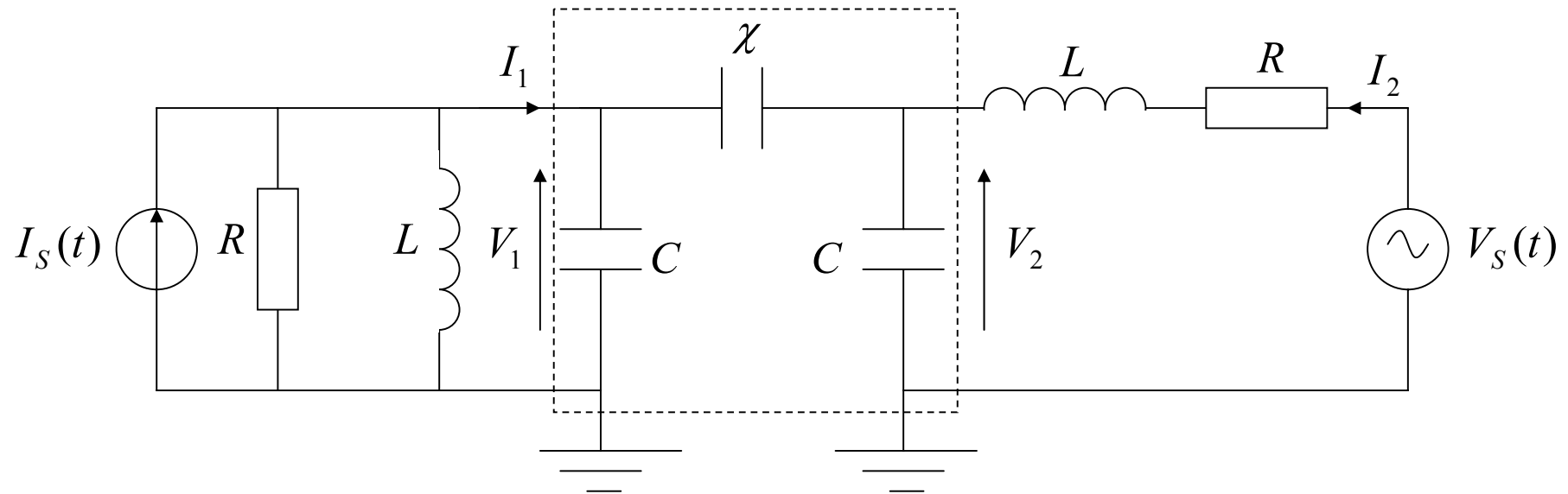
$$(9.48) \quad \bar{P}_2 = \frac{1}{2} |\bar{I}_2|^2 R_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \chi^2 R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} |\bar{V}_S|^2$$

ניתן להיווכח כעת כי כאשר אין צימוד בין שני חלקי המעגל, $\chi = 0$, אין מעבר אנרגיה מצד אחד לשני ולכן:

$$(9.49) \quad \bar{P}_2 = 0$$

דוגמא #2: צימוד קיבולי בין שני מעגלי RLC בתהודה

נתון המעגל החשמלי המתואר באיור הבא:



איור 9.11: צימוד קיבולי בין שני מעגלי RLC

נתון ש-

- המעגל מוזן משני צידיו במקורות המשתנים הרמונית בזמן מהצורה הבאה:

$$(9.50) \quad I_S(t) = I_0 \cos(\omega t); \quad V_S(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

- בהנחת מצב מתמיד סינוסי קבלי הצימוד מקיימים את הקשרים הבאים:

(9.51)

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= j\omega C\bar{V}_1 - j\omega\chi\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= -j\omega\chi\bar{V}_1 + j\omega C\bar{V}_2 \end{aligned}$$

בהנחת מצב מתמיד סינוסי :

שלב א': נגדיר את המשוואות עבור המתחים \bar{V}_1 ו- \bar{V}_2 , ונביא את המשוואות לרישום מטריצי.

שלב ב': נתייחס באופן מפורש לתנאי התהודה במעגל הנייל.

שלב ג': בהנחה ש- $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, נחשב באופן מפורש את המתחים \bar{V}_1 ו- \bar{V}_2 .

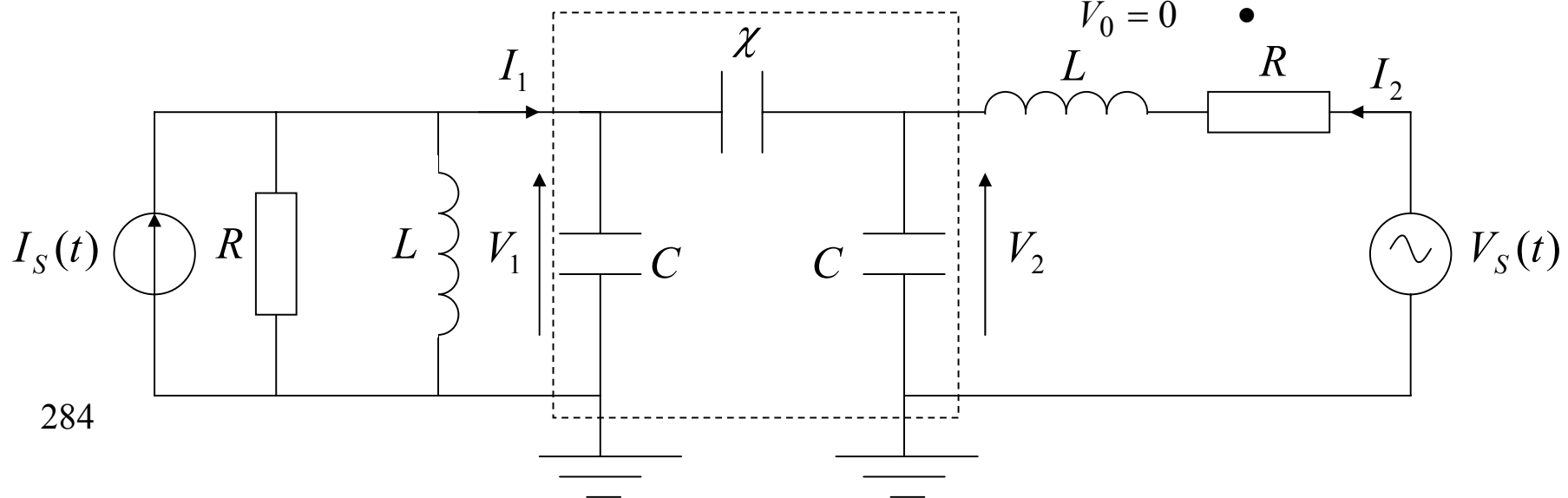
שלב ד': נחשב את ההספק הממוצע בזמן המתבזבז בעת חימום הנגד השמאלי, ונבחן את המקרים

הבאים :

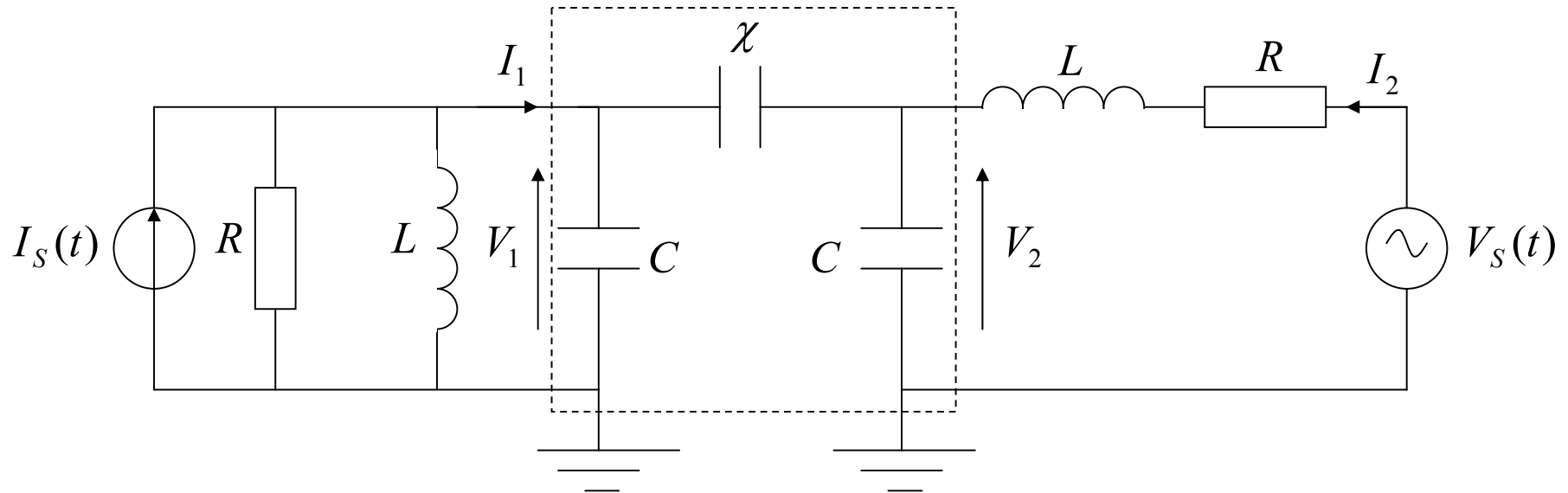
$\chi = 0$ •

$I_0 = 0$ •

$V_0 = 0$ •



פתרון



שלב א': נעזר בחוקי קירכהוף על-מנת לקבל ביטויים עבור המתחים \bar{V}_1 ו- \bar{V}_2 .

$$(9.52) \quad \bar{I}_S = \frac{\bar{V}_1}{R} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L} + I_1 = \bar{V}_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) - j\omega\chi\bar{V}_2$$

$$\bar{V}_S = \bar{I}_2 R + j\omega L \bar{I}_2 + \bar{V}_2 = -j\omega\chi(R + j\omega L)\bar{V}_1 + \bar{V}_2 [1 + j\omega C(R + j\omega L)]$$

וברישום מטריצי:

$$(9.53) \quad \begin{pmatrix} j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} & -j\omega\chi \\ -j\omega\chi(R + j\omega L) & 1 + j\omega C(R + j\omega L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{I}_S \\ \bar{V}_S \end{pmatrix}$$

שלב ב': התנאי לתהודה הינו שהדיטרמיננט של המטריצה הנ"ל שווה לאפס, דהיינו

$$(9.54) \quad \Delta = \left(j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right) [1 + j\omega C(R + j\omega L)] + \omega^2 \chi^2 (R + j\omega L) = 0$$

שלב ג': עבור $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ מערכת המשוואות הנ"ל מקבלת את הצורה הבאה:

$$(9.55) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -j\frac{\chi}{\sqrt{LC}} \\ -j\frac{\chi}{\sqrt{LC}}R + \frac{\chi}{C} & j\sqrt{\frac{C}{L}}R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{I}_S \\ \bar{V}_S \end{pmatrix}$$

ואז המתחים \bar{V}_1 ו- \bar{V}_2 ניתנים על-ידי הביטויים הבאים:

$$(9.56) \quad \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -j\frac{\chi}{\sqrt{LC}} \\ -j\frac{\chi}{\sqrt{LC}}R + \frac{\chi}{C} & j\sqrt{\frac{C}{L}}R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{I}_S \\ \bar{V}_S \end{pmatrix}$$

$$(9.57) \quad \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} j\sqrt{\frac{C}{L}}R & j\frac{\chi}{\sqrt{LC}} \\ j\frac{\chi}{\sqrt{LC}}R - \frac{\chi}{C} & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_s \\ \bar{V}_s \end{pmatrix}$$

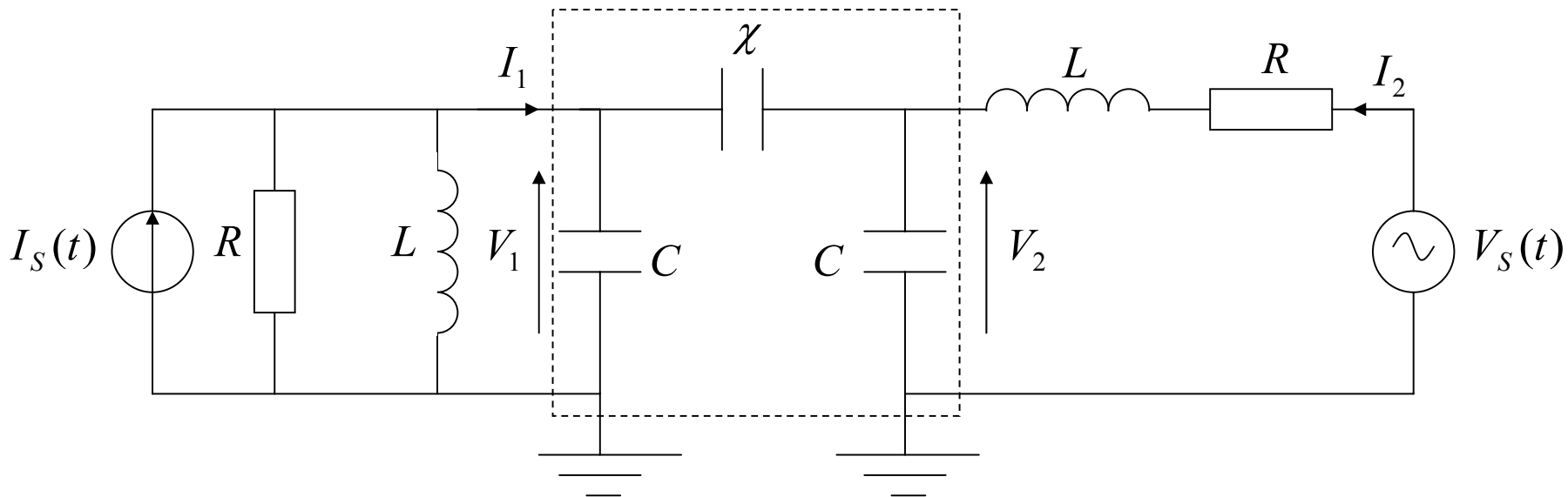
$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{pmatrix} = \frac{LC}{jC\sqrt{LC} + \chi^2 \left(R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \right)} \begin{pmatrix} j\sqrt{\frac{C}{L}}R & j\frac{\chi}{\sqrt{LC}} \\ j\frac{\chi}{\sqrt{LC}}R - \frac{\chi}{C} & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_s \\ \bar{V}_s \end{pmatrix}$$

ובמפורש:

$$(9.58) \quad \bar{V}_1 = \frac{LC}{jC\sqrt{LC} + \chi^2 \left(R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \right)} \left(j\sqrt{\frac{C}{L}}R\bar{I}_s + j\frac{\chi}{\sqrt{LC}}\bar{V}_s \right)$$

$$\bar{V}_2 = \frac{LC}{jC\sqrt{LC} + \chi^2 \left(R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \right)} \left[\bar{I}_s \left(j\frac{\chi}{\sqrt{LC}}R - \frac{\chi}{C} \right) + \frac{\bar{V}_s}{R} \right]$$

נבחן את המקרה עבורו $\chi = 0$. במקרה זה, מדובר בשני מעגלים מסדר שני. המעגל בצד ימין הינו מעגל RLC טורי בתהודה ואילו המעגל השמאלי הינו מעגל RLC מקבילי בתהודה, לפיכך:



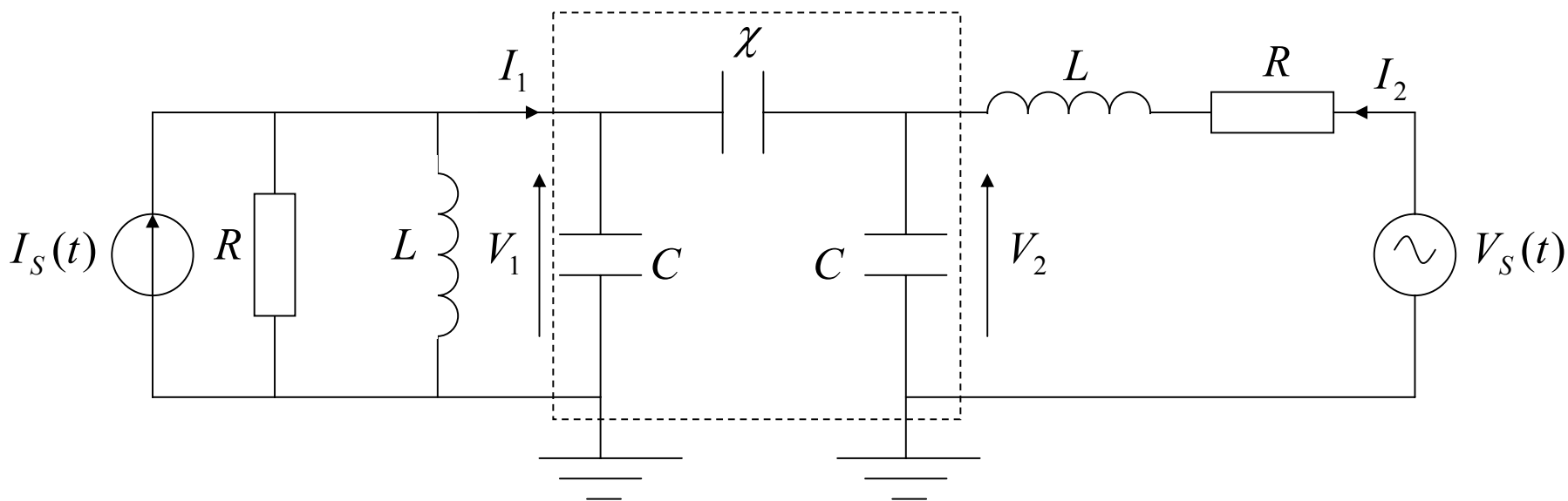
מעגל ימני:

$$(9.59) \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_S}{R} \Rightarrow \bar{V}_2 = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_2 = -j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\bar{V}_S}{R}$$

הביטוי הנ"ל ל- \bar{V}_2 מתלכד עם הביטוי

$$(9.60) \quad \bar{V}_2 = \frac{LC}{jC\sqrt{LC} + \chi^2 \left(R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \right)} \left[\bar{I}_S \left(j\frac{\chi}{\sqrt{LC}} R - \frac{\chi}{C} \right) + \frac{\bar{V}_S}{R} \right]$$

עבור $\chi = 0$ (וודא בעצמך!)



