

# למידה חישובית של מידע מובנה

## תרגיל מס' 1

להגשה עד לתאריך 12 ינואר 2010

1. יהי  $T$  עץ-קליקות מאוזן (calibrated cluster tree) המייצג פילוג לא מנורמל  $\tilde{P}_\Phi = \prod_{\phi \in \Phi} \phi$ . יהי  $\psi$  פקטור חדש ונגדיר  $\tilde{P}'_\Phi = \tilde{P}_\Phi \times \psi$ . תהי  $C_i$  אחת הקליקות בעץ כך שמתקיים  $\text{SCOPE}(\psi) \subseteq C_i$ . הראו שניתן לערוך עדכון נקודתי (incremental) בעץ על מנת לחשב את  $\tilde{P}'(C_j)$  עבור קליקה  $C_j$  כלשהיא על-ידי הכפלת  $\beta_i$  בקליקה החדשה  $\psi$  ואז העברת ההודעות מהקליקה  $C_i$  לקליקה  $C_j$  לאורך המסילה המחברת את שתי קליקות אלו.

2. נחקור inference רשתות בייסיאניות בנות שתי שכבות, עם פילוג מותנה לוגיסטי. כל המשתנים ברשתות הינם בינאריים (ערכם הוא אחד מתוך שתי אפשרויות בלבד). השכבה הראשונה (עליונה) מורכבת מהמשתנים  $X_1 \dots X_n$  כולם בלתי-תלויים זה בזה. כל אחד מן המשתנים  $Y_1 \dots Y_m$  המרכיבים את השכבה התחתונה תלוי בשכבה העליונה על-פי פילוג מותנה לוגיסטי

$$P(Y_j = 1) = \text{sigmoid} \left( \sum_i^n w_{i,j} x_i + w_{0,j} \right)$$

נדגום חלק ממשתני השכבה התחתונה, ונעריך את ההסתברות של דגימה זו.

(א) הראו כי כאשר המחשבים את ההסתברות של הערכים הנצפים ניתן להתעלם מן המשתנים  $Y_j$  שלא נדגמו.

(ב) בהנתן הדגימה  $y$  השתמשו בחסם שראינו בכיתה

$$\log \text{sigmoid} \left( \sum_i w_i u_i + w_0 \right) \leq \lambda \left( \sum_i w_i u_i + w_0 \right) + H(\lambda) \quad \text{for } \lambda \in [0, 1]$$

ומצאו חסם עליון (בשיטת ואריאציה) על ההסתברות  $P(y)$

(ג) פתחו קרוב mean field החוסם מלמטה את אותה הסתברות  $P(y)$

3. תהי  $S$  קבוצת מצבים ויהיו  $T_1, T_2 \dots T_k$  אוסף קרנלים שכל אחד מוגדר מעל  $S$  ומקיים את תכונת האיזון-המפורט ביחס לפילוג סטציונרי כלשהוא  $\pi$ . יהיה  $p = (p_1 \dots p_k)$  פילוג על האינדקסים  $1 \dots k$ .

(א) נגדיר שרשרת מרקוב  $T$  שהיא תערובת הדוגמת בכל שלב את אחד הקרנלים  $T_i$  בהסתברות  $p_i$ . הראו כי השרשרת  $T$  מקיימת גם היא את תכונת האיזון המפורט ביחס לפילוג  $\pi$ .

(ב) נגדיר שרשרת מרקוב (אחרת)  $T'$  משולבת שבכל שלב מורכבת סדרתית מן הקרנלים  $T_1$  ואז  $T_2$  וכיוצא בזה עד  $T_k$ .

מצאו דוגמא המראה כי יתכן והשילוב  $T'$  אינו מקיים את תכונת האיזון המפורט ביחס לפילוג  $\pi$

(ג) הראו כי הפילוג  $\pi$  הינו סטציונרי ביחס לשילוב  $T'$

(ד) מצאו שילוב אחר לקרנל רב-שלבי  $T_1 \dots T_k$  המקיים את תכונת איזון-מפורט ביחס לפילוג  $\pi$

ב ח ל ח ה