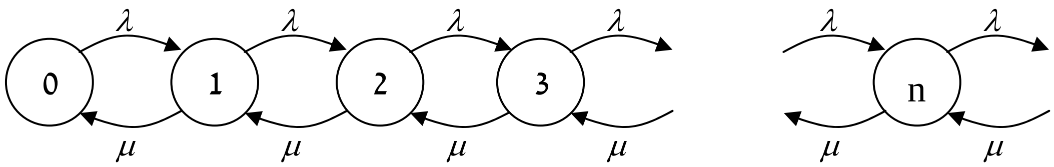
<u>הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל</u> **סמסטר חורף תש"ע**

<u>הפקולטה להנדסת חשמל</u> **2009/2010**

תכן רשתות מחשבים 046335

הרחבה לתרגול 1

בתרגול 1 ישנה חזרה על מודל M/M/1, המתואר באמצעות דיאגרמת המצבים



כאשר ידועות התוצאות הבאות:

- מס' ההודעות הממוצע במערכת (שרת + תור):

$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- ההשהיה הממוצעת של הודעה (מכניסה ליציאה):

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

כעת נשאלת השאלה, מהם N_Q, T_Q , כלומר מספר ההודעות הממוצע וההשהיה הממוצעת <u>בתור בלבד</u>.

נציג כעת 2 פתרונות נכונים ו-2 שגויים לשאלה זו.

<u>דרך א' – נכונה:</u>

כפי שהוצג בתרגול, ניתן לרשום

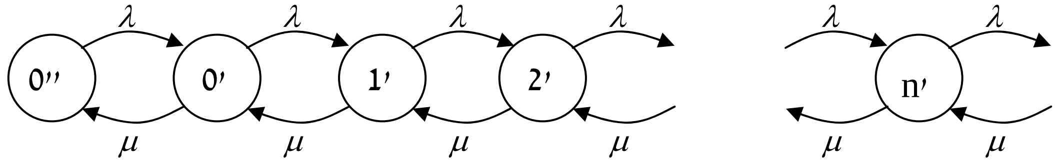
$$T_Q = T - \frac{1}{\mu} \quad \rightarrow \quad N_Q = \lambda T_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \lambda\left(\frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}\right) = N - \rho$$

ההגיון מאחורי הפיתוח הנ"ל, הוא שכל הודעה שנכנסת למערכת בהכרח עוברת דרך השרת, שם היא צוברת השהיה ממוצעת של $1/\mu$, ולכן T_Q מחושב כנ"ל.

מכאן, מתייחסים למערכת התור (בלבד) כ- black box עם קצב כניסה ממוצע λ. משפט ליטל נותן את התוצאה.

דרך ב' – נכונה:

בדרך זו משנים את דיאגרמת המצבים כלהלן ומחשבים על סמך הדיאגרמה את N_Q, T_Q :



מצב '0 עבור שרת+תור ריק, מצב 0 עבור תור ריק ושרת פועל, כאשר ברור מהקשר ביחס לדיאגרמה המקורית כי:

$$P_{0''} = P_0$$
$$P_{k'} = P_{k+1}, \quad k \ge 0$$

חישוב התוחלת יתן:

$$N_Q = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k'} k = \sum_{n=1}^{\infty} P_n (n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = N - (1-P_0) = N - \rho$$

וכאמור התוצאות זהות.

דרך ג' – שגויה:

הסברנו בתרגול כי

$$N_Q \ne N - 1$$

הסיבה: מספר ההודעות בתור קטן ב-1 ממספר ההודעות הכולל רק במידה והמערכת לא ריקה. בפרט, יתכן כי $0 < N < 1$, אולם ברור כי N_Q אינו שלילי.

נראה אם כן הגיוני לטעון כי

$$(*) \qquad N_Q = 0 \cdot P_0 + (N-1)(1-P_0)$$

כאשר (*) הוא שקלול לפי הסתברויות: במצב שהמערכת ריקה לחלוטין (P_0), ברור כי $N_Q = 0$, ואחרת מספר ההודעות בתור קטן ב-1 מסך ההודעות במערכת.
ההסבר הנ"ל **שגוי**. די להיווכח כי גם בנוסחה הנ"ל N_Q יכול לצאת שלילי אם $0 < N < 1$.