מעגל שמאלי:

$$(9.61) \quad \bar{V}_1 = \bar{I}_0 R$$

הביטוי הנ"ל ל- \bar{V}_1 מתלכד עם הביטוי

$$(9.62) \quad \bar{V}_1 = \frac{LC}{jC\sqrt{LC} + \chi^2 \left(R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \right)} \left(j\sqrt{\frac{C}{L}} R \bar{I}_S + j\frac{\chi}{\sqrt{LC}} \bar{V}_S \right)$$

עבור $\chi = 0$ (וודא בעצמך!)

שלב ד': ההספק הממוצע בזמן המתבזבז בחימום הנגד השמאלי במעגל הנתון הינו:

$$(9.63) \quad P_L = \frac{1}{2} \frac{|\bar{V}_1|^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{L^2 C^2 / R}{\left(\chi^2 \sqrt{\frac{L}{C}} + C\sqrt{LC} \right)^2 + \chi^4 R^2} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} R |\bar{I}_S| + \frac{\chi}{\sqrt{LC}} |\bar{V}_S| \right)^2$$

נעריך את הביטוי הנ"ל עבור שלושה מקרים כלהלן:

- $\chi = 0$ - בהעדר צימוד בין שני המעגלים, אין כל תרומה למעגל הימני בהספק המתבזבז בנגד אשר במעגל השמאלי ועל-כן ללא קשר בערכו של \bar{V}_0 ההספק הינו נתון על-ידי הביטוי הבא:

$$(9.64) \quad P_L = \frac{1}{2} \frac{L^2 C^2 / R}{\left(C\sqrt{LC} \right)^2} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} R |\bar{I}_S| \right)^2 = \frac{1}{2} |\bar{I}_S|^2 R$$

שים-לב: במצב זה $\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$ כל זרם המקור במעגל השמאלי עובר דרך הנגד.

- $\bar{V}_S = 0$ - ההספק תלוי בכל מרכיבי המעגל אך ניזון רק מהמקור השמאלי ושווה ל-

$$(9.65) \quad P_L = \frac{1}{2} \frac{L^2 C^2 / R}{\left(\chi^2 \sqrt{\frac{L}{C}} + C\sqrt{LC} \right)^2 + \chi^4 R^2} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} R |\bar{I}_S| \right)^2 = \frac{1}{2} |\bar{I}_S|^2 R \frac{LC^3}{\left(\chi^2 \sqrt{\frac{L}{C}} + C\sqrt{LC} \right)^2 + \chi^4 R^2}$$

שים-לב: הביטוי הנ"ל מתלכד עם הקודם עבור $\chi = 0$.

❖ $\bar{I}_S = 0$ - במקרה זה המקור היחיד שמזין את המעגל הינו המקור במעגל הימני וההספק בנגד

השמאלי נתון על-ידי הביטוי הבא :

$$(9.66) \quad P_L = \frac{1}{2} \frac{L^2 C^2 / R}{\left(\chi^2 \sqrt{\frac{L}{C}} + C \sqrt{LC} \right)^2 + \chi^4 R^2} \left(\frac{\chi}{\sqrt{LC}} |\bar{V}_S| \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{|\bar{V}_S|^2}{R} \chi^2 \frac{LC}{\left(\chi^2 \sqrt{\frac{L}{C}} + C \sqrt{LC} \right)^2 + \chi^4 R^2}$$

שים-לב : ההספק הנ"ל מתאפס עבור $\chi = 0$ (אין צימוד בין המעגלים).

הפרק העשירי – תכנון מעגלים חשמליים

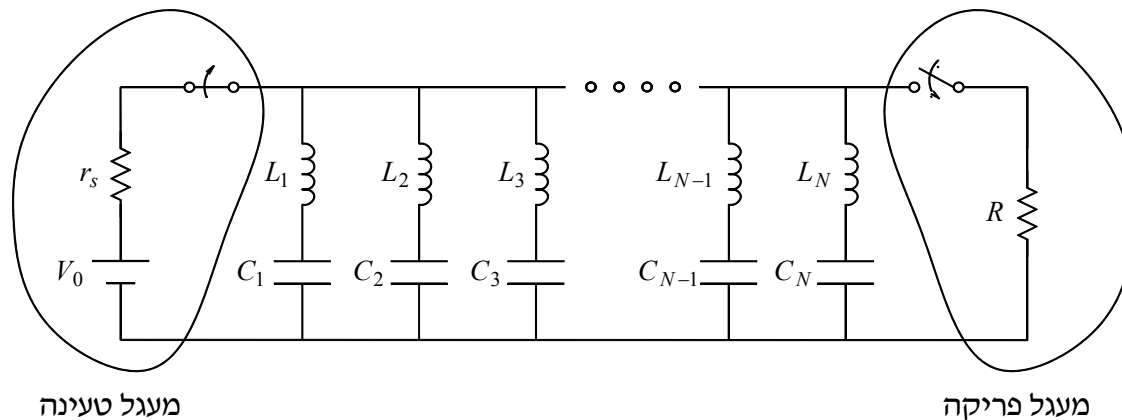
10.1 מבוא

עד כה, עסקנו בניתוח מעגלים חשמליים נתונים. הניתוח כלל פתרון מעגלים לינאריים הן בתחום הזמן והן בתחום התדר. כמו-כן, הצגנו כמה דוגמאות פשוטות לפתרון וניתוח מעגלים לא לינאריים. כיום, קיים מגוון רחב מאוד של מעגלים עם איפיונים מגוונים ביותר. מעגלים אלו צריכים תכנון מקדים על-מנת להשיג ולהגיע למאפיינים דרושים. להבדיל משלב הניתוח של מעגל בו ראינו שיטות כלליות למעגלים לינאריים עבור תכנון מעגל לא קיימת שיטה כללית. בפרק זה, אנו נציג דוגמא פשוטה של תכנון מעגל חשמלי לשימוש מיוחד. לדוגמא אשר תפורט בהמשך שני מאפיינים חשובים: פשטות יחסית ושילוב של מספר נושאים אשר נלמדו במהלך הסמסטר. אנו נציג דוגמא של תכנון מעגל חשמלי לייצור פולסים חשמליים פשוטים.

10.2 מעגל מייצר פולסים

- המטרה:** תכנון מעגל המייצר פולס חשמלי בעל צורה נתונה.
- אנו רוצים לתכנן מעגל חשמלי אשר במוצאו מחובר נגד R ו-:
- יוצר פולס חשמלי בעל צורה המוכתבת מראש (למשל פולס מרובע).
 - לפולס אנרגיה נתונה (W) ויש למסור את כולה לנגד במוצא.
 - הפולס הוא בעל אורך סופי τ_P .

מתוך דרישה ב' ברור שהמערכת מורכבת מאוסף של קבלים וסלילים בלבד, הרי אחרת, רק חלק מהאנרגיה יגיע לנגד R .
 נבחן את המערכת הבאה:



איור 10.1: מערכת ייצור פולסים

המעגל הני"ל, מורכב שני חלקים בסיסיים, החלק הראשון מהווה מעגל טעינה אשר טוען את כל

הקבלים למתח אחיד V_0 בקבוע זמן $\tau = r_s \sum_{n=1}^N C_n$. והחלק השני הינו מעגל הפריקה דרך הנגד (בעת

הפריקה מעגל הטעינה מנותק).

עם סיום הטעינה, האנרגיה האגורה בתוך המערכת נתונה על-ידי הביטוי

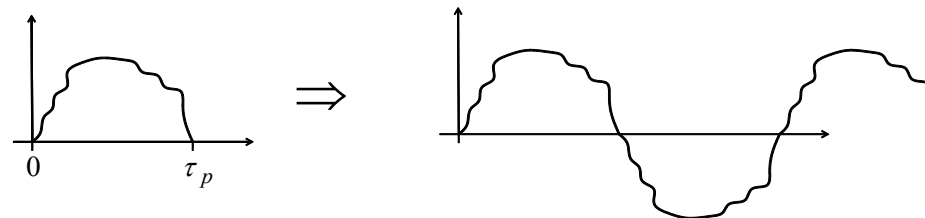
$$(10.1) \quad W = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} C_n V_0^2 = \frac{1}{2} V_0^2 \sum_{n=1}^N C_n$$

בשלב זה אנחנו עדיין לא יודעים איך המעגל יתנהג אבל דבר אחד ברור הזרם במוצא יהיה סכום של כל הזרמים בכל החוליות, כלומר

$$(10.2) \quad I_R(t) = \sum_{n=1}^N I_n(t)$$

ועל-סמך הנחה (א) הצורה הפונקציונלית ידועה.

בשלב זה ניתן להניח שבמקום פולס אחד יש לנו רכבת אינסופית של פולסים זאת אומרת:



איור 10.2: רכבת של פולסים

נניח לשם פשטות רכבת זו הינה מחזורית ועל-כן ניתן לתארה באמצעות טור פורייה

$$(10.3) \quad I_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin\left(n\pi \frac{t}{\tau_p}\right)$$

כאשר המקדמים J_n נתנים לחישוב באופן הבא :

$$(10.4) \quad \int_0^{\tau_p} dt I_R(t) \sin\left(m\pi \frac{t}{\tau_p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \int_0^{\tau_p} dt \sin\left(m\pi \frac{t}{\tau_p}\right) \sin\left(n\pi \frac{t}{\tau_p}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_n \frac{\tau_p}{2} \delta_{n,m} = J_n \frac{\tau_p}{2}$$

ואז המקדמים J_n נתונים על-ידי הביטויים הבאים :

$$(10.5) \quad J_n \equiv \frac{2}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} dt I_R(t) \sin\left(n\pi \frac{t}{\tau_p}\right)$$

כאמור ההנחה הבסיסית היא ש- $I_R(t)$ מוכתב על-ידי דרישת התכנון. על-סמך התוצאה האחרונה

ברור שאם המערכת בנויה מאינסוף חוליות ($N \rightarrow \infty$) אזי

$$(10.6) \quad I_n(t) \equiv J_n \sin\left(n\pi \frac{t}{\tau_p}\right)$$

החוליות השונות של המעגל הן מעגלי תהודה טוריים, לפיכך :

$$(10.7) \quad \omega_n = \pi n \frac{1}{\tau_P} = \frac{1}{\sqrt{L_n C_n}}$$

$$J_n = \frac{V_0}{Z_n} = \frac{V_0}{\sqrt{L_n / C_n}}$$

במילים אחרות תדרי התהודה של כל חוליה מתאימים לתדרי פורייה של התמרת פורייה של הזרם ואילו הזרם בכל חוליה נקבע על-ידי המתח על החוליה והאימפדנס האופייני $\sqrt{L/C}$.

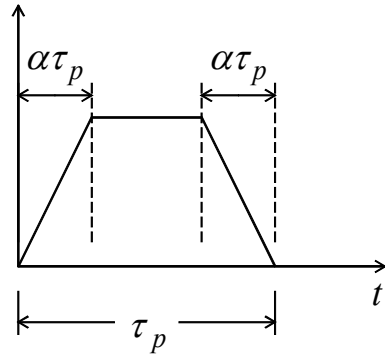
מתוך שני הקשרים הללו ניתן למצוא את L_n ו- C_n

$$(10.8) \quad \omega_n J_n = \frac{V_0}{L_n} \Rightarrow L_n = \frac{V_0}{J_n \omega_n} = \frac{V_0}{J_n} \frac{\tau_P}{\pi n} \Rightarrow \boxed{L_n = \frac{V_0}{J_n} \frac{\tau_P}{\pi n}}$$

$$\frac{\omega_n}{J_n} = \frac{1}{C_n V_0} \Rightarrow C_n = \frac{J_n}{\omega_n V_0} = \frac{J_n}{V_0} \frac{\tau_P}{\pi n} \Rightarrow \boxed{C_n = \frac{J_n}{V_0} \frac{\tau_P}{\pi n}}$$

נבחן כעת שני מקרים.

מקרה א': פולס טרפזי



(10.9)

$$I_R(t) = \frac{V_0}{R} \begin{cases} \frac{t}{\alpha\tau_p} & 0 < t \leq \alpha\tau_p \\ 1 & \alpha\tau_p \leq t \leq (\tau_p - \alpha\tau_p) \\ \frac{\tau_p - t}{\alpha\tau_p} & (\tau_p - \alpha\tau_p) \leq t \leq \tau_p \end{cases}$$

איור 10.3: פולס טרפזי

ואז מתקיים:

(10.10)

$$J_\nu = \frac{V_0}{R} \frac{4}{\pi\nu} \text{sinc}(\pi\nu\alpha)$$

כאשר $\text{sinc}(x) = \sin x / x$ ו- $\nu = 1, 3, 5, \dots$, לכן

(10.11)

$$L_{2m+1} = \frac{V_0}{J_{2m+1}} \frac{\tau_p}{\pi(2m+1)}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{4}{\pi(2m+1)} \operatorname{sinc}[\pi(2m+1)\alpha] \times \frac{\tau_P}{\pi(2m+1)}$$

(10.12)

$$L_{2m+1} = \frac{R\tau_P}{4 \operatorname{sinc}[\pi(2m+1)\alpha]}$$

בצורה דומה

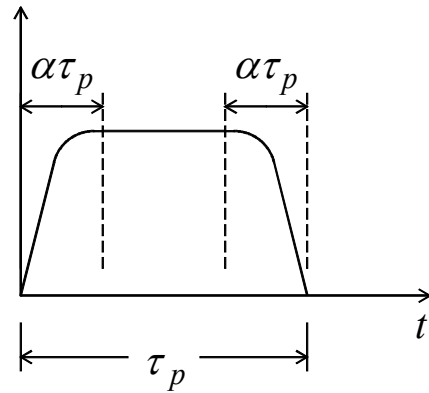
(10.13)

$$C_{2m+1} = \frac{\tau_P}{R} \frac{4}{\pi^2(2m+1)} \operatorname{sinc}[\pi(2m+1)\alpha]$$

כדאי לשים לב שקבענו את הרכיבים L_n ו- C_n במושגים של אורך הפולס הנדרש (τ_P) צורתו (α) והנגד אליו המערכת מעבירה את ההספק.

בעיה: הפונקציה sinc יכולה להיות שלילית ואין משמעות לקיבול או השראות שליליים. על-מנת לפתור בעיה זו נבחן את המקרה הבא.

מקרה ב' : פולס שטוח עם עליה וירידה פרבוליים



איור 10.4 : פולס היפרבולי

$$(10.14) \quad I_R(t) = \frac{V_0}{R} \begin{cases} 2 \frac{t}{\alpha\tau_p} - \frac{t^2}{\alpha^2\tau_p^2} & 0 < t \leq \alpha\tau_p \\ 1 & \alpha\tau_p \leq t \leq (\tau_p - \alpha\tau_p) \\ 1 - \left(\frac{t - \tau_p + \alpha\tau_p}{\alpha\tau_p} \right)^2 & (\tau_p - \alpha\tau_p) \leq t \leq \tau_p \end{cases}$$

ואז מתקיים :

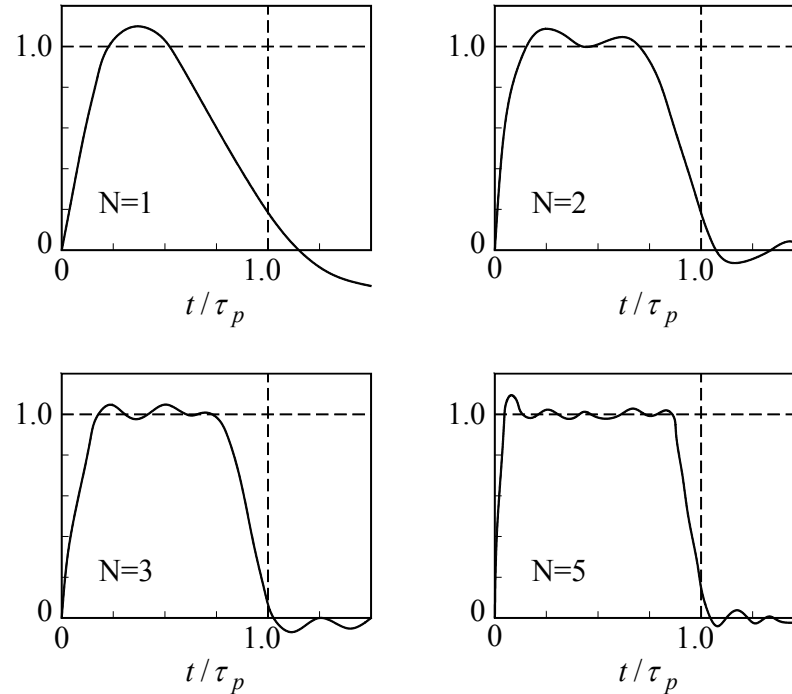
$$(10.14) \quad J_\nu = \frac{V_0}{R} \frac{4}{\pi\nu} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\pi\nu\alpha\right)$$

כאשר $\operatorname{sinc}(x) = \sin x / x$ ו- $\nu = 1, 3, 5, \dots$, לכן

$$(10.15) \quad L_{2m+1} + \frac{R\tau_p}{4 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{2}(2m+1)\alpha \right]}$$

$$C_{2m+1} = \frac{\tau_p}{R} \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{2}(2m+1)\alpha \right]$$

הגרפים הבאים ממחישים את התמונה כאשר במעגל חוליה אחת, שתיים, שלוש וחמש.

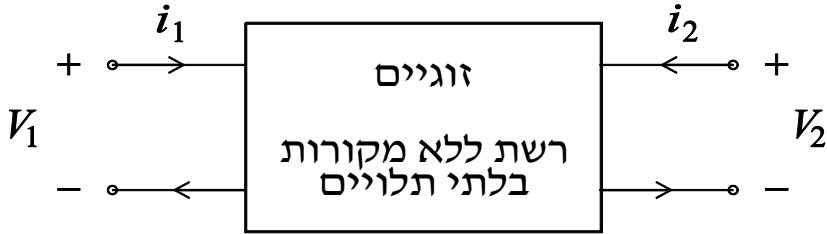


איור 10.5: זרם הנגד עבור מספר חוליות שונה

הפרק האחד עשר - רשתות זוגיים

11.1 הקדמה

רשת זוגיים הינה רשת חשמלית אשר מאופיינת על-ידי שני זוגות של הדקים חיצוניים המכונים זוג כניסה וזוג יציאה, כמתואר בתרשים הבא:



איור 11.1: תיאור סכמטי של רשת זוגיים

הייחוד של רשת זוגיים הינו:

- בכל זוג הדקים, הזרם הנכנס שווה לזרם היוצא – תכונה זו קשורה במבנה הפנימי או אופן החיבור של הרשת.
- יחידה בסיסית לתיאור מערכת יותר מסובכת.
- שימושי לתיאור אלמנטים ורשתות מורכבות.

