למידה חישובית של מידע מובנה
תרגיל מס' 2

להגשה עד לתאריך 7 מרץ 2010

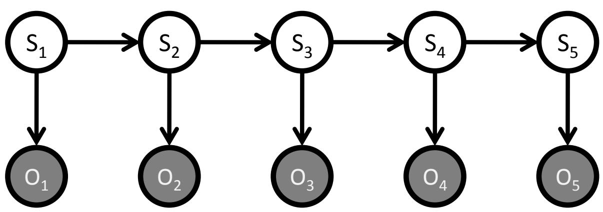
.1

(א) ברשותינו מדגם בן m דגימות של שני משתנים־מקריים X,Y, נסמנו $D=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)...(x_m,y_m)\}$. הראו כי משערך הנראות המירבית (MLE) של פילוג גאוסיאני משותף של X,Y הינו $\mu=(E_D\left[X\right],E_D\left[Y\right])$ וכן

$$\Sigma_{X,Y}=\left(\begin{array}{cc} Cov_D\left[X;X\right] & Cov_D\left[X;Y\right] \\ Cov_D\left[Y;X\right] & Cov_D\left[Y;Y\right] \end{array}\right)$$

(ב) הראו כיצד להכליל את התוצאה למקרה של d משתנים מקריים

.2 בשאלה זו נדון ברשתות מרקוב נסתרות (Hidden Markov Models - HMMs) המודגמות באיור 1. נניח כי משתנה המצב S מקבל אחד מתוך הערכים $\{1,2..k\}$ והמשתנה הנצפה הוא וקטור מעל הממשיים $O\in\Re^d$ בעל פילוג גאוסיאני $O\sim N(\mu_S,\Sigma_S)$. דהיינו מודל M מתואר ע"י שלשה: פילוג מעל המצב התחילי $P_0(S)$, פילוג מעבר בין מצבים $P(S|S')$ ופילוג התצפית בהנתן מצב, דהיינו k פילוגים גאוסיאנים $N(\mu_S,\Sigma_S)$, אחד לכל מצב.



איור 1:

(א) בהנתן מודל הראו במפורש כיצד ניתן לחשב ביעילות את הניראות של סדרה (sequence) אחת $O^1=O^1_1...O^1_n$ של תצפיות (משתנה המצב חסר), דהיינו $P(O^1;M)$

(ב) בהנתן מודל הראו במפורש כיצד לחשב ביעילות את כל ה־marginals $P(S_t=s;M)$ עבור $t=1...n$ ו־$s=1...k$

(ג) בהנתן מודל הראו במפורש כיצד ניתן לחשב ביעילות את ה־marginals בהנתן סדרת תצפיות $P(S_t=s\,;O^1;M)$ עבור $t=1...n$ ו־$s=1...k$

(ד) בהנתן מודל הראו במפורש כיצד ניתן לחשב ביעילות את סדרת המצבים המסתברת ביותר ביחס לתצפיות דהיינו

$$S^* \quad = \quad \arg\max_{S=S_1...S_n} P(S|O^1;M)$$

(ה) ברשותנו m דגימות של זוגות סדרות תצפיות־מצבים באורך n: $D=\left\{(O^i,S^i)\right\}$ כאשר $O^i=O^i_1...O^i_n$ ו־$S^i=S^i_1...S^i_n$, רשמו באופן מפורש את משערך הנראות המירבי של המודל

(ו) ברשותנו m דגימות של סדרות תצפיות בלבד באורך n, דהיינו $D=\left\{O^i\right\}$ כאשר $O^i=O^i_1...O^i_n$, פתחו את כלל הלמידה של המודל לפי אלגוריתם ה־Expectation Maximization

(ז) רשמו את סיבוכיות זמן וזכרון החשוב לכל אחת מן המטלות שחישבתם לעיל

בהצלחה