על מנת לחדד את ההבנה, נשים לב שבבסיס הטיעון הנ"ל נמצאת הסתברות מותנית:

$$(**) \quad N_Q = \mathbb{E}\left\{ N_Q \mid P_0 \right\} \cdot P_0 + \mathbb{E}\left\{ N_Q \mid 1-P_0 \right\} \cdot (1-P_0)$$

כעת ברור כי:

$$\mathbb{E}\left\{ N_Q \mid P_0 \right\} = 0$$
$$\mathbb{E}\left\{ N_Q \mid 1-P_0 \right\} = \mathbb{E}\left\{ N \mid 1-P_0 \right\} - 1$$

אם כן, הטעות בהסבר הנ"ל מקורו במעבר מהיר (ושגוי) בחלק השני ב- (*). במצב שבו המערכת לא ריקה, נכון הוא שמספר ההודעות בתור קטן ב-1 מסך ההודעות, אולם כשכותבים ממוצעים צריך לא לשכוח את ההתניה בעובדה שהמערכת לא ריקה.

כדי לחשב את התוחלת המותנית הנ"ל, אפשר לרשום:

$$N = \mathbb{E}\left\{N \mid P_0\right\} \cdot P_0 + \mathbb{E}\left\{N \mid 1-P_0\right\} \cdot (1-P_0)$$
$$= 0 \cdot P_0 + \mathbb{E}\left\{N \mid 1-P_0\right\} \cdot (1-P_0)$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left\{N \mid 1-P_0\right\} = \frac{N}{1-P_0}$$

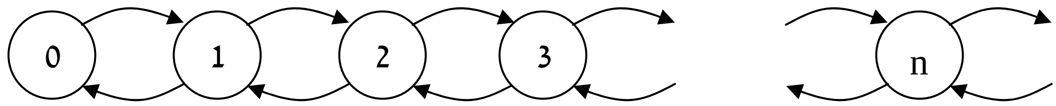
נציב ב- (**) ונקבל:

$$N_Q = \mathbb{E}\left\{N_Q \mid 1-P_0\right\} \cdot (1-P_0)$$
$$= \left(\mathbb{E}\left\{N \mid 1-P_0\right\} - 1\right) \cdot (1-P_0)$$
$$= \left(\frac{N}{1-P_0} - 1\right) \cdot (1-P_0) = N - (1-P_0) = N - \rho$$

וזוהי כאמור התוצאה הנכונה.

<u>דרך ד' – שגויה:</u>

נסתכל על התור (בלבד) כמערכת M/M/1., ונשרטט דיאגמת מצבים שבה המספרים מציינים את מספר ההודעות <u>בתור בלבד</u>.



נגדיר קצב כניסה ממוצע:

$$\bar{\lambda} = \lambda(1-P_0)$$

מתוך הבנה שהודעה שמגיעה כאשר המערכת ריקה לחלוטין, למעשה עוברת ישירות לשרת, ולכן מבחינת התור לא חל שינוי – הוא נשאר ריק כמקודם. הקצב האפקטיבי משקלל את ההסתברות שהמערכת לא ריקה.

קצב השירות נשאר לכאורה μ, כי הודעות "מפונות" מהתור בקצב זה.

ואז

$$N_Q = \frac{\bar{\lambda}}{\mu - \bar{\lambda}} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2}$$

נשים לב שזוהי תוצאה <u>שגויה</u> ביחס למה שמתקבל בדרכים א' וב'.

הסיבה: מערכת התור <u>אינה מערכת M/M/1</u>. קצב המעבר ממצב 0 למצב 1 תלוי בעבר ולכן אינו memoryless. כנ"ל קצב "השירות" תלוי בעבר ואינו memoryless. לכן, כל הנוסחאות שפותחו עבור מערכת M/M/1 אינן תקפות פה.

שימו לב! בדרך א' השתמשנו במשפט ליטל על מערכת התור וקיבלנו תוצאה נכונה, למרות שמערכת התור אינה M/M/1.
אין סתירה. כפי שהוסבר בתרגול, משפט ליטל נכון באופן גורף לכל מערכת שעבורה אנו יודעים לחשב את זמן ההשהיה הממוצע (T_Q במקרה הנוכחי) ואת קצב הכניסה הממוצע (λ במקרה הנוכחי). לעומת זאת, נוסחאות M/M/1 חוקיות רק כאשר תהליכי המופע והשירות חסרי-זיכרון.