במסגרת הקורס אנו נתמקד בתיאור רשת זוגיים המתארת רשת ליניארית ללא מקורות בלתי תלויים. מטרת הפרק היא לתאר שיטות לתיאור וניתוח רשתות כנ"ל.

11.2 אפיון רשת זוגיים

רשת זוגיים מאופיינת על-ידי הקשרים בין ארבעת הגדלים i_1, v_1 ו- i_2, v_2 . שנים מארבעת הגדלים הינם משתנים תלויים ואחרים בלתי תלויים (את המשתנים הבלתי תלויים מוכתבים על-ידי אילוץ מקורות או משוואת מצב בכניסת או יציאת רשת הזוגיים), על-כן קיימות בעיקר 6 שיטות הצגה

משתנים תלויים

$$v_1, v_2$$

$$i_1, i_2$$

$$i_2, v_2$$

$$i_2, v_1$$

$$i_1, v_2$$

$$i_1, v_1$$

משתנים בלתי תלויים

$$i_1, i_2$$

$$v_1, v_2$$

$$i_1, v_1$$

$$i_1, v_2$$

$$i_2, v_1$$

$$i_2, v_2$$

בעת אפיון רשת הזוגיים, יש לבטא את המשתנים התלויים במונחים של המשתנים הבלתי תלויים. לצורך זה קיימות כמה שיטות אפיון שנכיר חלק מהן במהלך הפרק.

11.3 מטריצת אימפדנסים:

מהלינאריות של המערכת החשמלית המתוארת בזוגיים, ניתן לרשום:

$$(11.1) \quad \begin{aligned} v_1 &= z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 &= z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{aligned}$$

או ברישום מטריצי:

$$(11.2) \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{Z} \underline{i}$$

למטריצה \underline{Z} קוראים מטריצת אימפדנס הריקס של הזוגיים ואת איבריה ניתן לחשב בצורה הבאה:

$$(11.3) \quad v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \Rightarrow z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0}, \quad z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad \text{נתק ביציאה או בכניסה}$$

$$(11.4) \quad v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \Rightarrow z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}, \quad z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad \text{נתק ביציאה או בכניסה}$$

כשאר $z_{12} = z_{21}$ אומרים שהזוגיים הדדיים, דהיינו, מטריצת האימפדנס סימטרית.

11.4 מטריצת אדמיטנסים

באופן דומה לרישום לפי מטריצת האימפדנסים, ניתן להגדיר מטריצת אדמיטנסים באופן הבא:

$$(11.5) \quad \begin{aligned} i_1 &= y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 &= y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{aligned}$$

או ברישום מטריצי

$$(11.6) \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{i} = \underline{Y} \underline{v}$$

למטריצה \underline{Y} קוראים מטריצת אדמיטנס הקצר של הזוגיים ואת איבריה ניתן לחשב בצורה הבאה:

$$(11.7) \quad i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \Rightarrow y_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0}, \quad y_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} \quad \text{קצר בכניסה או ביציאה}$$

$$(11.8) \quad i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \Rightarrow y_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}, \quad y_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} \quad \text{קצר בכניסה או ביציאה}$$

כאשר מטריצת האדמיטנס סימטרית דהיינו $y_{12} = y_{21}$ הזוגיים יהיו הדדיים.

הקשר עתה בין מטריצת האימפדנס למטריצת האדמיטנס באופן הבא:

$$\underline{Y} = (\underline{Z})^{-1}$$

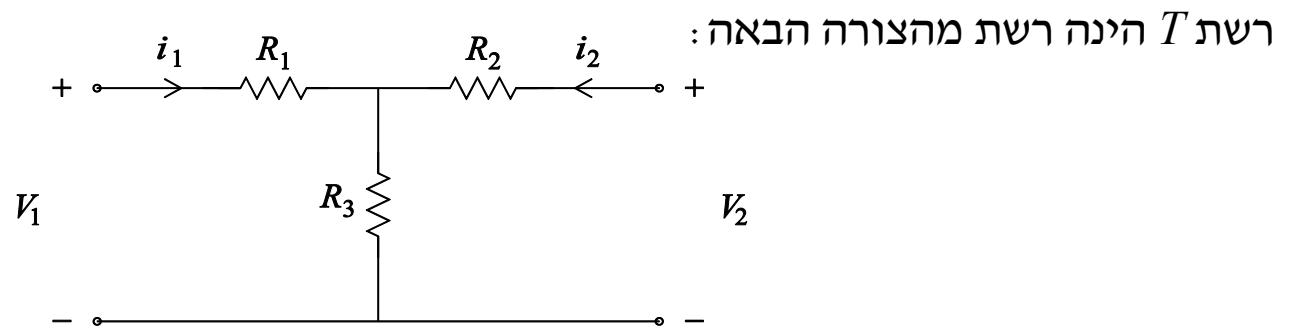
$$(11.9) \quad y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z}, \quad y_{12} = \frac{-z_{12}}{\Delta_z}, \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z}, \quad y_{21} = \frac{-z_{21}}{\Delta_z} \quad \Delta_z = \det(\underline{Z})$$

ובאופן דומה, המעבר ממטריצת האדמיטנס למטריצת האימפדנס

$$(11.10) \quad z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta_y}, \quad z_{12} = \frac{-y_{12}}{\Delta_y}, \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta_y}, \quad z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta_y} \quad \Delta_y = \det(\underline{Y})$$

11.5 דוגמאות

11.5.1 רשת T



איור 11.2: רשת T

נמצא את מטריצת האימפדנסים עבור הרשת הנ"ל.

מחוקי קירכהוף, קל להראות ש-

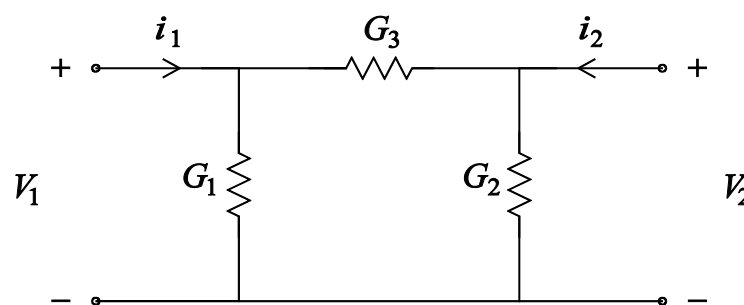
$$(11.11) \quad v_1 - i_1 R_1 = v_2 - i_2 R_2 = (i_1 + i_2) R_3 \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= i_1 (R_1 + R_3) + i_2 R_3 \\ v_2 &= i_1 R_3 + i_2 (R_2 + R_3) \end{aligned}$$

ולכן, מטריצת האימפדנסים הינה:

$$(11.12) \quad Z = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

11.5.2 רשת Π :

רשת Π הינה רשת מהצורה:



איור 11.3: רשת Π

נמצא את מטריצת האימפדנסים עבור הרשת הנ"ל.

מחוקי קירכהוף, קל להראות ש-

$$(11.13) \quad i_1 - v_1 G_1 = -(i_2 - v_2 G_2) = (v_1 - v_2) G_3 \Rightarrow \begin{aligned} i_1 &= v_1 (G_1 + G_3) - v_2 G_3 \\ i_2 &= -v_1 G_3 + v_2 (G_2 + G_3) \end{aligned}$$

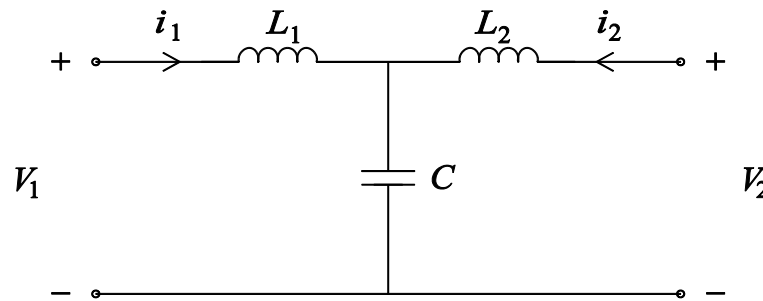
ולפיכך, מטריצת האדמיטנסים הינה מהצורה:

$$(11.14) \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{pmatrix}$$

11.5.3 ניתוח מעגל מסדר 3 במצב מתמיד סינוסי:

נתון מעגל חשמלי מסדר שלישי כמתואר באיור 11.4. יש לחשב את מטריצת האימפדנסים בהנחת מצב מתמיד

סינוסי.



איור 11.4: מעגל מסדר 3

לפי הגדרה, ניתן לחשב את איברי מטריצת האימפדנסים באופן הבא:

$$\begin{aligned}
 z_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \\
 z_{12} &= \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{1}{j\omega C} \\
 z_{21} &= \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{1}{j\omega C} \\
 z_{22} &= \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}
 \end{aligned}$$

(11.15)

ולסיכום,

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}$$

(11.16)

הערה: במידה והרשת היתה מועמסת בקצה השני על-ידי נגד עומס R_L אזי מתקיים:

$$v_2 = -i_2 R_L$$

$$v_1 = \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) i_1 - \frac{1}{j\omega C} \frac{v_2}{R_L}$$

$$v_2 = \frac{1}{j\omega C} i_1 - \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \frac{v_2}{R_L}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{i_1} = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{j\omega C R_L} \frac{v_2}{i_1}$$

$$\frac{v_2}{i_1} = \frac{1}{j\omega C} - \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \frac{v_2}{R_L i_1}$$

$$\frac{v_2}{i_1} \left[1 + \frac{1}{R_L} \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \right] = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{v_2}{i_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{1 + \frac{1}{R_L} \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}$$

11.6 מטריצה היברדית

דרך נוספת מאוד נפוצה של אפיון רשת זוגיים הינה דרך מטריצה היברדית הנתונה בביטוי הבא :

$$(11.17) \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{aligned}$$

וברישום מטריצי :

$$(11.18) \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

ניתן לחשב את איברי המטריצה הנ"ל באופן הבא :

$$(11.19) \quad \begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{1}{y_{11}} & h_{12} &= \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ h_{21} &= \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}} & h_{22} &= \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{1}{z_{22}} \end{aligned}$$

11.7 מטריצת העברה – תמסורת

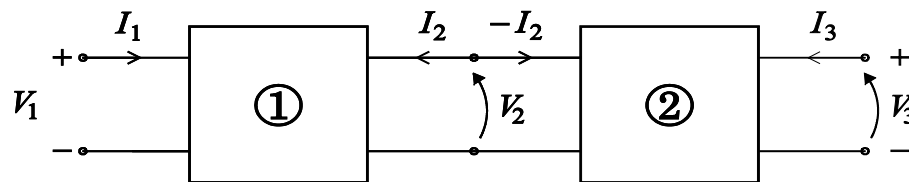
אחת הדרכים השימושיות ביותר להצגת רשת זוגיים הינה על-ידי מטריצת התמסורת. אפיון זה מאפשר בקלות לחשב את המטריצה השקולה לחיבור טורי (קסקדי) של כמה רשתות זוגיים. מטריצת ההעברה נתונה על-ידי הביטוי:

$$(11.20) \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \equiv T \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

$$(11.21) \quad \begin{aligned} v_1 &= Av_2 - Bi_2 \\ i_1 &= Cv_2 - Di_2 \end{aligned}$$

ואת איבריה ניתן לחשב באופן הבא:

$$(11.22) \quad A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0} ; B = \left. \frac{-v_1}{i_2} \right|_{v_2=0} ; C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0} ; D = \left. \frac{-i_1}{i_2} \right|_{v_2=0}$$



איור 11.5: חיבור טורי (קסקדי) של רשתות זוגיים

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & B^{(1)} \\ C^{(1)} & D^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & B^{(1)} \\ C^{(1)} & D^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(2)} & B^{(2)} \\ C^{(2)} & D^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ -i_3 \end{pmatrix}$$

(11.23)
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = T_1 \cdot T_2 \begin{pmatrix} v_3 \\ -i_3 \end{pmatrix}$$

ננסה עתה לקשר את מטריצת ההעברה למטריצת האימפדנסים:

(11.24)
$$\begin{aligned} v_1 &= z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 &= z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{aligned}$$

או לחילופין,

$$\begin{pmatrix} 1 & -z_{11} \\ 0 & z_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -z_{12} \\ 1 & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{pmatrix} z_{21} & z_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z_{12} \\ 1 & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

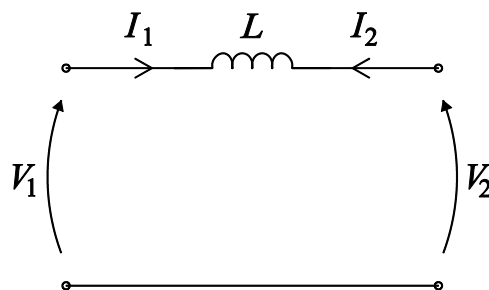
$$= \frac{1}{z_{21}} \begin{pmatrix} z_{11} & -z_{12}z_{21} + z_{11}z_{22} \\ 1 & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

בפרט, עבור זוגיים הדדיים מתקיים:

$$(11.25) \quad \Delta_T = \frac{z_{12}}{z_{21}} = 1$$

11.8 דוגמאות למטריצת העברה:

דוגמא #1: נתונה הרשת הבאה:



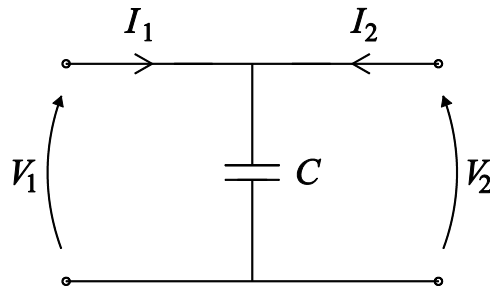
איור 11.6: רשת של סליל בודד

יש לחשב את מטריצת ההעברה עבור הרשת הנ"ל.

$$A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0 \rightarrow i_1=0} \quad v_1 = v_2 \Rightarrow A = 1 \quad ; \quad B = \left. \frac{-v_1}{i_2} \right|_{v_2=0} = j\omega L$$

$$C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0 \rightarrow i_1=0} = 0 \quad ; \quad D = \left. -\frac{i_1}{i_2} \right|_{v_2=0} = 1$$

(11.26)
$$T = \begin{pmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



איור 11.7: רשת של קבל בודד

יש לחשב את מטריצת ההעברה עבור הרשת הנ"ל.

$$A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0}$$

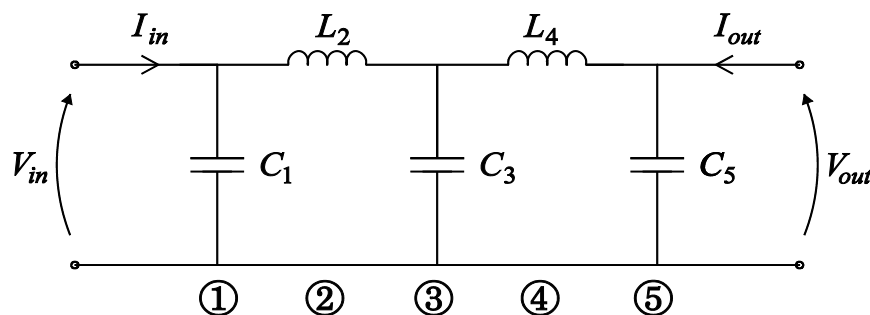
$$B = \left. \frac{-v_1}{i_2} \right|_{v_2=0 \rightarrow v_1=0} = 0$$

$$C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0} = j\omega C$$

$$D = \left. \frac{-i_1}{i_2} \right|_{v_2=0} = 1$$

(11.27)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$



איור 11.8: רשת חשמלית מסדר 5

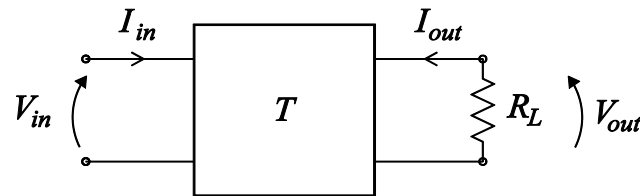
יש לחשב את מטריצת ההעברה עבור הרשת הנ"ל.

על-מנת לחשב את מטריצת ההעברה עבור הרשת הנתונה, נעזר במטריצות ההעברה אשר מצאנו לסליל בודד וקבל בודד בדוגמאות הקודמות. כמו-כן, ננצל את העובדה שבחיבור טורי מטריצת ההעברה הכוללת אינה אלא הכפלה של מטריצות ההעברה של כל רשת לחוד. לפיכך, נחלק את הרשת הנתונה ל-5 רשתות כמתואר באיור 11.8 ונקבל:

$$(11.28) \quad \begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \begin{pmatrix} v_{out} \\ -i_{out} \end{pmatrix}$$

$$(11.29) \quad \begin{aligned} \nu = 1, 3, 5 \quad T_\nu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_\nu & 1 \end{pmatrix} \\ \nu = 2, 4 \quad T_\nu &= \begin{pmatrix} 1 & j\omega L_\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נניח עתה שבמוצא המערכת מחובר נגד R_L כמתואר באיור 11.9.



איור 11.9: רשת זוגיים מועמסת

יש לחשב את אימפדנס הכניסה עבור הרשת הנ"ל.

לפי הגדרה:

$$\left. \begin{aligned} v_{in} &= T_{11}v_{out} + T_{12}v_{out} / R_L \\ i_{in} &= T_{21}v_{out} + T_{22}v_{out} / R_L \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{in} = \frac{-v_{in}}{i_{in}} = -\frac{T_{11}v_{out} + T_{12}v_{out} / R_L}{T_{21}v_{out} + T_{22}v_{out} / R_L}$$

$$Z_{in} = -\frac{T_{11} + T_{12} / R_L}{T_{21} + T_{22} / R_L}$$

$$(11.30) \quad Z_{in} = \begin{cases} -\frac{T_{11}}{T_{21}} & R_L \rightarrow \infty \\ -\frac{T_{12}}{T_{22}} & R_L = 0 \end{cases}$$

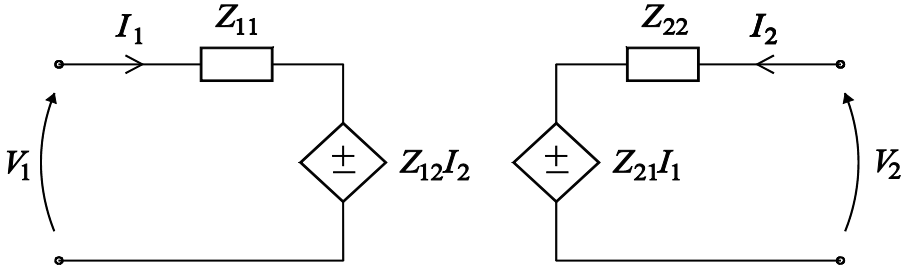
הערה:

$$(10.31) \quad \begin{aligned} \det(T_1) &= 1 \\ \det(T_2) &= 1 \\ &\vdots \\ \det(T_M) &= 1 \\ T &= T_1 \cdot T_2 \cdots T_M \\ \det(T) &= \det(T_1) \det(T_2) \cdots \det(T_M) = 1 \end{aligned}$$

11.9 מעגלי תמורה של זוגיים

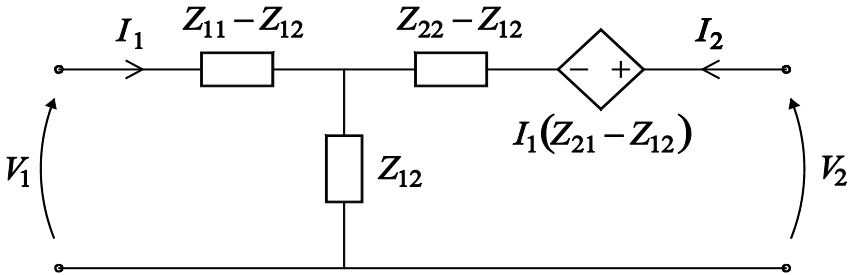
על-סמך האפיון המטריצי של רשת זוגיים, ניתן להחליפה בסכמות תמורה שונות המכילות מקורות מתח מבוקרים. נדגים את העקרון עברו מטריצות האימפדנסים והאדמיטנסים כלהלן.

- מטריצת אימפדנסים:

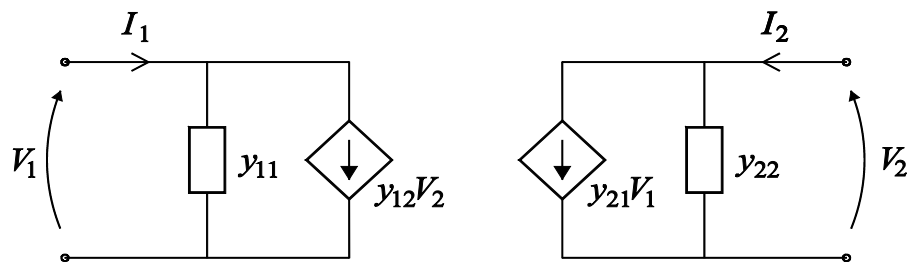


א.

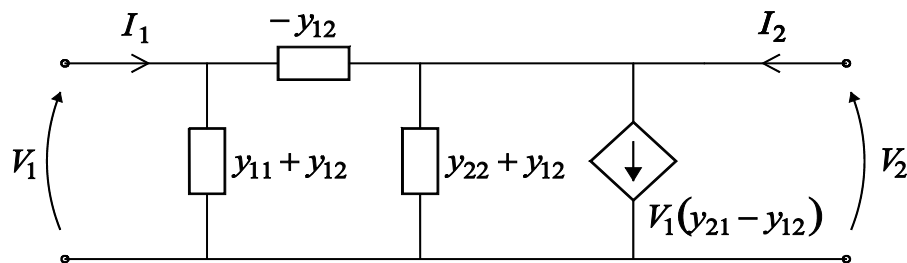
ב.



א.



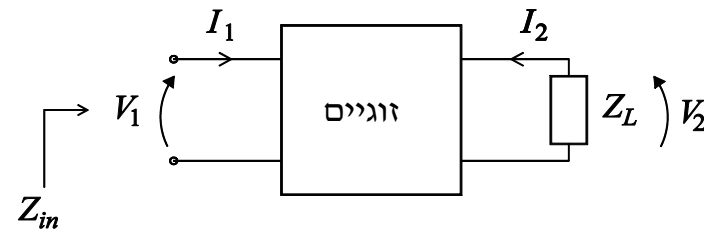
ב.



11.10 תכונות ושימושים של רשתות זוגיים

11.10.1 זוגיים כממירי התנגדות

אחד השימושים הנפוצים של רשתות זוגיים, הינו כממירי התנגדות לצורכי תיאום אימפדנסים להעברת הספק מקסימלי וכו'. מעגל ממיר התנגדויות אופייני מובא באיור הבא:



איור 11.10: מעגל ממיר התנגדות

נבטא את אימפדנס הכניסה במונחים של אימפדנס העומס:

$$(10.32) \quad Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} \bigg|_{\substack{v_2 = Z_L \\ -i_2}}$$

ואז מקבלים את טרנספורמצית האימפדנסים הבאה:

$$(11.33) \quad Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

זוגיים סימטריים הם זוגיים שתכונות התמסורת שלהם בשני הכיוונים זהות כלומר אפשר להחליף את זוג הכניסה בזוג היציאה בלי לשנות את תכונות הזוגיים

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_T} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_T = AD - BC$$

$$(11.34) \quad \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_T} \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{pmatrix}$$

ומכאן התנאי לסימטריות:

$$(11.35) \quad \Delta_T = 1 \quad \rightarrow \quad D = A$$

$$(11.36) \quad T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \quad A^2 - BC = 1$$

אימפדנס כניסה בריקם:

$$(11.37) \quad Z_0 = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{A}{C}$$

אימפדנס כניסה בקצר:

$$(11.38) \quad Z_s = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{B}{D}$$

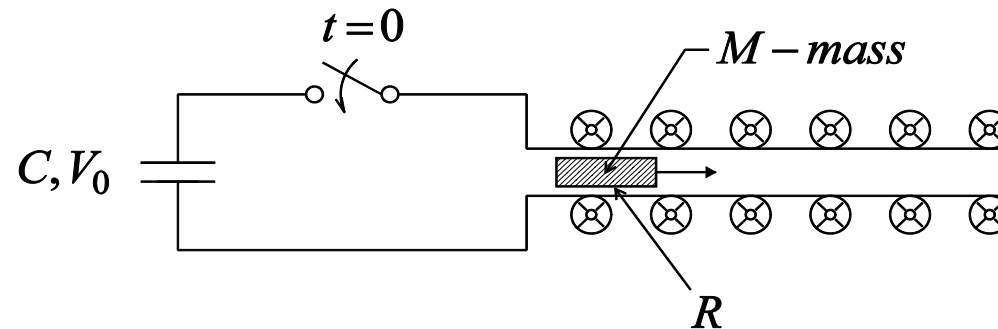
תרגיל עצמי: נתח את הניסוחים השונים משקולי הספק ואנרגיה.

הפרק השנים עשר - מבוא למערכות אלקטרו-מכניות

12.1 הקדמה

בהרבה מן המקרים המעניינים קיים צימוד בין מערכות חשמליות למערכות מכניות. כיום, הרבה מן ההתקנים הללו בנויים בסקלה מיקרונית כלומר ממדיהם של ההתקנים הינם מסדר גודל של מיקרונים בודדים, עשרות או מאות מיקרונים. אך כדי לקבל תחושה עבור התקנים אפשריים נבחן תחילה באופן איכותי בלבד כיצד אנחנו יכולים לגרום לתזוזה של גוף מקרוסקופי באמצעות אנרגיה אלקטרומגנטית. לשם כך, נבחן את פעולתו של תותח אלקטרומגנטי.

נניח שבקבל אשר באיור 12.1 אגורה אנרגיה $W = \frac{1}{2}CV_0^2$



איור 12.1: תזוזה של גוף מקרוסקופי באמצעות אנרגיה אלקטרומגנטית

ברגע $t = 0$ המתג נסגר והמעגל נפרק דרך גוף בעל התנגדות R ומסה M אשר חופשי לנוע בין שני לוחות מתכתיים השרויים בשדה מגנטי B . כיוון התנועה האפשרי ניצב לכיוון בו זורם הזרם החשמלי וניצב לשדה מגנטי B . על-סמך כוח לורנץ אנחנו יודעים שעל אלקטרון פועל כוח

(12.1)

$$\vec{F} = -e \left[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \right]$$

אם ישנו צבר של אלקטרונים אשר צפיפותם n אזי צפיפות הכוח

(12.2)

$$\begin{aligned} \vec{f} = n\vec{F} &= -en \left[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \right] \\ &= \underbrace{-en}_{\rho} \vec{E} - \underbrace{en\vec{V}}_{\vec{J}} \times \vec{B} \\ &= \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \end{aligned}$$

במקרה שלנו לשדה החשמלי השפעה זניחה!!! על החלקיק ועיקר (צפיפות) הכוח נובע מהאיבר $\vec{J} \times \vec{B}$. ביכולתנו להעריך איכותית על-סמך חוק שימור האנרגיה את מקסימום האנרגיה הקינטית של המסה ביציאה

(12.3)

$$\frac{1}{2} MU^2 = W_E = \frac{1}{2} CV_0^2$$

בהזנחת החיכוך, חוק שימור האנרגיה מחייב

$$(12.4) \quad \underbrace{\frac{1}{2} CV_0^2}_{\substack{\text{אנרגיה} \\ \text{חשמלית} \\ \text{התחלתית}}} = \underbrace{\frac{1}{2} MU_\infty^2}_{\substack{\text{אנרגיה} \\ \text{קנטית סופית}}} + \underbrace{R \int_0^\tau dt I^2(t)}_{\substack{\text{הספק שהופך} \\ \text{לחום בגוף}}}$$

τ מסמל את זמן המעוף של הגוף בתחום השדה המגנטי. בהמשך נדון כיצד נתן לנתח באופן כמותי מעגלים המשלבים מערכות חשמליות ומכניות.

12.2 מערכות משמרות, מושגי האנרגיה והקו-אנרגיה (co-energy)

נתחיל בכמה מושגי יסוד בהם כבר נתקלתם בעבר. עקרון שימור האנרגיה קובע שמערכת **מבודדת** משמרת את האנרגיה הכוללת האגורה בה. זאת אומרת, אם במערכת נתונה ישנה אנרגיה קינטית W_{KIN} ואנרגיה אלקטרומגנטית W_{EM} , אזי עובדת היותה מבודדת מחייבת

$$(12.5) \quad \frac{d}{dt} [W_{EM} + W_{KIN}] = 0$$

אם לאורך החוטים למשל זורם הספק $P_{EM} = IV$ אזי חוק שימור האנרגיה מקבל את הצורה

$$(12.6) \quad \frac{d}{dt} [W_{EM} + W_{KIN}] = P_{EM} = IV$$

נבחן כעת את השינויים הזמניים באנרגיה החשמלית בדוגמה הקודמת

$$(12.7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} W_{EM} &= IV - \frac{d}{dt} (W_{KIN}) \\ &= IV - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} MU^2 \right) \end{aligned}$$

בהנחה שמסה של הגוף קבועה בזמן

$$(12.8) \quad \frac{d}{dt} W_{EM} = IV - \vec{U} \cdot \left[\frac{d}{dt} (M\vec{U}) \right]$$

בהתחשב בהגדרת משוואות התנועה

$$(12.9) \quad \frac{d}{dt} M\vec{U} = \vec{F}$$

שימור האנרגיה מקבל את הצורה

$$(12.10) \quad \frac{d}{dt} W_{EM} = IV - \vec{U} \cdot \vec{F}$$

במקרה של מעגל מגנטי ובעיה חד-מימדית (x) המשתנה הבלתי תלוי הינו השטף המגנטי (Φ) לכן,

$$(12.11) \quad \frac{d}{dt} W_{EM} = \frac{d\Phi}{dt} I - F \frac{dx}{dt}$$

לעומת זאת במעגל חשמלי ובמקרה החד מימדי (x) המשתנה הבלתי תלוי הוא המטען החשמלי (q) לכן

$$(12.12) \quad \frac{d}{dt} W_{EM} = \frac{dq}{dt} V - F \frac{dx}{dt}$$

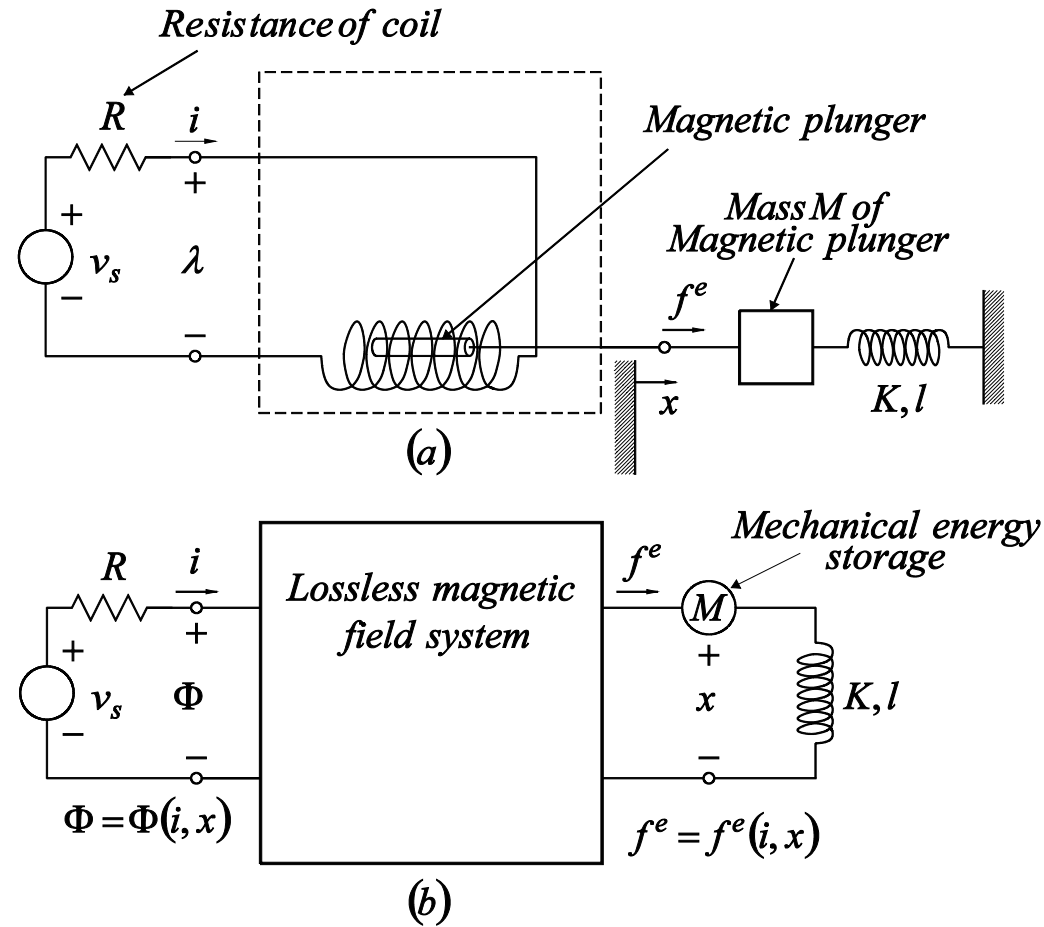
במילים אחרות שינוי אינפיניטסימאלי בשטף המגנטי $d\Phi$ ותזוזה מקבילה dx של החלק המכני במערכת, מלווה בשינוי באנרגיה האלקטרומגנטית בשיעור

$$(12.13) \quad dW_{EM} = Id\Phi - Fdx$$

כאשר F זהו הכוח האלקטרומגנטי באופן כללי (מגנטי במקרה שלנו).

כדי להמחיש נראה את השרטוט הבא:

Φ



איור 12.2: מערכת מכנית הפועלת על בסיס שדה מגנטי

הערה #1: במערכות מגנטיות למשתנים I ו- x קוראים משתני מצב ולאוסף (x, I) וקטור מצב.

הערה #2: בהתאם לשרטוט, אם הכוח F הוא חיובי, אזי x גדל.

הבעיה המרכזית היא לקבוע את הכוח F כי כזכור, את הזרם I ואת המתח V ניתן למדוד. קיימות שלוש אפשרויות:

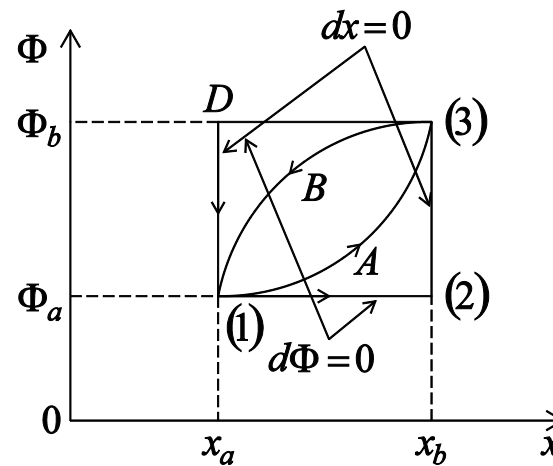
- א. **לפתור** את הבעיה האלקטרומגנטית בכל המרחב \Leftarrow לחשב את הכוח. בהרבה מקרים זוהי דרך לא מעשית (למרות שהיא נכונה) בגלל מורכבותה.
- ב. לקבוע את F בנסיון כפונקציה של (x, I) או (Φ, x) גם לשיטה זו יש חסרונות בגלל שגיאות מדידה, זמן מדידה וכו'....
- ג. הקשר $dW_{EM} = \dots$ מאפשר לקבוע את הכוח מתוך שיקולים של שימור אנרגיה וניצול המדידה שבהרבה מקרים ניתן לאפיין את האנרגיה באמצעות פרמטרים מקובצים (L, C) אשר בעצמם הם פונקציה של הפרמטרים החשמליים והגיאומטריים של המערכת.

נבחן עתה את הטענה האחרונה קצת יותר לעומק. עבור מערכת נתונה ראינו שמעשית ישנם 4 משתנים (I, x, Φ, F) , או לחילופין (q, x, V, F) עבור מערכת חשמלית, אולם מעשית רק שניים הם בלתי תלויים:

$$(12.14) \quad \begin{aligned} I &= I(\Phi, x) \\ F &= F(\Phi, x) \end{aligned}$$

מאחר והנחנו ש- (Φ, x) הם משתנים בלתי תלויים יש לבחון את מעבר המערכת ממצב (Φ_a, x_a) למצב שונה המתואר על-ידי (Φ_b, x_b) . כמובן שבמעבר האנרגיה האלקטרומגנטית משתנה מ- $W_{EM}(x_a, \Phi_a)$ ל- $W_{EM}(x_b, \Phi_b)$.

אם בוחנים את הבעיה במישור (Φ, x) אזי קיימים אינסוף מסלולים למעבר ממצב (a) למצב (b) :



איור 12.3: מישור מצב דו-מימדי

אולם מאחר והמערכת משמרת (אין הפסדים) לא צריך להיות כל הבדל בתוצאה כתלות במסלול הנבחר לכן נבחר את המסלול

$$(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3)$$

כי הוא בעל המשמעות הפיסיקלית ה"טבעית" ביותר:

המעבר מ- (1) ל- (2) כרוך בשנוי dx לכן מתוארת כאן תוספת אנרגיה במעבר מ- x_a ל- x_b כאשר שומרים את Φ קבוע.

המעבר השני, מ- (2) ל- (3) מתאר את תוספת האנרגיה מ- Φ_a ל- Φ_b במצב ש- x קבוע.

במילים אחרות אנחנו תחילה מכניסים למערכת אנרגיה מכנית (קינטית) ע"י זה שהשטף נשמר קבוע ובהמשך מכניסים אנרגיה מגנטית ע"י זה שלא מתבצעת עבודה מכנית ($dx = 0$) אך יש שינוי בשטף ויחד עם הזרם הקיים הם מבצעים עבודה.

השינוי dW_{EM} באנרגיה האלקטרומגנטית ניתן לביטוי פורמלי

$$(12.15) \quad dW_{EM} = \frac{\partial W_{EM}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{EM}}{\partial \Phi} d\Phi$$

הערה: שים לב שהנגזרת היא חלקית לכן משתנה אחד מוחזק קבוע.

אם נחסיר ממשוואה (12.15) את

$$(12.16) \quad dW_{EM} = Id\Phi - F_e dx$$

אז נקבל

$$(12.17) \quad 0 = d\Phi \left[I - \frac{\partial W_{EM}}{\partial \Phi} \right] + dx \left[-F_e - \frac{\partial W_{EM}}{\partial x} \right]$$

מאחר והקשר הזה חייב להתקיים עבור כל שינוי dx ו- $d\Phi$ אזי מקבלים ש:

$$(12.18) \quad I = \frac{\partial}{\partial \Phi} W_{EM}(\Phi, x)$$

$$(12.19) \quad F_e = -\frac{\partial}{\partial x} W_{EM}(\Phi, x)$$

במילים אחרות, אם האנרגיה האלקטרומגנטית האגורה ידועה, אזי אפשר לחשב את הכוח והזרם.

בהרבה מצבים לא ניתן להניח ש- Φ קבוע בשעה שגוזרים לפי x לכן, יש ללכת לניתוח חילופי:

במקום (x, Φ) כפרמטרים הבלתי תלויים נבחר את (x, I) כך ש- $\Phi = \Phi(I, x)$ ו- $F_e = F_e(I, x)$ לכן במקום להסתכל על $Id\Phi$ נוכל לנצל את העובדה ש-

$$(12.20) \quad Id\Phi = d(I\Phi) - \Phi dI \iff d(I\Phi) = Id\Phi + \Phi dI$$

על-מנת לכתוב

$$(12.21) \quad \begin{aligned} dW_{EM} &= Id\Phi - Fdx \\ &= d(I\Phi) - \Phi dI - Fdx \end{aligned}$$

כך שאם נגדיר

$$(12.22) \quad W'_{EM} \equiv \Phi I - W_{EM}$$

אזי

$$(12.23) \quad dW'_{EM} = \Phi dI + F dx$$

ואם נחזור על כל מערכת השיקולים מקודם ונוכל לרשום

$$(12.24) \quad dW'_{EM} = \frac{\partial W'_{EM}}{\partial I} dI + \frac{\partial W'_{EM}}{\partial x} dx$$

נוכל לקבל

$$(12.25) \quad \Phi = \frac{\partial W'_{EM}}{\partial I}$$

$$(12.26) \quad F_e = \frac{\partial W'_{EM}}{\partial x}$$

W_{EM} - פונקצית האנרגיה של המערכת

W'_{EM} - פונקציה הקו-אנרגיה של המערכת (*co-energy*)

מספרית, במערכות לינאריות שתי הפונקציות זהות למשל גם $\Phi = LI$ ו- $W_{EM} = \frac{1}{2L} \Phi^2$ אזי

$$(12.27) \quad W'_{EM} = \Phi I - \frac{1}{2} \frac{I^2}{L} = L \cdot I^2 - \frac{1}{2} \frac{L^2 I^2}{L} = \frac{1}{2} LI^2$$

$$(12.28) \quad W_{EM} = \frac{1}{2} \frac{(LI)^2}{L} = \frac{1}{2} LI^2$$

$$(12.29) \quad W_{EM}(\Phi, x) = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L(x)} \quad W'_{EM}(I, x) = \frac{1}{2} L(x) I^2$$

במקרה של אנרגיה חשמלית פונקצית האנרגיה נתונה במושגים של מטען q ומיקום x (q, x)

$$(12.30) \quad W_{EM}(x, q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)}$$

ואילו הקו-אנרגיה נתונה במושגי מתח V ומיקום x (V, x)

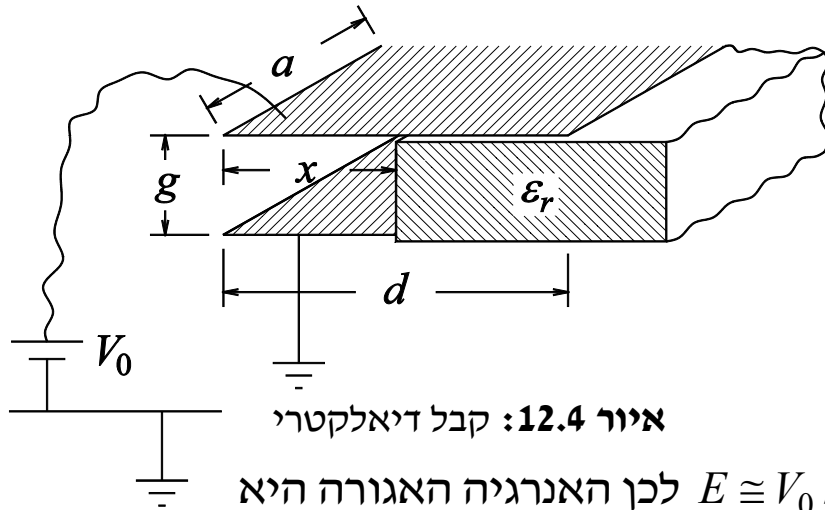
$$(12.31) \quad W'_{EM}(x, V) = \frac{1}{2} C(x) V^2$$

והדינמיקה נקבעת בשני המקרים על-ידי:

$$(12.32) \quad \boxed{\begin{aligned} F &= -\frac{\partial}{\partial x} W_{EM}(x, q) \\ V &= \frac{\partial}{\partial q} W_{EM}(x, q) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \frac{\partial}{\partial x} W'_{EM}(x, V) \\ q &= \frac{\partial}{\partial V} W'_{EM}(x, V) \end{aligned}}$$

דוגמא:



כדי להמחיש את המושגים הללו נבחן את הדוגמא הבאה: נתון קבל לוחות מתכתיים המרוחקים מרחק g האחד מהשני. מימדי הלוחות הן $a \times d$ כמצויר. יש לחשב את הכוח שפועל על השכבה הדיאלקטרית (ϵ_r) הנמצאת במרחק x מהקצה.

אם מזניחים אפקטים של קצה אזי השדה החשמלי נתון על ידי $E \cong V_0 / g$ לכן האנרגיה האגורה היא

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 a g x + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 a g (d - x) \\
 (12.33) \qquad &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{g^2} a g [x + \epsilon_r (d - x)]
 \end{aligned}$$

כך שפונקציית הקו-אנרגיה נתונה על ידי:

$$(12.34) \qquad W'_e = \frac{1}{2} C(x) V^2$$

כאשר $C(x) = \epsilon_0 \frac{a}{g} [x + \epsilon_r (d - x)]$ לכן הכוח הינו

$$\begin{aligned}
 F_e &= \frac{\partial W'_e}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 \frac{a}{g} (1 - \varepsilon_r) \\
 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{a}{g} (\varepsilon_r - 1) V_0^2
 \end{aligned}$$

(12.35)

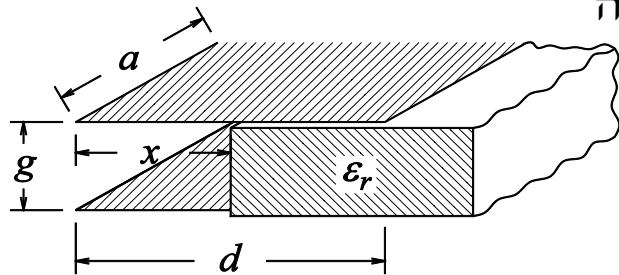
הערות:

- א. הכוח שלילי לכן הוא נוטה למשוך את השכבה הדיאלקטרית פנימה.
- ב. המערכת נוטה לפיכך להגיע למקסימום אנרגיה אלקטרומגנטית!
- ג. אם השכבה יכלה לזוז אזי המתח היה קבוע כי הוא מוכתב חיצונית, ואילו המטען היה משתנה כפונקציה של המקום.
- ד. השינוי במטען במשך זמן התקדמות השכבה הדיאלקטרית, כרוך בזרם. הזרם הזה יחד עם המתח של הסוללה מכתיבים את ההספק החשמלי אשר מניע את השכבה.
- כאשר קצה השכבה נמצא ב- $x = x_0$ מנתקים את מקור המתח. במצב זה יש על הלוחות מטען Q בשיעור

$$Q = V_0 \varepsilon_0 \frac{a}{g} [x_0 + \varepsilon_r (d - x_0)]$$

(12.36)

השאלה שנשאלת היא, מהו הכוח אשר פועל על השכבה הדיאלקטרית במצב זה



במצב זה עוברים להצגה של פונקציית האנרגיה:

איור 12.5: קבל דיאלקטרי – מימדי

$$W_e(x) = \frac{1}{2C(x)} Q^2$$

(12.37)

$$F_e = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2(x)} (-1) \left[\epsilon_0 \frac{a}{g} (1 - \epsilon_r) \right] = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\epsilon_0 \frac{a}{g} (\epsilon_r - 1)}{C^2(x)} < 0$$

גם במקרה זה הכוח הוא שלילי ומושך את השכבה הדיאלקטרית לכיוון הקצה

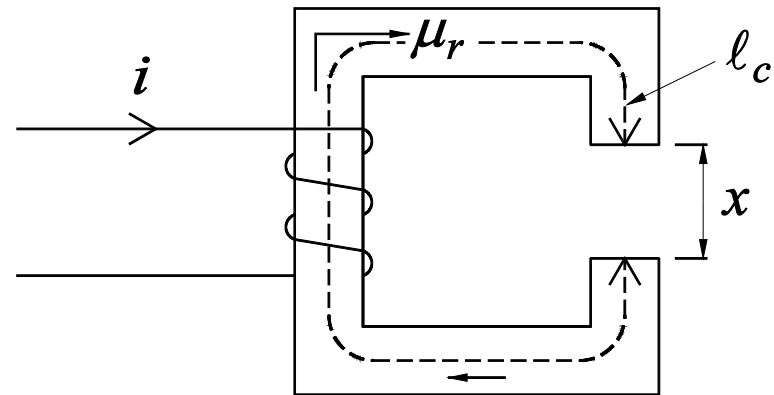
$$\begin{aligned} F_e(x) &= -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\epsilon_0 \frac{a}{g} (\epsilon_r - 1)}{\left(\epsilon_0 \frac{a}{g} \right)^2 [x + \epsilon_r (d - x)]^2} \\ &= -\frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{\epsilon_0 \frac{ad}{g}} \frac{d(\epsilon_r - 1)}{[x + \epsilon_r (d - x)]^2} \end{aligned}$$

(12.38)

שים לב שכוח זה משתנה במרחב.

היתרון המשמעותי של השיטה לחישוב כוח אשר הוכנסה בסעיף הקודם, הוא בפשטות החישוב. נבחן עתה דוגמא המתבססת על מעגל מגנטי המורכב מאלקטרו-מגנט בעירור זרם

נתונה הקונפיגורציה המצוירת באיור 12.6, השאלה שנשאלת היא מהו הכוח שפועל על כל אחד מהקטבים?



איור 12.6: אלקטרו-מגנט בעירור זרם

מתוך חוק אמפר

$$(12.39) \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_c \ell_c + H_g x = Ni$$

ואילו מתוך $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ בהזנחת אפקטי קצוות מתקיים:

$$(12.40) \quad \begin{aligned} \oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 &\Rightarrow \Phi = B_c A = B_g A \\ \Rightarrow H_c &= \frac{\Phi}{A} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \Rightarrow H_g = \frac{\Phi}{A} \frac{1}{\mu_0} \end{aligned}$$

מציבים במשוואה הראשונה ומקבלים

$$(12.41) \quad \Phi = \frac{NiA\mu_0}{x + \ell_c / \mu_r}$$

נחשב עתה את האנרגיה המגנטית במרווח האוויר (*gap*)

$$\begin{aligned}
 (12.42) \quad W_g &= \frac{1}{2} \mu_0 H_g^2 x A = \frac{1}{2} \mu_0 \left[\frac{Ni}{x + \ell_c / \mu_r} \right]^2 x A \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mu_0 N^2 \frac{x A}{(x + \ell_c / \mu_r)^2} \right] i^2
 \end{aligned}$$

בצורה דומה האנרגיה המגנטית האגורה בליבה (*core*):

$$\begin{aligned}
 (12.43) \quad W_c &= \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H_c^2 \ell_c A = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \left[\frac{Ni / \mu_r}{x + \ell_c / \mu_r} \right]^2 \ell_c A \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mu_0 N^2 \frac{A \ell_c / \mu_r}{(x + \ell_c / \mu_r)^2} \right] i^2
 \end{aligned}$$

כך שהאנרגיה המגנטית הכוללת האגורה הינה:

$$(12.44) \quad W_{tot} = W_c + W_g = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

$$(12.45) \quad \boxed{L(x) = \mu_0 N^2 \frac{A}{x + \ell_c / \mu_r}}$$

ראינו שבמקרה של מעגלים מגנטיים

(12.46)

$(x, i) \rightarrow$ Coenergy Function	$(x, \Phi) \rightarrow$ Energy Function
$\Phi = \frac{\partial W'_M}{\partial i}$ $F_e = \frac{\partial W'_M}{\partial x}$	$i = \frac{\partial W_M}{\partial \Phi}$ $F_e = -\frac{\partial W_M}{\partial x}$

לכן במקרה שלנו

$$(12.47) \quad W'_M = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

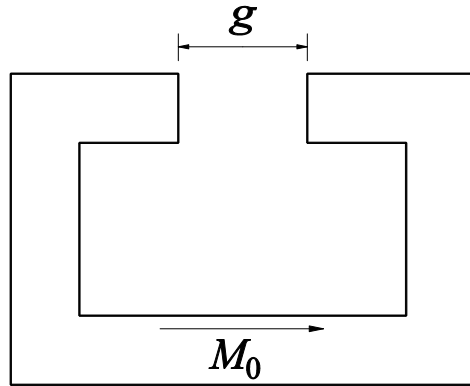
כי העירור הוא עירור זרם – מכאן שהכוח נתון על ידי

$$(12.48) \quad F_e = \frac{\partial}{\partial x} W'_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 N^2 \mu_0 \frac{-A}{(x + \ell_c / \mu_r)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(iM)^2 \mu_0 A}{(x + \ell_c / \mu_r)^2} < 0$$

זהו כוח שלילי, כלומר הקטבים מושכים זה את זה כיוון

$$(12.49) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -|F_e|$$



איור 12.7: מגנט קבוע

ראינו שעם זרם מאולץ שני הקטבים של אלקטרומגנט מושכים האחד את השני. נניח עתה שבמקום זרם חיצוני המגנט עשוי חומר פרומגנטי עם מגנוט קובע והשאלה מהו הכוח בין שני הקטבים במצב זה.

$$(12.50) \quad B = \mu_0 (M + H)$$

$$(12.51) \quad M = M_0$$

מאחר ואין מקורות זרם אזי

$$(12.52) \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow H_c \ell + H_g g = 0 \Rightarrow \boxed{H_c = -H_g g / \ell_c}$$

עם זאת, השטף נשמר:

$$(12.53) \quad \Phi = B_c A = B_g A$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_0 (M_0 + H_c) A = A \mu_0 H_g}$$

אם נציב את H_c נקבל

$$(12.54) \quad M_0 + (-) H_g \frac{g}{\ell_c} = H_g$$

$$\boxed{H_g = \frac{M_0}{1 + g / \ell_c}}$$

$$(12.55) \quad B_g = \mu_0 M_0 \frac{1}{1 + g/\ell_c}$$

זאת אומרת H_g ו- B_g הינם מקבילים. נבחן כעת מה קורה בליבה:

$$(12.56) \quad H_c = -H_g \frac{g}{\ell_c} = \boxed{-M_0 \frac{g/\ell_c}{1 + g/\ell_c}}$$

ואילו האינדוקציה המגנטית

$$(12.57) \quad \begin{aligned} B_c &= \mu_0 [M + H_c] \\ &= \mu_0 \left[M_0 + (-)M_0 \frac{g/\ell_c}{1 + g/\ell_c} \right] = \mu_0 M_0 \frac{1}{1 + g/\ell_c} \end{aligned}$$

מבנה השדה המגנטי הוא שונה ממה שראינו עד כה. השדה המגנטי **מנוגד** בכוונו לאינדוקציה המגנטית. נחשב כעת את האנרגיה הכוללת במערכת:

$$\begin{aligned}
 (12.58) \quad W &= \overbrace{\frac{1}{2} \mu_0 H_g^2 A g}^{gap} + \overbrace{\frac{1}{2} B_c H_c \ell_c A}^{core} \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 A g \frac{M_0^2}{(1 + g/\ell_c)^2} + \frac{1}{2} \ell_c A \left[\frac{\mu_0 M_0}{1 + g/\ell_c} \right] \left[\frac{-g/\ell_c M_0}{1 + g/\ell_c} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 A M_0^2 \left[g \frac{1}{(1 + g/\ell_c)^2} + \ell_c \frac{(-g)/\ell_c}{(1 + g/\ell_c)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$(12.59) \quad \boxed{W=0}!!$$

על המערכת לא פועל כל מקור (מתח או זרם) **חיצוני** לכן היא נמצאת במצב האנרגטי הנמוך ביותר האפשרי. אבל אנחנו יודעים שהקוטב של מגנט קבוע אחד מושך את הקוטב ההפוך של מגנט קבוע אחר, אז בטוח שהוא מושך את שלו עצמו!!

המערכת שתיארנו זה עתה הינה מערכת **סגורה** לכן ברור שהכוח **החיצוני** הוא אפס. אולם אם נבודד את המקור של האנרגיה, קרי המגנוט של החומר, אזי נוכל לקבל מושג על הכוח שפועל על הקטבים.

$$(12.60) \quad W = \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 H_g^2 A g}_{\text{gap}} + \underbrace{\frac{1}{2} B_c H_c \ell_c A}_{\text{core}} - \frac{1}{2} \mu_0 M_0 H_c A \ell_c$$

$$\approx \frac{1}{2} \mu_0 M_0^2 A \frac{g}{1 + g/\ell_c}$$

אם הליבה ארוכה בהרבה ממרווח האוויר אזי רוב האנרגיה אגורה במרווח האוויר.

$$(12.61) \quad W \approx \frac{1}{2} \mu_0 M_0^2 A g$$

המגנט של החומר קובע את השטף $\Phi \equiv \mu_0 M_0 A$ [הזרם הוא אפס? ?] לכן

לכן

$$(12.62) \quad W = \frac{1}{2} (\mu_0 M_0 A)^2 \frac{g}{\mu_0 A}$$

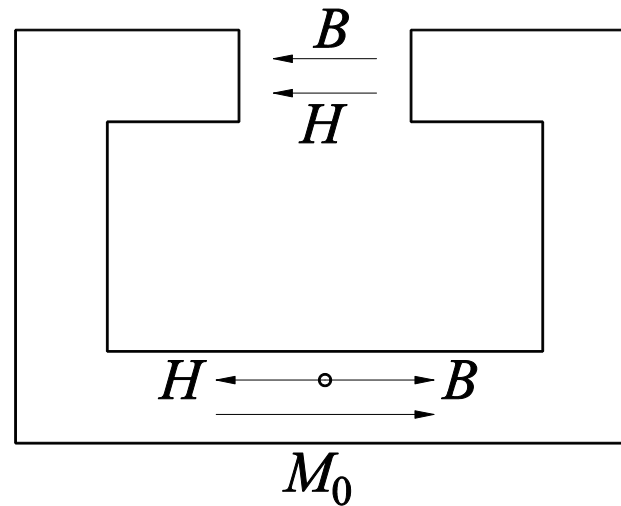
$$= \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{g}{\mu_0 A} = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{L(g)}$$

כאשר $L(g) = \mu_0 \frac{A}{g}$ זוהי פונקציית האנרגיה

$$(12.63) \quad W_M = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{L(g)}$$

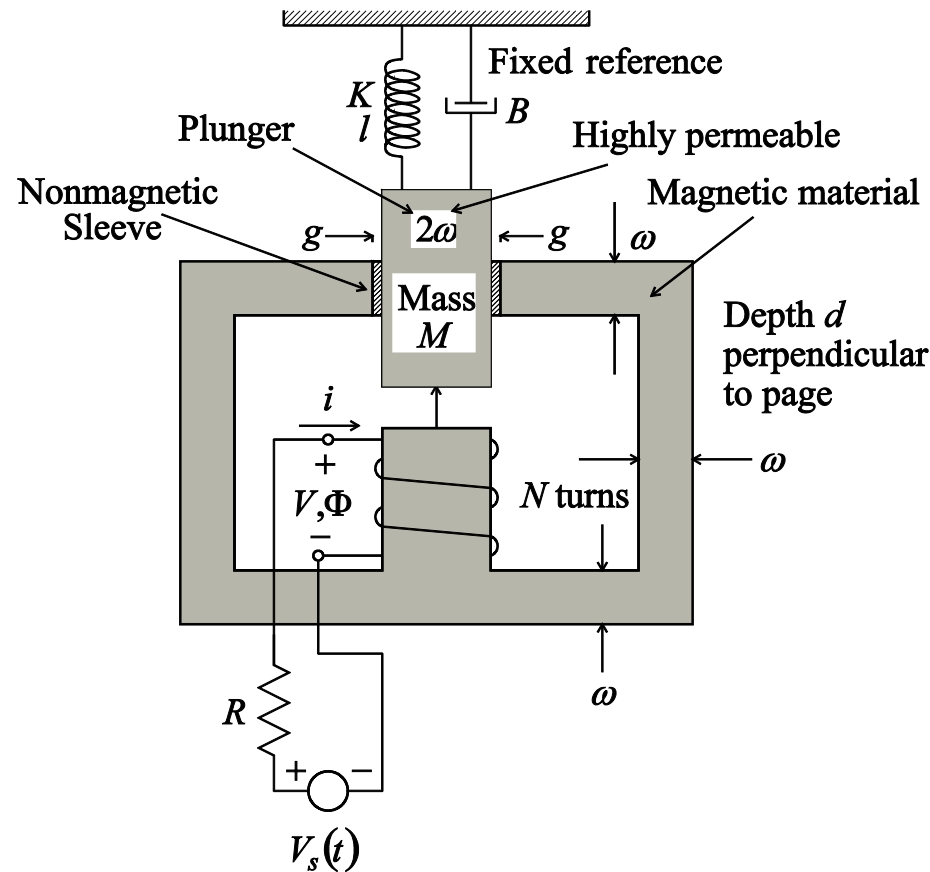
$$\begin{aligned}
 (12.64) \quad F_e &= -\frac{\partial W_M}{\partial g} = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{-1}{L^2(g)} \frac{dL}{dg} = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{L^2(g)} (-) \mu_0 \frac{A}{g^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{L(g)} \frac{1}{g} \approx -\frac{1}{2} \mu_0 M_0^2 A
 \end{aligned}$$

הכוח הזה (בהנחה ש- $g \gg \ell_c$ הוא בלתי תלוי ב- g או ב- ℓ_c).



איור 12.8: תיאור כיווני השדות

נתונה המערכת המתוארת באיור 12.9. יש לחשב את התנועה של המוט בהינתן מקור המתח $V_s(t)$



איור 12.9: מערכת מגנטו-מכנית

במצב שהמוט בעל המסה M מקצר את המעגל המגנטי ההשראות היא

$$(12.65) \quad L_0 = \mu_0 N^2 \frac{(2w)d}{g}$$

ואילו כאשר המוט נמצא במרחק $x \neq 0$ ההשראות היא

$$(12.66) \quad L(x) = \mu_0 N^2 \frac{(2w)d}{g} \frac{1}{1+x/g} = \frac{L_0}{1+x/g}$$

השטף המגנטי לפיכך הוא

$$(12.67) \quad \Phi = L(x)i$$

הערור החשמלי מגדיר את המשוואה הראשונה:

$$(12.68) \quad V_s(t) = iR + \frac{d}{dt} \Phi = iR + \frac{d}{dt} [L(x)i] = iR + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{d}{dt} L(x)$$

ולכן

$$(12.69) \quad V_s(t) = iR + \frac{L_0}{1+x/g} \frac{di}{dt} + iL_0 \frac{-1/g}{(1+x/g)^2} \frac{dx}{dt}$$

בבעיה שלנו ישנם שני משתנים x ו- i לכן עלינו לקבוע עוד משוואה אחת על מנת שאפשר יהיה לפתור את הבעיה. המשוואה השנייה תקבע מתוך משוואת התנועה של המוט. לשם כך נקבע את הכוח המגנטי שהמעגל מפעיל על המוט. פונקצית הקו-אנרגיה במקרה שלנו נתונה על ידי:

$$(12.70) \quad W'_M = \frac{1}{2} \frac{L_0}{1+x/g} i^2$$

וכפי שכבר ציינו

$$(12.71) \quad F_e = \frac{\partial W'_M(x, i)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{L_0/g}{(1+x/g)^2} i^2$$

ולכן

$$(12.72) \quad M_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{L_0/g}{(1+x/g)^2} i^2 - \underbrace{B \frac{dx}{dt}}_{\text{חיכוך}} + \underbrace{k(\ell-x)}_{\substack{\text{הקפיץ מתנגד} \\ \text{לתנועה של} \\ \text{המוט}}} - \underbrace{g_0 M}_{\text{גרויטציה}}$$

נשים לב שזהו סט של משוואות **לא ליניאריות** לכן הפתרון אינו פשוט. כדי להמחיש פתרון אפשרי נניח שמקור

המתח מורכב משני חלקים מתח DC , $V_s = V_0$, ומתח מחזורי עם תדר Ω כאשר

$$(12.73) \quad V_s = V_0 + V_1 \cos \omega t$$

ונתון ש- $V_0 \gg V_1$.

ההנחה האחרונה תאפשר לנו לפתור את הבעיה בשיטת ההפרעות: תחילה נזניח את ההפרעה המחזורית ומאחר

והעירור הוא קבוע נחפש את הפתרון שהוא בלתי תלוי בזמן – קרי שווי משקל. במצב זה כל הנגזרות

הזמניות הן אפס $\frac{d}{dt} = 0$: לכן:

$$(12.74) \quad V_0 = iR + \frac{L_0}{1+g} \frac{di}{dt} + iL_0 \frac{(-1/g)}{(1+x/g)^2} \frac{dx}{dt}$$

$$(12.75) \quad \frac{M_0}{dt^2} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{L_0/g}{(1+x/g)^2} i^2 - B \frac{dx}{dt} + K(L-x) - Mg_0$$

נסמן ב- x_0 ו- i_0 את מצב שווי המשקל של המערכת:

$$(12.76) \quad V_0 = i_0 R$$

$$(12.77) \quad -\frac{1}{2} \frac{L_0/g}{(1+x_0/g)^2} i_0^2 + k(\ell - x_0) - Mg_0 = 0$$

נניח כעת הנחה נוספת והיא ש- $x_0/g \gg 1$ לכן

$$(12.78) \quad \boxed{i_0 = \frac{V_0}{R}}$$

$$(12.79) \quad \boxed{x_0 = \ell - \frac{M}{k} g_0 - \frac{L_0/g}{2k} \left(\frac{V_0}{R} \right)^2}$$

ההנחה הבסיסית עד כה הייתה שמעשית $V_1 = 0$. כעת נרפה מההנחה הזו ונניח רק ש- $V_1 \neq 0$ אבל מספיק קטן כך שהוא יוצר הפרעות מסדר ראשון (בטור טיילור) בגדלים האחרים קרי i ו- x :

$$(12.80) \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + x_1 \\ i(t) &= i_0 + i_1 \end{aligned}$$

אם נציב במשוואות נקבל:

$$(12.81) \quad \underbrace{V_0}_{\text{סדר אפס}} + \underbrace{V_1 \cos \omega t}_{\text{סדר 1}} = (i_0 + i_1)R + L_0 \frac{d}{dt}(i_0 + i_1) - L_0 (i_0 + i_1) \frac{d}{dt} \left(\frac{x_0 + x_1}{g} \right)$$

$$= \underbrace{i_0 R}_{\text{סדר אפס}} + \underbrace{i_1 R}_{\text{סדר 1}} + \underbrace{L_0 \frac{d}{dt} i_1}_{\text{סדר 1}} - \frac{L_0}{g} \left[\underbrace{i_0 \frac{dx_0}{dt}}_{\text{סדר אפס}} + \underbrace{i_0 \frac{d}{dt} x_1}_{\text{סדר 1}} + \underbrace{i_1 \frac{dx_0}{dt}}_{\text{סדר 1}} + \underbrace{i_1 \frac{dx_1}{dt}}_{\text{סדר שני}} \right]$$

המשוואה של הסדר אפס כבר רשמנו אותה והיא

$$(12.82) \quad V_0 = i_0 R$$

ואילו המשוואה של הסדר הראשון היא

(12.83)

$$V_1 \cos \omega t = i_1 R + L_0 \frac{d}{dt} i_1 - \frac{L_0}{g} i_0 \frac{dx_1}{dt}$$

זהו התיקון מסדר 1 של משוואת קירכהוף. נבצע כעת פעולה דומה עבור משוואת התנועה

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x_0 + x_1) = -\frac{1}{2} L_0 (i_0 + i_1)^2 - B \frac{d}{dt} (x_0 + x_1) + k(\ell - x_0 - x_1) - Mg_0$$

(12.84)

סדר 1

$$= -\frac{1}{2} L_0 \left(\underbrace{i_0^2}_{\substack{\text{סדר} \\ \text{אפס}}} + \underbrace{2i_0 i_1}_{\substack{\text{סדר} \\ \text{ראשון}}} + \underbrace{i_1^2}_{\substack{\text{סדר} \\ \text{שני}}} \right) - \underbrace{B \frac{dx_1}{dt}}_{\substack{\text{סדר} \\ \text{ראשון}}} + \underbrace{k(\ell - x_0)}_{\substack{\text{סדר אפס}}} - \underbrace{kx_1}_{\substack{\text{סדר} \\ \text{ראשון}}} - \underbrace{Mg_0}_{\substack{\text{סדר} \\ \text{אפס}}}$$

כזכור המשוואה מסדר אפס היא

(12.85)

$$0 = -\frac{1}{2} L_0 i_0^2 + k(\ell - x_0) - Mg_0$$

לכן, המשוואה מסדר ראשון הינה:

(12.86)

$$M \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -\frac{1}{2} \frac{L_0}{g} 2i_0 i_1 - B \frac{dx_1}{dt} - kx_1$$

נוח לעבור לרישום פאזורי, לכן

$$(12.87) \quad \bar{V}_1 = \bar{i}_1 R + L_0 j \omega \bar{i}_1 - \frac{L_0 i_0}{g} j \omega \bar{x}_1$$

$$(12.88) \quad -M \omega^2 \bar{x}_1 = -\frac{L_0}{g} i_0 \bar{i}_1 - j \omega B \bar{x}_1 - k \bar{x}_1$$

או בצורה מטריצית

$$(12.89) \quad \begin{pmatrix} R + j \omega L_0 & -j \omega \frac{L_0 i_0}{g} \\ \frac{L_0 i_0}{g} & k + j \omega B - M \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

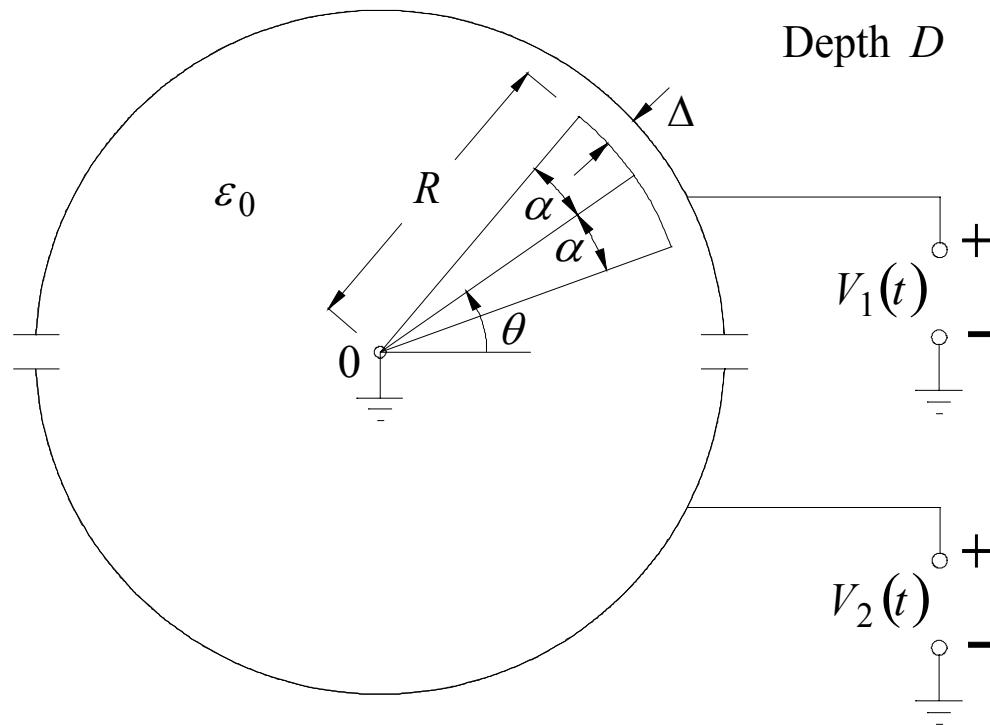
$$(12.90) \quad \begin{pmatrix} I_1(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left\{ e^{j \omega t} \begin{pmatrix} R + j \omega L_0 & -\frac{j \omega L_0 i_0}{g} \\ \frac{L_0 i_0}{g} & k + j \omega B - M \omega^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כצפוי שני הגדלים $i_1(t)$ ו- $x_1(t)$ תלויים ליניארית.

תרגיל עצמי: נתח את התדרים העצמיים של המערכת. זהה את גורם הצימוד. כיצד הוא משפיע על התדרים העצמיים.

12.5 מערכת אלקטרו-מכנית

כיום, רוב המערכות האלקטרו-מכניות המזעריות מתבססות דווקא על אנרגיה וכוחות חשמליים. הדוגמא הבאה



תמחיש זאת. נתונה קשת מתכתית ברוחב $2\alpha R$ ועומק D הקשורה למוט מוליך אשר יכול להסתובב סביב ציר 0. זוג אלקטרודות מוליכות בצורה של חצי גליל עם אותו ציר. המרווח הוא קטן מאוד $\Delta \ll R$ ואנחנו מתעלמים מתופעות קצה. מטרתנו לנתח את הדינמיקה של האלקטרודה המסתובבת.

איור 12.10: מערכת חשמלית

א. פונקצית הקו אנרגיה.

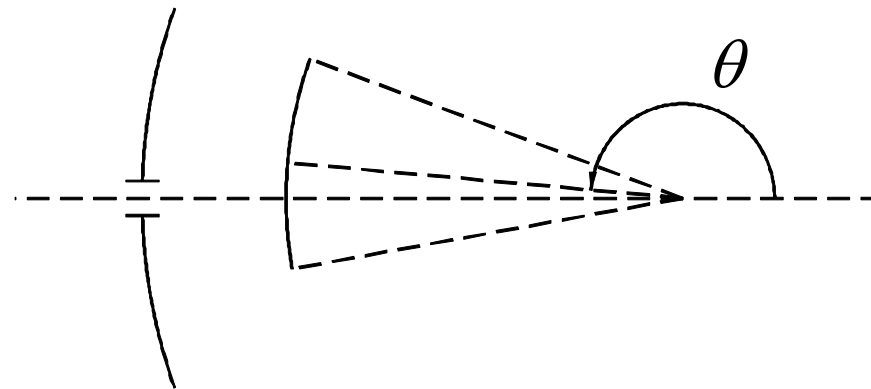
1. $\pi - \alpha > \theta > \alpha$ במצב זה הלוח התחתון רואה רק את הפוטנציאל V_1 לכן: $W' = \frac{1}{2} C V_1^2$ כאשר

$$(12.91) \quad C = \epsilon_0 \frac{(2\alpha R) D}{\Delta}$$

2. $\pi + \alpha > \theta > \pi - \alpha$ במצב זה חלק מהלוח הנייד חשוף למתח V_1 . החלק הזה הוא $[\alpha - (\theta - \pi)]$ לכן

הקיבול הקשור לכך הוא

$$(12.92) \quad C_1 = \epsilon_0 \frac{[\alpha - (\theta - \pi)] R D}{\Delta}$$



איור 12.11: חתך המעגל עבור $\pi + \alpha > \theta > \pi - \alpha$

בצורה דומה הקיבול הקשור ל"חיתוך" עם חצי הגליל התחתון הוא

$$(12.93) \quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{[\alpha + (\theta - \pi)]RD}{\Delta}$$

לפיכך סה"כ האנרגיה הינה

$$(12.94) \quad W = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2$$

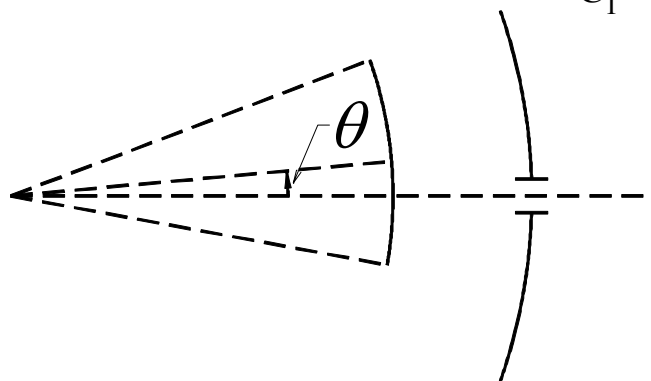
3. במצב זה קיימת חפיפה מלאה בין הלוח הנייד לחצי הגליל התחתון לכן $2\pi - \alpha > \theta > \pi + \alpha$

$$(12.95) \quad W = \frac{1}{2}CV_2^2$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{(2\alpha R)D}{\Delta}$$

4. במצב זה החלק החשוף לחצי הגליל העליון הוא $\alpha + \theta$. לכן הקיבול הוא $\alpha > \theta > -\alpha$

$$(12.96) \quad C_1 = \varepsilon_0 \frac{(\alpha + \theta)RD}{\Delta}$$



איור 12.12: חתך המעגל במקרה $\alpha > \theta > -\alpha$

$$(12.97) \quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{(\alpha - \theta) RD}{\Delta}$$

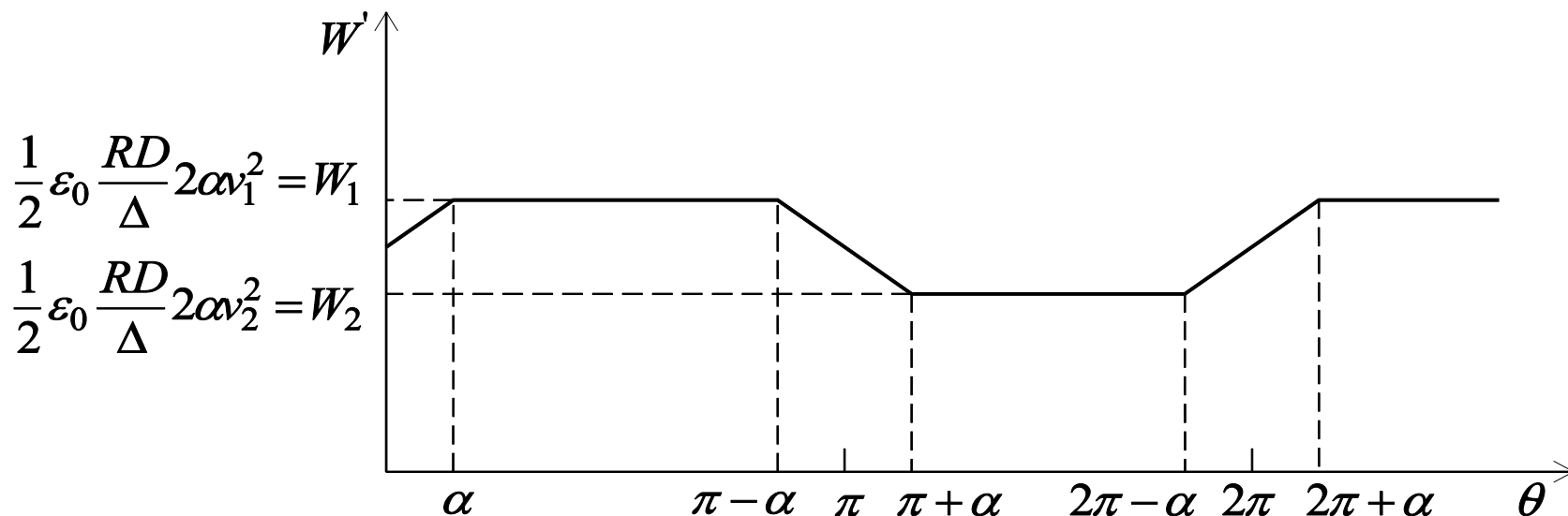
כך שסה"כ האנרגיה היא

$$(12.98) \quad W = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

לסכום פונקצית הקו אנרגיה

$$(12.99) \quad W'(\theta_1, V_1, V_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{RD}{\Delta} [(\alpha + \theta) V_1^2 + (\alpha - \theta) V_2^2] & -\alpha < \theta < \alpha \\ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{RD}{\Delta} [2\alpha V_1^2] & \alpha < \theta < \pi - \alpha \\ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{RD}{\Delta} [(\alpha - \theta + \pi) V_1^2 + (\alpha - \pi + \theta) V_2^2] & \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha \\ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{RD}{\Delta} [2\alpha V_2^2] & \pi + \alpha < \theta < 2\pi - \alpha \end{cases}$$

אם נניח ש- $V_2 < V_1$ אזי הציור של W' יראה כך:



איור 12.13: תיאור גרפי של פונקציית הקו-אנרגיה כתלות ב- θ

מתוך השרטוט הזה אנו יכולים להסיק מיידית על מומנט הכוח המופעל על הציר:

$$(12.100) \quad N = \frac{\partial W'}{\partial \theta}$$

לכן

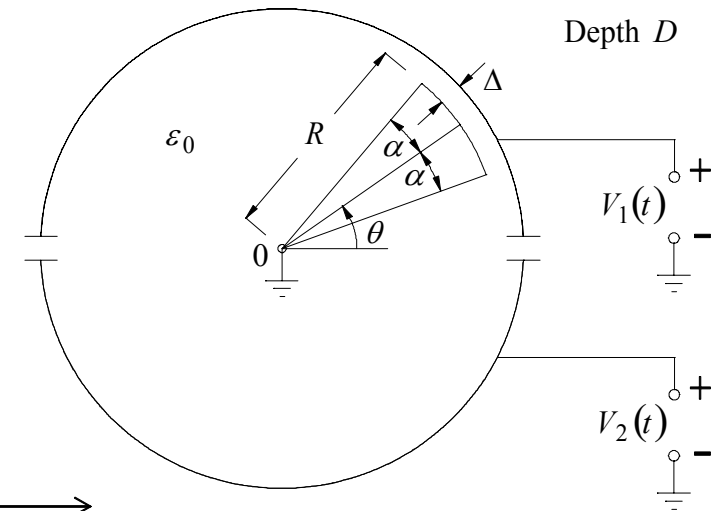
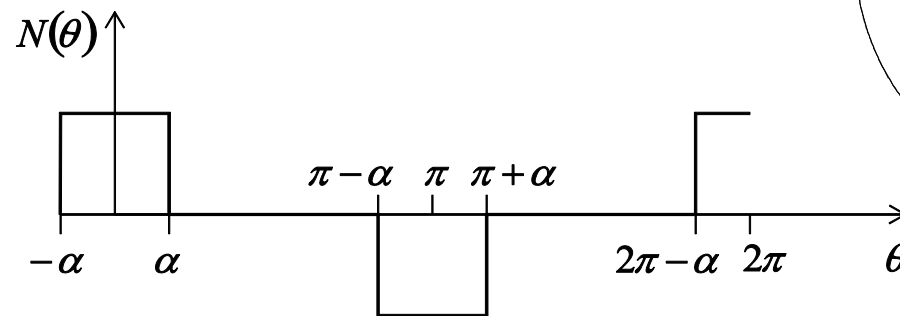
$$(12.101) \quad \frac{N}{\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{RD}{\Delta}} = \begin{cases} V_1^2 - V_2^2 & -\alpha < \theta < \alpha \\ 0 & \alpha < \theta < \pi - \alpha \\ -V_1^2 + V_2^2 & \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < \theta < 2\pi - \alpha \end{cases}$$

הדינמיקה של החלק המסתובב (הרוטור) בהזנחת או כוח הכובד או כל כוח אחר חוץ מהחשמלי, אזי אם נסמן ב- I את מומנט האינרציה.

$$(12.102) \quad I \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = N(\theta)$$

$$(12.103) \quad \begin{cases} N_0 & -\alpha < \theta < \alpha \\ 0 & \alpha < \theta < \pi - \alpha \\ -N_0 & \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < \theta < 2\pi - \alpha \end{cases}$$

$$(12.104) \quad N_0 \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{RD}{\Delta} (V_1^2 - V_2^2)$$



איור 12.14: מומנט הכוח כפונקציה של θ

את המומנט $N(\theta)$ ניתן לפתח לטור פורייה

$$(12.105) \quad N(\theta) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v \cos(v\theta)$$

$$(12.106) \quad g_v = \begin{cases} 1 & v = 0 \\ \frac{1}{2} & v \neq 0 \end{cases} \quad g_v A_v = \frac{N_0}{2\pi} \left[\int_0^{\alpha} d \cos(v\theta) - \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} d\theta \cos(v\theta) + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} d\theta \cos v\theta \right]$$

לפיכך:

$$(12.107) \quad A_{v=2\sigma+1} = \frac{4}{\pi} \alpha N_0 \operatorname{sinc}[(2\sigma+1)\alpha]$$

כך שהמומנט נתון על ידי

$$(12.108) \quad N(\theta) = \frac{4}{\pi} \alpha N_0 \sum_{v=0}^{\infty} \operatorname{sinc}[(2v+1)\alpha] \cos[(2v+1)\theta]$$

משוואת התנועה נתונה בצורה מפורשת על ידי

$$(12.109) \quad \text{מומנט אינרציה} \rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{4}{\pi} \alpha N_0 \sum_{v=0}^{\infty} \operatorname{sinc}[(2v+1)\alpha] \cos[(2v+1)\theta]$$

כמו במקרה של המכונה המגנטית נכפיל ב- $\frac{d\theta}{dt}$ ונקבל

$$(12.110) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{4 N_0}{\pi I} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin[(2v+1)\alpha] \sin[(2v+1)\theta]}{(2v+1)^2} \right] = 0$$

$$(12.111) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{4 N_0}{\pi I} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin[(2v+1)\alpha] \sin[(2v+1)\theta]}{(2v+1)^2} = \text{const}$$

נניח שב- $t = 0$: $\theta = \theta_0$ וכן $\frac{d\theta}{dt} = \Omega$

$$(12.112) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{4 N_0}{\pi I} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin[(2v+1)\alpha] \sin[(2v+1)\theta]}{(2v+1)^2} = \frac{1}{2} \omega_0^2$$

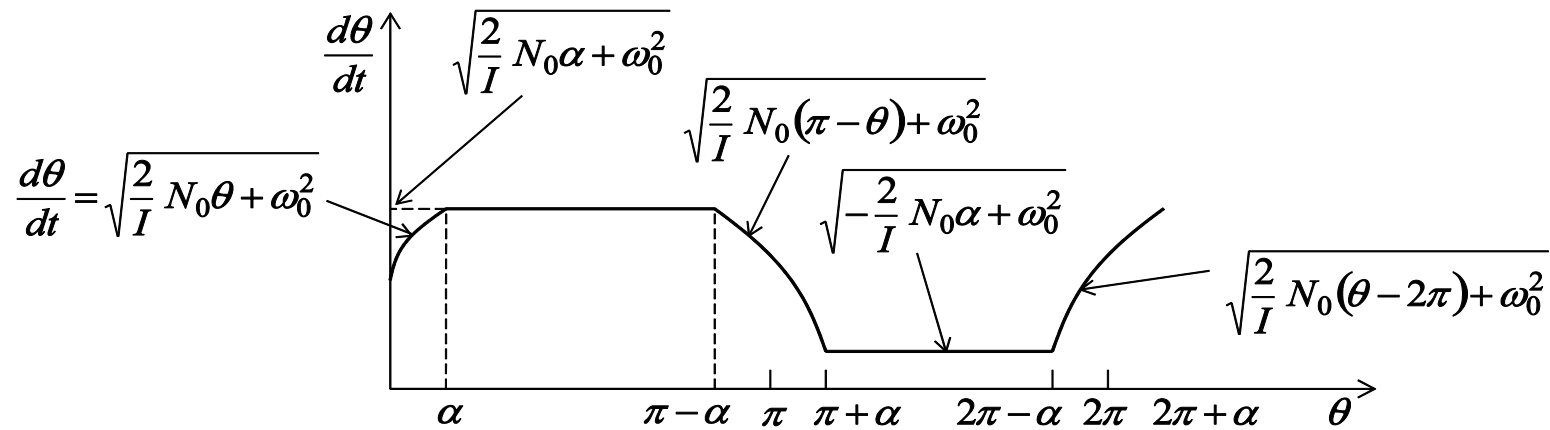
כאשר

$$(12.113) \quad \frac{1}{2} \omega_0^2 \equiv \frac{1}{2} \Omega^2 - \frac{4 N_0}{\pi I} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin[(2v+1)\alpha] \sin[(2v+1)\theta_0]}{(2v+1)^2}$$

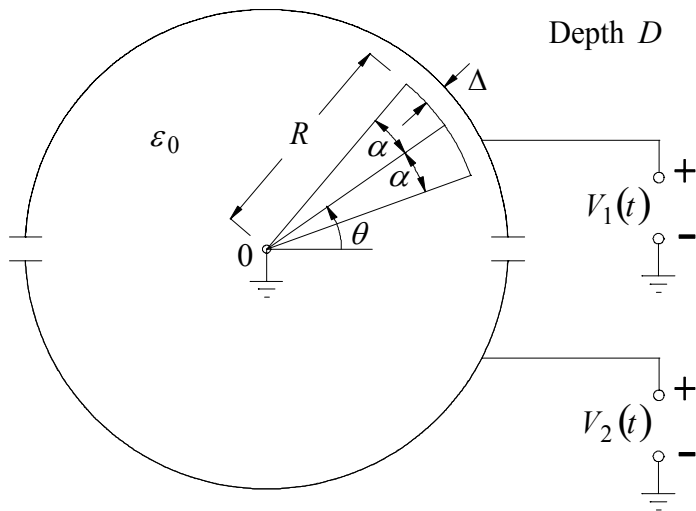
בהתחשב שאת מומנט הכוח ניתן לרשום כ :

$$(12.114) \quad N(\theta) = \frac{4}{\pi} N_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin[(2\nu+1)\alpha] \cos[(2\nu+1)\theta]}{2\nu+1}$$

מאחר ומומנט הכוח נתון באיור 12.14, אפשר לרשום את $\frac{d\theta}{dt}$ כפונקציה של θ :



איור 12.15: השינוי הזמני של θ כפונקציה של θ



נחשב כעת את המהירות הזוויתית הממוצעת

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\alpha d\theta \sqrt{\frac{2}{I} N_0 \theta + \omega_0^2} + \int_\alpha^{\pi-\alpha} d\theta \sqrt{\frac{2}{I} N_0 \alpha + \omega_0^2} \right. \\
&\quad + \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} d\theta \sqrt{\frac{2}{I} N_0 (\pi - \theta) + \omega_0^2} + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} d\theta \sqrt{-\frac{2}{I} N_0 \alpha + \omega_0^2} \\
&\quad \left. + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} d\theta \sqrt{\frac{2}{I} N_0 (\theta - 2\pi) + \omega_0^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{I} N_0 \alpha} + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2}{I} N_0 \alpha} \right] \\
&\quad + \frac{I}{3\pi N_0} \left[\left(\omega_0^2 + \frac{2}{I} N_0 \alpha \right)^{3/2} - \left(\omega_0^2 - \frac{2}{I} N_0 \alpha \right)^{3/2} \right]
\end{aligned}$$

הערה I:

אם מניחים ש- $\omega_0^2 \gg \frac{2}{I} N_0 \alpha$

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle &= \omega_0 + \frac{I}{3\pi N_0} \omega_0^3 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{2 N_0 \alpha}{I \omega_0^2} - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{2 N_0 \alpha}{I \omega_0^2} \right) \right] \\
 &\approx \omega_0 + \frac{I}{3\pi N_0} \omega_0^3 \frac{3}{2} \frac{2 N_0 \alpha}{I \omega_0^2} \\
 &\approx \omega_0 \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \right] \\
 &\Rightarrow \boxed{\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle \approx \omega_0 \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \right]}
 \end{aligned}$$

(12.116)

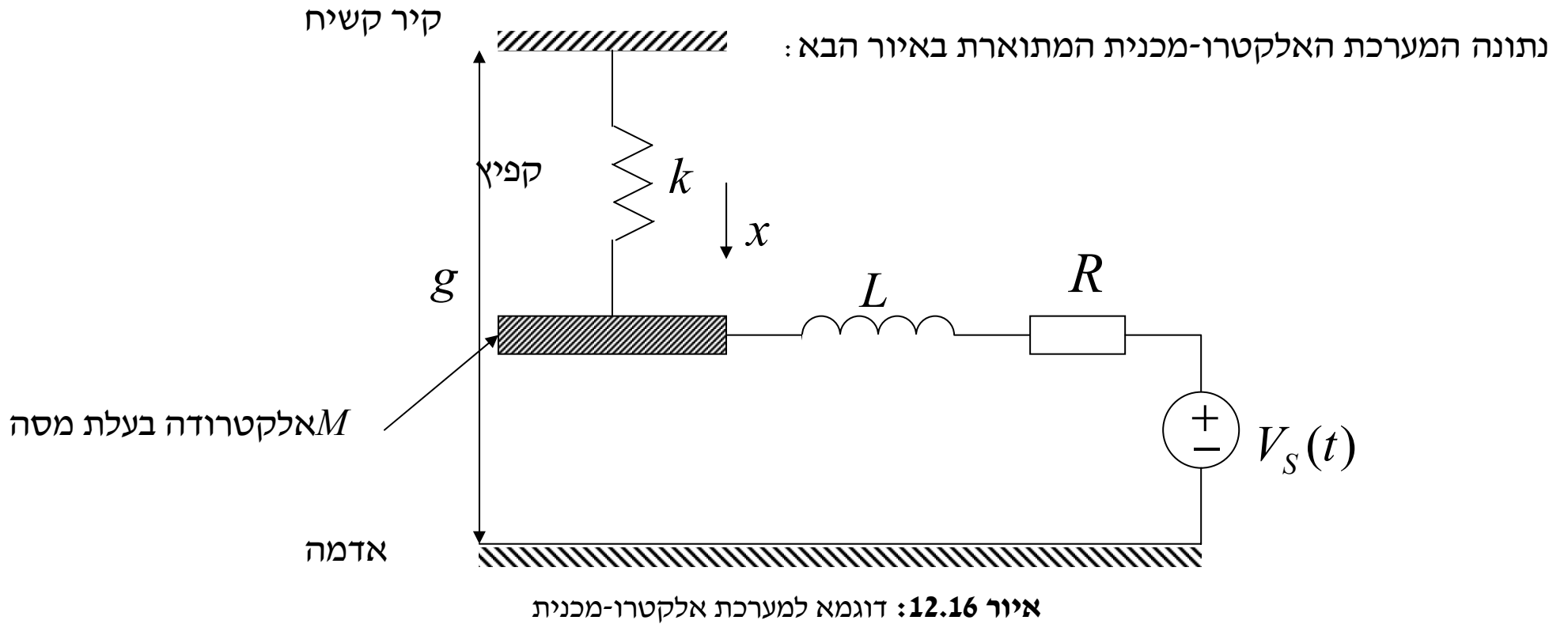
הערה II:

התנאי לקיום פתרון יציב הינו שהארגומנט של השורש הוא ממשי קרי

$$\boxed{\omega_0^2 > \frac{2}{I} |N_0| \alpha}$$

(12.117)

12.6 דוגמא מסכמת



נתון ש-

- תנאי התחלה אפס על הקבל והסליל.
- מקור מתח ידוע.
- האלקטרו-מכנית חופשית לתנועה בכיוון ציר x .
- האלקטרו-מכנית במנוחה בזמן $t < 0$.

מטרות:

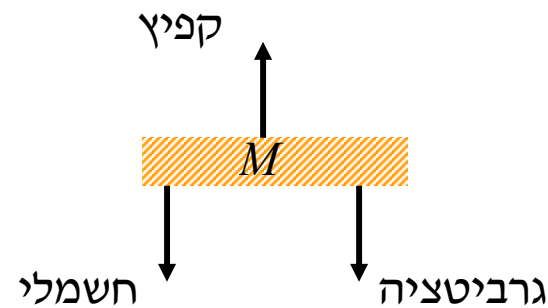
1. יש לנסח את המשוואות המתארות את פעולת המערכת.
2. יש לנתח את המעגל ולמצוא פתרונות פשוטים.

חלק 1 – ניסוח משוואות

צעד #1: משוואות התנועה:

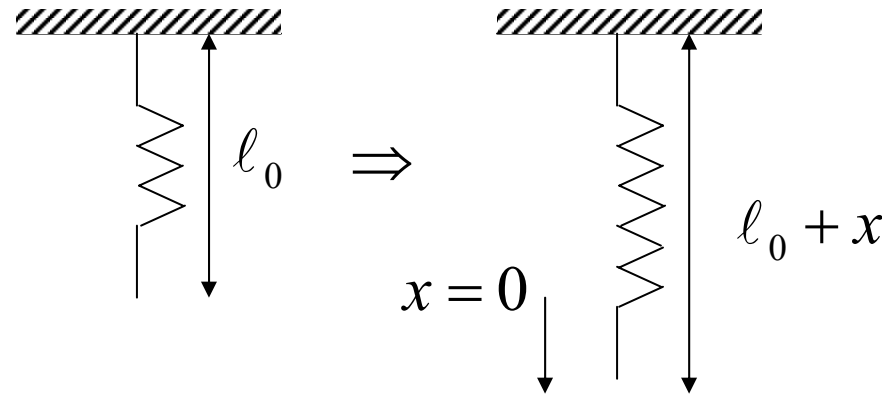
על המסה M פועלים שלוש כוחות:

- הכוח של הקפיץ
- כוח הכובד
- הכוח החשמלי אשר בגללו הלוח נמשך לאדמה



איור 12.17: שקול הכוחות הפועל על המסה

ללא המסה אורכו של הקפיץ (רפוי) הוא l_0 . נגדיר את x כמתיחה או כיווץ הקפיץ יחסית לאורכו l_0 . הכיוון החיובי של ציר ה- x נבחר כלפי מטה.



איור 12.18: התארכות הקפיצים

משוואת התנועה עבור המסה הינה:

$$(12.118) \quad M \frac{d^2}{dt^2} x = -kx + Mg + F_{el}$$

בשלב הבא יש לקבוע את הכוח החשמלי. אך לפני זה כדאי לשים לב לשלוש עובדות:

א. בהעדר כוח חשמלי ($F_{el} = 0$) המערכת נמצאת במצב שיווי משקל.

$$(12.119) \quad 0 = M \frac{d^2}{dt^2} x = -kx + Mg$$

ואז מתקבלת נקודת שיווי משקל x_{eq} קבועה בזמן

$$(12.120) \quad x_{eq} = g \frac{M}{k}$$

ב. אם מוציאים את המסה משיווי משקל (עדיין $F_{el} = 0$)

$$(12.121) \quad x(t) = x_{eq} + \delta x$$

המסה מתחילה להתנדנד

$$(12.122) \quad M \frac{d^2}{dt^2} (x_{eq} + \delta x) = -k(x_{eq} + \delta x) + Mg = -k\delta x$$

$$(12.123) \quad M \frac{d^2}{dt^2} \delta x = -k\delta x$$

$$(12.124) \quad \frac{d^2}{dt^2} \delta x + \underbrace{\frac{k}{M}}_{\Omega^2} \delta x = 0$$

לכן הפתרון כמו במעגל LC הוא

$$(12.125) \quad \delta x(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$$

בהנחה שהמתיחה ב- $t = 0$ היא $\delta x(t = 0) = \delta_0$ וברגע זה המסה במנוחה, אזי

$$(12.126) \quad \delta x(t) = \delta_0 \cos(\Omega t)$$

וזוהי התנועה המכנית האופיינית של המשקולת (האלקטרודה)

ג. אם הכוח החשמלי הוא קבוע $F_{el} = F_0$ אזי האלקטרודה מסתדרת במצב של שיווי משקל חדש.

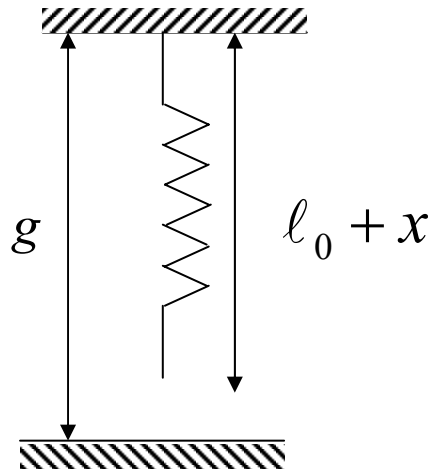
$$(12.127) \quad 0 = M \frac{d^2}{dt^2} x = -kx + Mg + F_0$$

$$(12.128) \quad x_{eq}^{(new)} = \frac{Mg + F_0}{k}$$

בהינתן המיקום הנ"ל של האלקטרודה ניתן לחשב את הקיבול של הקבל:

$$(12.129) \quad C = \epsilon_0 \frac{A}{g - \ell_0 - x_{eq}^{(new)}}$$

כך שאם המתח על הקבל הוא $V_{C,0}$ אזי האנרגיה האגורה $\frac{1}{2} CV_{C,0}^2$.



בהנחה שעובי האלקטרודה זניח, המרווח בינה לבין האדמה הוא $g - \ell_0 - x$ לכן בהנתן השטח של האלקטרודה (A) אזי קיבול הקבל הינו

$$(12.130) \quad C(x) = \epsilon_0 \frac{A}{g - \ell_0 - x}$$

בהנתן הקיבול KVL מכתוב

$$(12.131) \quad V_S = V_C + V_R + V_L$$

$$(12.132) \quad V_S = V_C + IR + L \frac{dI}{dt}$$

$$(12.133) \quad Q = CV_C \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \{C[x(t)]V_C(t)\}$$

$$(12.134) \quad V_S = V_C(t) + R \frac{d}{dt} \{C[x(t)]V_C(t)\} + L \frac{d^2}{dt^2} \{C[x(t)]V_C(t)\}$$

אנחנו שמים לב שעל-מנת לחשב את המתחים או הזרמים בהתקן יש צורך לדעת את מיקום האלקטרודה בכל רגע $x(t)$. אך כדי לדעת את המיקום אנחנו נדרשים לחשב את הכוח החשמלי. האחרון תלוי במטענים באלקטרודה הנמשכים לאלה שעל פני "האדמה" – קרי אנחנו צריכים לדעת את המתח!!! מבוי סתום.

הערה: כדאי לשים לב לעובדה שגם אם מקור המתח הוא קבוע $V_S(t) = V_{DC}$ המתח על הקבל אינו בהכרח קבוע כי $x(t)$ עשוי להיות תלוי בזמן.

צעד #3: קשר בין המתח על הקבל והכוח המופעל על הלוח:

בהנתן המתח על הקבל, פונקצית הקו-אנרגיה נתונה על-ידי

$$(12.135) \quad W'_E(x, V_C) = \frac{1}{2} C(x) V_C^2$$

ואילו הכוח:

$$(12.136) \quad F_{el} = \frac{\partial}{\partial x} W'_E = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x} V_C^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x)^2} V_C^2$$

נוכל כעת לסכם את המשוואות המתארות את המערכת.

הערה: במצב שיווי משקל וקטור המצב נתון על-ידי $(x_{eq}^{(new)}, V_{C,0})$

$$(12.137) \quad 0 = M \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx_{eq}^{(new)} + Mg + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x_{eq}^{(new)})^2} V_{C,0}^2$$

לסכום, המשוואות המתארות את הדנמיקה של המערכת האלקטרו-מכנית הן

$$(12.138) \quad M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) + Mg + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x)^2} V_C^2(t)$$

$$V_S(t) = V_C(t) + R \frac{d}{dt} \{C[x(t)]V_C(t)\} + L \frac{d^2}{dt^2} \{C[x(t)]V_C(t)\}$$

חלק 2 – פתרונות פשוטים (לינארזציה של המשוואות)

נניח שהמקור מורכב ממקור DC ומקור " AC " :

$$(12.139) \quad V_S(t) = V_{DC} + V_{AC}; \quad |V_{AC}| \ll V_{DC}$$

צעד #1:

מזניחים את V_{AC} ומוצאים את נקודת העבודה / מצב שיווי משקל $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ ולכן:

$$(12.140) \quad 0 = -kx_0 + Mg + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x_0)^2} V_{C,0}^2$$

$$V_{DC} = V_{C,0}$$

$$V_{C,0} = V_{DC}$$

$$(12.141) \quad x_0 : kx_0 = Mg + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x_0)^2} V_{DC}^2$$

צעד #2:

כעת נבצע לינארזציה לפתרון מערכת המשוואות הנדונה.

$$(12.142) \quad x(t) = x_0 + x_1(t)$$

$$(12.143) \quad V_C(t) = V_{C,0} + V_{C,1}(t) = V_{DC} + V_{C,1}(t)$$

כפוף לתנאים:

$$(12.144) \quad x_0 \gg |x_1(t)|$$

$$V_{DC} \gg |V_{C,1}(t)|$$

נפתח את המשוואות השונות עד לאיברים מסדר ראשון $(V_{C,1}, x_1)$:

$$(12.145) \quad M \frac{d^2}{dt^2} [\cancel{x_0} + x_1(t)] =$$

$$-k[x_0 + x_1(t)] + Mg + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x_0 - x_1(t))^2} [V_{DC} + V_{C,1}(t)]^2$$

$$(12.146) \quad \underbrace{M \frac{d^2}{dt^2} x_1(t)}_{\text{סדר ראשון}} = - \underbrace{kx_0}_{\text{סדר אפס}} - \underbrace{kx_1(t)}_{\text{סדר ראשון}} + Mg$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{(g - \ell_0 - x_0)^2} V_{DC}^2}_{\text{סדר אפס}} + \frac{\varepsilon_0 A V_{DC}^2}{(g - \ell_0 - x_0)^3} x_1(t) + \frac{\varepsilon_0 A V_{DC}}{(g - \ell_0 - x_0)^2} V_{C,1}(t)$$

שלושת האיברים מסדר אפס מגדירים את המשוואה שקובעת את נקודת העובדה x_0 לכן

$$(12.147) \quad M \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = -kx_1(t) + \frac{\varepsilon_0 A V_{DC}^2}{(g - \ell_0 - x_0)^3} x_1(t) + \frac{\varepsilon_0 A V_{DC}}{(g - \ell_0 - x_0)^2} V_{C,1}(t)$$

לשם פיתוח בטור של המשוואה השנייה

$$(12.148) \quad V_S(t) = V_C(t) + R \frac{d}{dt} \{C[x(t)]V_C(t)\} + L \frac{d^2}{dt^2} \{C[x(t)]V_C(t)\}$$

נפתח תחילה את הקיבול לטור:

$$(12.149) \quad C[x(t)] = \frac{\varepsilon_0 A}{[g - \ell_0 - x_0 - x_1(t)]} \approx \frac{\varepsilon_0 A}{g - \ell_0 - x_0} + \frac{\varepsilon_0 A}{(g - \ell_0 - x_0)^2} x_1(t)$$

$$C[x(t)] \approx C_0 + C_x x_1(t)$$

לכן

$$(12.150) \quad V_{DC} + V_{AC}(t) = V_{C,0} + V_{C,1}(t) + R \frac{d}{dt} \{ [C_0 + C_x x_1(t)] [V_{C,0} + V_{C,1}(t)] \} \\ + L \frac{d^2}{dt^2} \{ [C_0 + C_x x_1(t)] [V_{C,0} + V_{C,1}(t)] \}$$

$$(12.151) \quad V_{AC}(t) = V_{C,1}(t) + R \frac{d}{dt} \left\{ \cancel{C_0 V_{C,0}} + \underbrace{C_0 V_{C,1}(t) + C_x x_1(t) V_{C,0}}_{\text{סדר ראשון}} + \underbrace{\cancel{C_x x_1(t) V_{C,1}(t)}}_{\text{סדר שני}} \right\} \\ + L \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \cancel{C_0 V_{C,0}} + \underbrace{C_0 V_{C,1}(t) + C_x x_1(t) V_{C,0}}_{\text{סדר ראשון}} + \underbrace{C_x x_1(t) V_{C,1}(t)}_{\text{סדר שני}} \right\}$$

$$(12.152) \quad V_{AC}(t) = V_{C,1}(t) + R \frac{d}{dt} [C_0 V_{C,1}(t) + C_x x_1(t) V_{C,0}] + L \frac{d^2}{dt^2} [C_0 V_{C,1}(t) + C_x x_1(t) V_{C,0}]$$

לשם פשטות נניח התנהגות הרמונית בזמן, דהיינו :

$$(12.153) \quad V_{AC}(t) = V_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{V}_{AC} = V_0$$

$$(12.154) \quad \begin{aligned} x_1(t) &\Rightarrow \bar{X}_1(\omega) \\ V_{C,1}(t) &\Rightarrow \bar{V}_1(\omega) \end{aligned}$$

לכן ברישום פאזורי מתקיים :

$$(12.155) \quad -\omega^2 M \bar{X}_1 = -k \bar{X}_1 + C_x V_{DC}^2 \frac{\bar{X}_1}{g - \ell_0 - x_0} + C_x V_{DC} \bar{V}_1$$

$$(12.156) \quad \bar{V}_{AC} = \bar{V}_1 + j\omega R (C_0 \bar{V}_1 + C_x V_{DC} \bar{X}_1) - L\omega^2 (C_0 \bar{V}_1 + C_x V_{DC} \bar{X}_1)$$

וברישום מטריצי:

$$(12.157) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{V}_{AC} \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$(12.158) \quad A_{11} = \omega^2 M - k + C_x V_{DC}^2 \frac{1}{g - \ell_0 - x_0}; \quad A_{12} = C_x V_{DC}$$

$$A_{21} = j\omega R C_x V_{DC} - L\omega^2 C_x V_{DC}; \quad A_{22} = 1 + j\omega R C_0 - L\omega^2 C_0$$

כדאי לשים לב לגורם הצימוד $C_x V_{DC}$.

אם הגורם הזה הוא אפס אזי

$$(12.159) \quad \begin{pmatrix} \omega^2 M - k & 0 \\ 0 & 1 - \omega^2 L C_0 + j\omega R C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{V}_{AC} \end{pmatrix}$$

יש לנו שני מתנדים בלתי תלויים כל אחד עם התדר העצמי שלו, דהיינו: $\omega^2 M - k = 0$; $1 - \omega^2 L C_0 + j\omega R C_0 = 0$.

בנוכחות הצימוד כאמור:

$$(12.160) \quad \begin{pmatrix} \omega^2 M - k + C_x V_{DC} \frac{V_{DC}}{g - \ell_0 - x_0} & C_x V_{DC} \\ (j\omega R - L\omega^2)(C_x V_{DC}) & 1 + j\omega RC_0 - L\omega^2 C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{V}_{AC} \end{pmatrix}$$

תדרי התהודה נתונים על-ידי:

$$(12.161) \quad \left[\omega^2 M - k + C_x V_{DC} \frac{V_{DC}}{g - \ell_0 - x_0} \right] \left[1 + j\omega RC_0 - L\omega^2 C_0 \right] - (C_x V_{DC})^2 (j\omega R - L\omega^2) = 0$$

התדרים הנ"ל תלויים תלות מורכבת למדי ב- V_{DC} .

כדאי לשים לב שבמקרה זה הפרמטרים החשמליים משפיעים על הרזוננס המכני והפרמטרים המכניים משפיעים על הרזוננס החשמלי.

תרגיל עצמי:

מצא את תנאי העקביות על הפרמטרים של המערכת כך שהנחות הלינאריות תהינה תקפות.